Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf-Mila

Institut des Mathématiques et informatique
Matière : Equations de la physique mathématique

Série 4

Exercice 1 *Soit $u(x,t)$ la solution du problème suivant*

$$(w)\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0;\ x\in\mathbb{R}, t>0, \\ u(x,0)=g(x), u_t(x,0)=h(x);\ \ x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

òu $g\in C^2(\mathbb{R})$ et $h\in C^1(\mathbb{R})$.

1- a) En posant $r=x-t$ et $s=x+t$,montrer que l'équation du problème (w) est équivalente à l'équation u_{rs} ($u_{rs}=\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial s}$).

b) Résoudre l'équation $u_{rs}=0$ et établir la formule de d'Alembert,

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(g(x-t)+g(x+t))+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}h(y)dy, x\in\mathbb{R}, t>0$$

2- On suppose que les fonctions g et h sont à support compact.

On définit l'énergie cinétique et l'énergie potentielle par,

$$k(t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}u_t^2(x,t)dx, \qquad p(t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}u_x^2(x,t)dx.$$

a. Montrer que la somme $k+p$ est constante sur $\mathbb{R}^+$.

b. Montrer qu'il existe $T>0$ tel que, $k(t)=\ p(t)\ \forall t>$.

Exercice 2

Soit l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

avec les conditions initiales :

$$u(x,0)=0 \quad et \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=f(x),$$

où $f(x)$ est une fonction donnée. Résoudre cette équation à l'aide de la formule de d'Alembert.

Exercice 3 *Soit l'équation d'onde :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$u(x,0)=\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad et \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.$$

Résoudre cette équation à l'aide de la formule de d'Alembert.

Exercice 4 *On considère l'équation d'onde classique en une dimension pour une fonction $u(x,t)$ qui décrit l'évolution d'une perturbation dans un milieu. L'équation est donnée par :*

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde. Supposons que la fonction $u(x,t)$ soit définie sur un intervalle spatial $0\leq x\leq L$, avec des conditions aux bords de type Dirichlet :

$$u(0,t)=0 \quad et \quad u(L,t)=0 \quad pour\ tout\ t\geq 0.$$

Les conditions initiales sont les suivantes :

$$u(x,0)=f(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=g(x),$$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions données.

- Resoudre le probleme par la méthode de séparation des variables.

SOLUTION

Exercice2:

- Appliquer la formule de d'Alembert :

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \int_0^t g(x + c(t-\tau)) + g(x - c(t-\tau))\, d\tau,$$

où $f(x) = u(x,0)$ et $g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$.
Ici, on a :

$$u(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x) \quad \Rightarrow \quad g(x) = f(x).$$

La solution devient donc :

$$u(x,t) = \int_0^t f(x + c(t-\tau)) + f(x - c(t-\tau))\, d\tau.$$

Exercice3:

- Appliquer la formule de d'Alembert :

$$u(x,t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi(x+ct)}{L}\right) + \sin\left(\frac{\pi(x-ct)}{L}\right)}{2}.$$

- Utiliser l'identité trigonométrique :

$$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right),$$

ce qui donne :

$$u(x,t) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi ct}{L}\right).$$

Exercice 4:
On cherche une solution sous la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$, où $X(x)$ est une fonction de x et $T(t)$ est une fonction de t.
En substituant $u(x,t) = X(x)T(t)$ dans l'équation d'onde, on obtient :

$$X(x)\frac{d^2T(t)}{dt^2} = c^2T(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2}.$$

En divisant les deux côtés par $X(x)T(t)$, on sépare les variables :

$$\frac{1}{c^2T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\lambda,$$

où λ est une constante de séparation.
L'équation pour $X(x)$ devient :

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \lambda X(x) = 0.$$

Les solutions aux conditions aux bords $X(0) = 0$ et $X(L) = 0$ sont données par :

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$T(t)$: L'équation pour $T(t)$ devient :

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \lambda c^2 T(t) = 0.$$

Les solutions sont de la forme :

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right).$$

La solution générale de l'équation d'onde est alors une somme de solutions propres :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

En utilisant les conditions initiales $u(x,0) = f(x)$ et $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x)$, vous pouvez déterminer les constantes A_n et B_n par les séries de Fourier.