

## I. Le régime monophasé.

### I.1. Rappels sur la description des grandeurs sinusoïdales.

#### a. Ecriture des grandeurs sinusoïdales.

On écrira une tension sinusoïdale sous la forme

$$u = U_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{rigoureusement pour une tension instantanée } u(t) = \dots)$$

avec

|                      |                                   |
|----------------------|-----------------------------------|
| $U_m$                | amplitude ( V )                   |
| $\omega$             | pulsation ( rad.s <sup>-1</sup> ) |
| $\varphi$            | phase initiale ( rad )            |
| $\omega t + \varphi$ | phase instantanée ( rad )         |

#### b. Valeur moyenne d'une grandeur périodique.

$$\langle u \rangle = 1/T \cdot \int_T u dt \quad (\text{pour un signal sinusoïdal } \langle u \rangle = 0)$$

#### c. Valeur efficace d'une grandeur périodique.

C'est la racine carré de la valeur moyenne du carré de la grandeur considérée.

$$U = \sqrt{1/T \cdot \int_T u^2 dt} \quad (\text{rms pour root mean square chez les anglo-saxons})$$

Pour une tension sinusoïdale on trouve :

$$U = U_m / \sqrt{2} \quad \text{ainsi on écrira souvent } u = U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

La valeur efficace est celle indiquée par les voltmètres et les ampèremètres. En électrotechnique on donne toujours la valeur efficace des tensions et des courants. Ainsi quand on parle du réseau électrique domestique à 220 V il s'agit bel et bien de la valeur efficace de la tension.

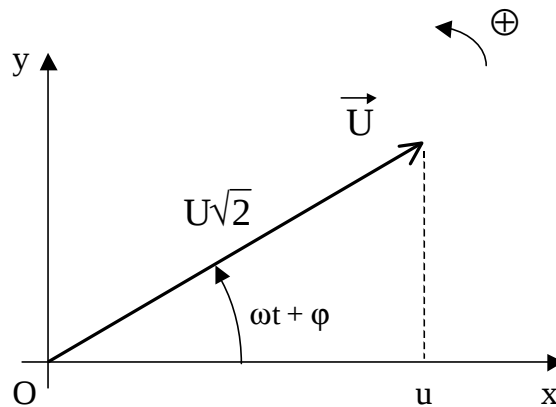


: au type d'appareil de mesure utilisé. Les voltmètres et ampèremètres ferromagnétiques et électrodynamiques indiquent la valeur efficace quelque soit la forme du signal mesuré (sinusoïdal ou non) ; tandis que les appareils magnétoélectriques ne donnent une valeur efficace exacte que pour des grandeurs sinusoïdales.

#### d. Représentation vectorielle (vecteurs de Fresnel).

On peut faire correspondre à toute fonction sinusoïdale un vecteur de Fresnel partant de l'origine du repère, de module l'amplitude de la fonction et faisant un angle égale à sa phase instantanée avec l'axe ( Ox ) pris comme origine des phases, grâce à sa projection sur l'axe ( Ox ).

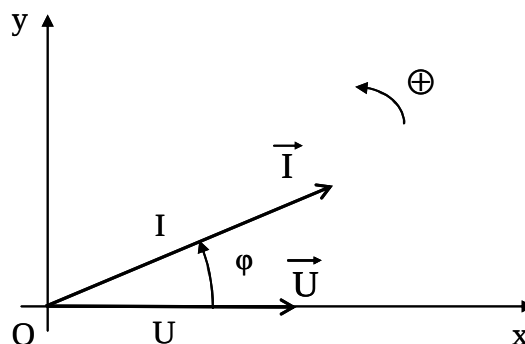
Par exemple, pour une tension  $u = U\sqrt{2}.\cos(\omega t + \varphi)$  quand on dessine  $\vec{U}$  le vecteur de Fresnel associé :



on retrouve bien  $u$  en projection sur ( Ox ).

Par **convention** on représentera les vecteurs de Fresnel à  $t = 0$  et avec comme module la valeur efficace de la grandeur considérée.

Par exemple, pour une tension  $u = U\sqrt{2}.\cos(\omega t)$  et un courant  $i = I\sqrt{2}.\cos(\omega t + \varphi)$  on dessine



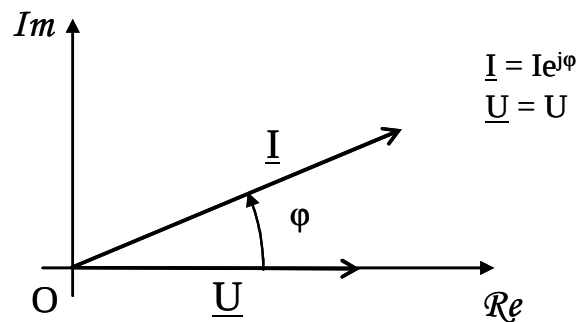
$\varphi$  est le déphasage entre les deux vecteurs ( on prendra souvent les tensions comme référence pour les déphasages ).



: dans un même diagramme de Fresnel on ne peut représenter que des grandeurs ayant la même pulsation.

### e. Notation complexe.

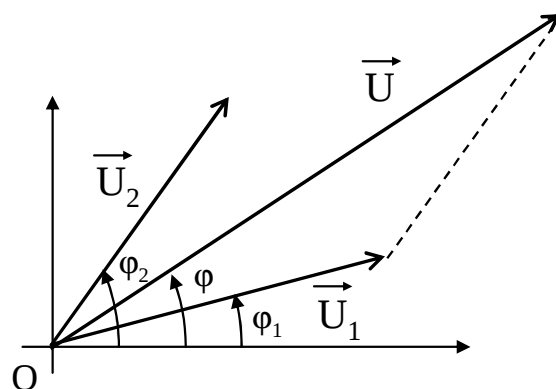
On caractérise également les grandeurs sinusoïdales par les composantes de leurs vecteurs représentatifs dans le plan complexe.



### Addition/soustraction

L'addition ( ou la soustraction ) de deux grandeurs sinusoïdales de même pulsation,  $u_1 = U_1\sqrt{2}.\cos(\omega t + \phi_1)$  et de  $u_2 = U_2\sqrt{2}.\cos(\omega t + \phi_2)$ , est une grandeurs sinusoïdale de même pulsation  $u = U\sqrt{2}.\cos(\omega t + \phi)$ .

La détermination de  $u$  est peu évidente à effectuer par le calcul ; on obtient une solution bien plus rapidement par construction graphique en utilisant les propriétés d'addition (ou de soustraction) vectorielle :  $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$ , ou bien en utilisant les propriétés d'addition des complexes.



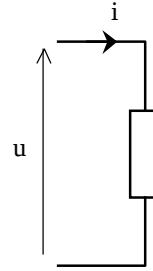
### Dérivation / Intégration

La dérivation ou l'intégration d'une grandeur sinusoïdale donne une grandeur sinusoïdale de nature différente mais de même pulsation.

Graphiquement, dériver revient à multiplier le module de la grandeur considérée par  $\omega$  et à la déphaser en avant de  $\pi/2$  ; intégrer revient à diviser son module par  $\omega$  et à la déphaser en arrière de  $\pi/2$ .

## I.2. Puissances en régime monophasé.

Avec la convention de signe récepteur si la puissance est positive alors le système considéré reçoit de l'énergie, si la puissance est négative alors il cède de l'énergie.



### a. Puissance instantanée.

$$p = u.i \quad (\text{watt} - W)$$

### b. Puissance active (puissance moyenne).

La puissance active est la valeur moyenne de la puissance instantanée ; dans le cas de grandeurs périodiques de période T :

$$P = \langle p \rangle = \frac{1}{T} \cdot \int_T p dt \quad (\text{watt} - W)$$

C'est l'énergie effectivement récupérable par la charge ( sous forme de travail mécanique, de chaleur, etc. ).

Dans le cas d'un courant et d'une tension sinusoïdales  $u = U\sqrt{2}.\cos(\omega t)$  et  $i = I\sqrt{2}.\cos(\omega t + \varphi)$  on trouve<sup>1</sup>

$$p = UI.\cos\varphi + UI.\cos(2\omega t + \varphi)$$

d'où  $P = UI.\cos\varphi$  la puissance active en régime sinusoïdal monophasé.

On retrouve ce résultat en écrivant  $P = \vec{U} \cdot \vec{I}$  (produit scalaire des vecteurs associés à la tension et à l'intensité)

### c. Puissance apparente.

On définit la puissance apparente par :

$$S = UI \quad (\text{volt-ampère} - VA)$$

Ce qui permet d'introduire le facteur de puissance :

$$k = P / S \quad (\text{sans unité})$$

En régime sinusoïdal on trouve donc  $k = \cos\varphi$ .

---

<sup>1</sup>  $2.\cos a .\cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$

#### d. Puissance réactive en régime sinusoïdal.

La puissance réactive en régime sinusoïdal est donnée par

$$Q = UI.\sin\varphi \quad (\text{volt-ampère réactifs – VAR})$$

On peut alors écrire

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2}$$

et un certain nombre de relation utiles lors des résolutions d'exercices :

$$\tan\varphi = Q / P \quad \cos\varphi = P / S \quad \sin\varphi = Q / S$$

Vectoriellement on peut exprimer la puissance réactive sous la forme d'un produit scalaire :

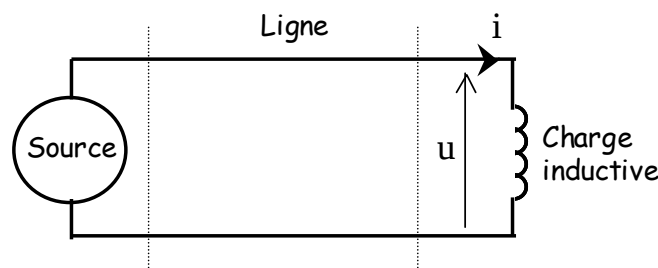
$$Q = \vec{U}' \cdot \vec{I} \quad \text{avec } \vec{U}' \text{ vecteur déphasé en arrière de } \pi/2 \text{ par rapport à } \vec{U} \text{ et de même norme.}$$

#### **Interprétation physique.**

La puissance réactive traduit les échanges d'énergie, à valeur moyenne nulle entre une source et une inductance ou une capacité.

Ainsi si on considère une source de tension sinusoïdale alimentant une charge purement inductive via une ligne, la puissance active consommée par la charge est nulle. En effet dans l'inductance la tension est en avance de  $\varphi = \pi/2$  par rapport au courant, d'où  $P = UI.\cos\varphi = 0$ .

La puissance réactive est égale à la puissance apparente  $Q = UI.\sin\varphi = UI = S$  et  $k = 0$ .



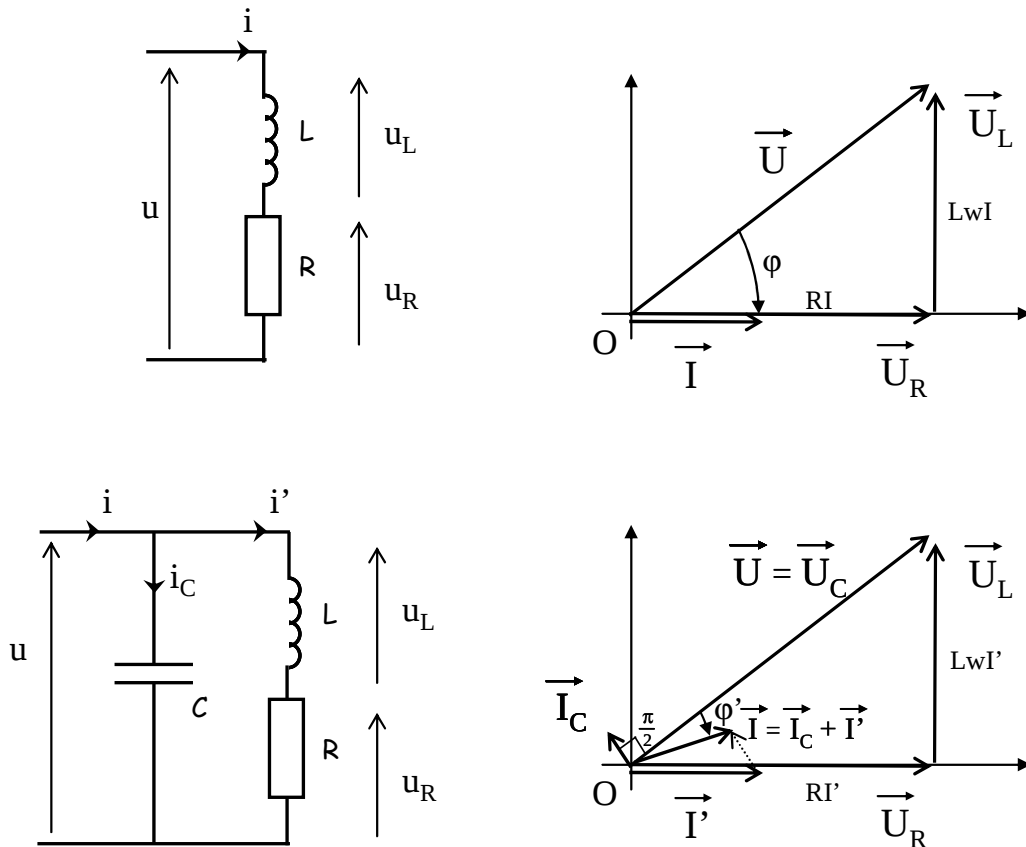
Périodiquement, l'inductance stocke une certaine énergie magnétique fournie par la source puis la restitue ; cet échange d'énergie se fait via la ligne électrique. C'est la puissance apparente qui permet de dimensionner la ligne, cette dernière est parcourue par l'énergie électrique échangée et est le siège de pertes par effet Joule.

Les installations industrielles sont en général inductives (à cause des enroulements des moteurs), de plus les compteurs électriques mesurent et permettent de facturer la puissance active consommée par un abonné. Ainsi si le facteur de puissance d'un abonné est faible les

pertes joule dans le réseau électrique sont élevées par rapport à la puissance active qui lui est facturée. Aussi EDF impose-t-il une valeur minimale du facteur de puissance ( un  $\cos\phi$  minimal ), sous peine de pénalités financières, aux utilisateurs.

Le facteur de puissance  $k$ , définit en quelque sorte un taux d'activité "utile" de la ligne.

Pour relever le facteur de puissance d'une charge inductive il suffit de placer en parallèle de la charge des condensateurs en batterie, cette technique est illustrée figure suivante ( la tension  $U$  étant imposée par le réseau elle n'est pas modifiée ) :



$$\cos\phi' > \cos\phi$$

A noter que la capacité ajoutée ne consomme pas de puissance active.

#### e. Théorème de Boucherot.

Dans un réseau, à fréquence constante, il y a conservation de la puissance active d'une part et de la puissance réactive d'autre part.



: le théorème de Boucherot n'est pas valable pour la puissance apparente.

Ainsi si on considère l'association de  $k$  dipôles, qu'ils soient placés en série, en parallèle ou en toute combinaison série-parallèle possible, on a :

$$\mathbf{P} = \sum_k \mathbf{P}_k \qquad \mathbf{Q} = \sum_k \mathbf{Q}_k \qquad \mathbf{S} \neq \sum_k \mathbf{S}_k$$

avec  $P$ ,  $Q$  et  $S$  les puissances actives, réactives et apparentes de l'ensemble et  $P_k$ ,  $Q_k$  et  $S_k$  celles associées à chacun des dipôles.

La démonstration du théorème de Boucherot est donnée en annexe.

f. Puissance complexe.

On définit également une puissance complexe

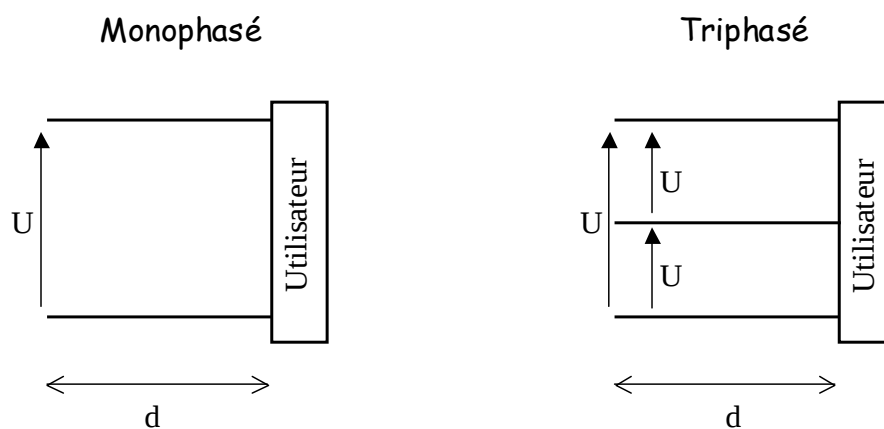
$$\underline{\mathcal{P}} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = P + jQ$$

## II. Régime triphasé.

### II.1. Introduction – Caractéristiques du réseau de distribution électrique Français.

La production et le transport de l'énergie électrique se font sous forme triphasée, en régime sinusoïdal. Ce sont les contraintes liées au transport de l'énergie électrique qui expliquent ce choix ; l'exemple simplifié suivant en est l'illustration :

Considérons le transport d'une puissance  $P$  à la distance  $d$  respectivement en monophasé et en triphasé. On fixe une même tension efficace  $U$  en monophasé et entre les lignes du triphasé.



Calcul des pertes Joule dans la ligne monophasé :

$$\text{pertes}_{\text{mono}} = 2RI^2 \quad \text{avec } I = P / U \cos \varphi \text{ et } R \text{ la résistance d'une ligne de longueur } d$$

$$\text{pertes}_{\text{mono}} = 2RP^2 / U^2 \cos^2 \varphi \quad \text{avec } R = \rho \cdot d / s \quad \rho \text{ résistivité } [\Omega \cdot \text{m}]$$

$$\text{pertes}_{\text{mono}} = 2\rho d P^2 / s U^2 \cos^2 \varphi$$

Calcul des pertes Joule dans la ligne triphasée :

$$\text{pertes}_{\text{tri}} = 3RI^2 \quad \text{avec } I = P / \sqrt{3} U \cos \varphi \text{ ( ce résultat est démontré dans la suite du cours )}$$

$$\text{pertes}_{\text{tri}} = 3RP^2 / U^2 \cos^2 \varphi \quad \text{avec } R = \rho \cdot d / s$$

$$\text{pertes}_{\text{tri}} = \rho d P^2 / s U^2 \cos^2 \varphi$$

**Pour fournir une même puissance  $P$  à un utilisateur une ligne triphasée subit moitié moins de pertes par effet Joule qu'une ligne monophasée ( de même section ).**

Un deuxième critère de choix concerne le volume de cuivre utilisé pour réaliser les lignes à pertes égales :

$$\text{en monophasé} \quad V_{\text{mono}} = 2ds = 4\rho d^2 P^2 / \text{pertes}_{\text{mono}} \cdot U^2 \cos^2 \varphi$$

$$\text{et en triphasé} \quad V_{\text{tri}} = 3ds = 3\rho d^2 P^2 / \text{pertes}_{\text{tri}} \cdot U^2 \cos^2 \varphi$$

$$\text{d'où} \quad V_{\text{tri}} = \frac{3}{4} V_{\text{mono}} \quad (\text{ en considérant } \text{pertes}_{\text{mono}} = \text{pertes}_{\text{tri}} )$$

Le choix d'une ligne triphasée permet donc également une économie de cuivre.

**Ces deux avantages expliquent le choix des lignes triphasées pour la distribution d'énergie.**

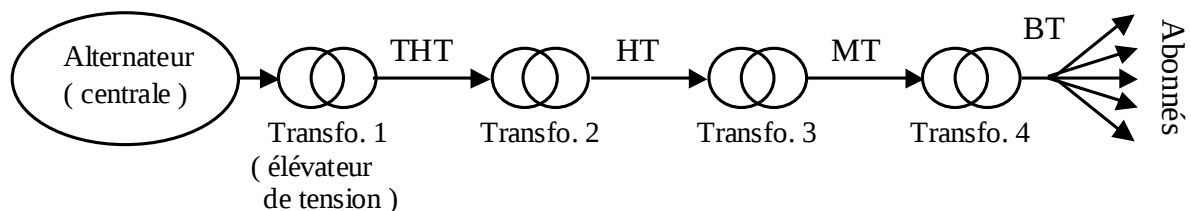
On notera également que les pertes Joule sont inversement proportionnelles au carré de la tension et proportionnelles à la longueur de ligne, d'où l'intérêt d'utiliser des tensions élevées pour le transport de l'énergie électrique à longue distance. C'est ce qui explique l'échelonnement des tensions dans le réseau électrique. On distingue

**le réseau de transport et d'interconnexion** partant des centrales électriques et dédié au transport longue distance de l'électricité, il est constitué de lignes très haute tension ( THT ) à 400 et 225 kV,

( pylônes "porte-manteau" portant deux lignes triφ )

**le réseau de répartition**, réseau intermédiaire dédié aux distances moyennes ( quelques dizaines de kilomètres ) et constitué de lignes haute tension ( HT ) à 90 et 45 kV,

**le réseau de distribution** amenant l'énergie électrique aux abonnés, il comporte des lignes moyenne tension ( MT ) à 20 kV, auxquelles peuvent être relié directement les utilisateurs industriels, et des lignes basse tension ( BT ) pour la distribution au particulier en monophasé à 220 V entre phase et neutre ( valeur efficace de la tension ) et parfois en triphasé à quatre fils ( réseau 220 / 380 V ).



C'est l'échelonnement des tensions dans le réseau électrique qui explique le choix du **régime sinusoïdal** par rapport au régime continu, la conversion de tensions sinusoïdales étant relativement facile à mettre en œuvre au moyen de transformateurs. La conversion de tensions continus requiert l'utilisation de composants d'électronique de puissance et est plus difficile et coûteuse à réaliser ( cependant on notera que l'interconnexion sous-marine France – Angleterre est réalisée par des lignes en régime continu ).

Enfin le réseau électrique français opère à une fréquence de **50 Hz**. Il en est de même en Europe et en Asie, tandis que l'Amérique du nord a choisi une fréquence de 60 Hz. ( la qualité de la lumière émise par les lampes n'est acceptable qu'à partir d'une quarantaine de Hertz, et la fréquence est limitée par la complexité des traitements électronique qui croît proportionnellement à celle-ci et par les pertes fer dans les transformateurs qui augmentent avec la fréquence ).

On rappellera enfin que l'énergie électrique ne se stocke pas<sup>2</sup>. A chaque instant l'énergie produite doit être égale à celle utilisée par les consommateurs, tout en assurant la constance de la tension et de la fréquence du réseau (l'augmentation de la puissance active consommée entraîne principalement une diminution de la fréquence du réseau, et celle de puissance réactive une diminution de la tension). Cependant l'énergie électrique est facile à transporter à grande distance. Ainsi toutes les centrales productrices d'électricité sont elles interconnectées par des lignes THT (le réseau français est également interconnecté avec ceux des pays voisins) ce qui facilite la gestion de la production.

A titre indicatif en 2005 la production d'électricité en France a été assurée à 78,5% par des centrales nucléaires, à 10,4% par des centrales hydrauliques/voltaïques/éolienne et à 11,3% par des centrales thermiques.

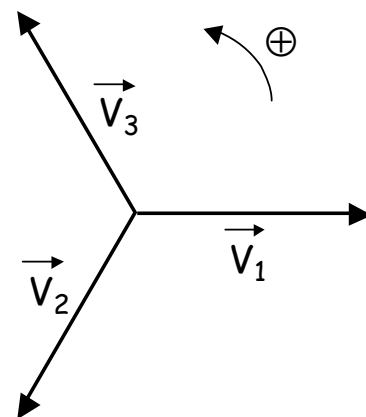
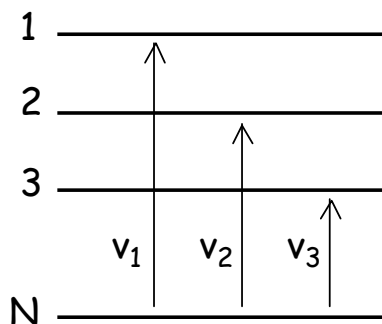
## II.2. Etude des systèmes triphasés équilibrés.

### a. Définition.

Trois grandeurs sinusoïdales forment un système **équilibré** si elles ont même valeur efficace et si elles sont régulièrement déphasées entre elles (cette définition implique qu'elles aient la même pulsation).

Le système formé par ces trois grandeurs est dit **direct** si, en les ayant repérées par les indices 1, 2 et 3, la deuxième est déphasée en retard de  $2\pi / 3$  et la troisième de  $4\pi / 3$ .

La distribution d'énergie par le réseau électrique se fait sur trois phases et un neutre, idéalement les tension simples des trois phases forment un système équilibré direct, elles sont données par rapport au neutre. Les schémas suivants représentent le réseau de distribution et la représentation de Fresnel<sup>3</sup> associée aux trois tensions simples entre phase et neutre.



<sup>2</sup> Sauf sous forme hydraulique. <sup>3</sup> Le système est bien direct, un observateur fixe voit défiler les trois vecteurs dans l'ordre.

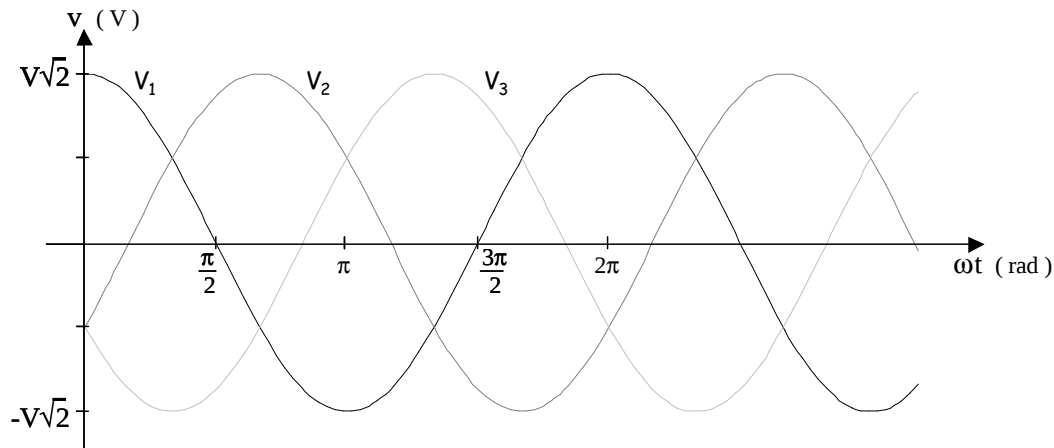
Les trois tensions ont pour expressions :

$$v_1 = V\sqrt{2}.\cos(\omega t)$$

$$v_2 = V\sqrt{2}.\cos(\omega t - 2\pi/3)$$

$$v_3 = V\sqrt{2}.\cos(\omega t - 4\pi/3)$$

La représentation graphique associée est donnée ci-dessous :



La somme de trois grandeurs sinusoïdales formant un système équilibré est nulle.

On vérifie bien  $v_1 + v_2 + v_3 = 0$  ; on retrouve ce résultat à partir de la représentation de Fresnel<sup>4</sup>.

### Opérateur rotation.

L'opérateur rotation  $a$ , est la racine cubique de l'unité :

$$a = e^{j2\pi/3} = \cos(2\pi/3) + j.\sin(2\pi/3) = -1/2 + j.\sqrt{3}/2$$

La multiplication d'un complexe par  $a$  donne un complexe de même module déphasé en avance de  $2\pi/3$ .

D'où  $\underline{V}_2 = a^2 \underline{V}_1$  et  $\underline{V}_3 = a \underline{V}_1$ .

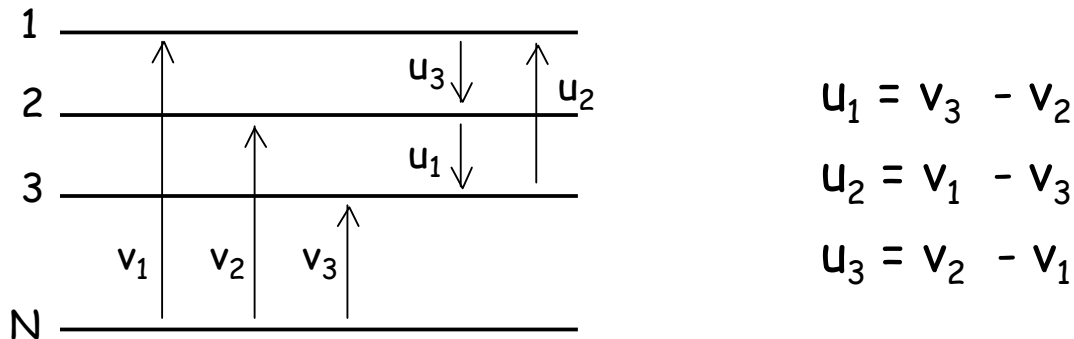
Ce résultat est cohérent avec l'expression  $1 + a + a^2 = 0$  donnée par le cours de mathématique.

### Tensions simples – tensions composées.

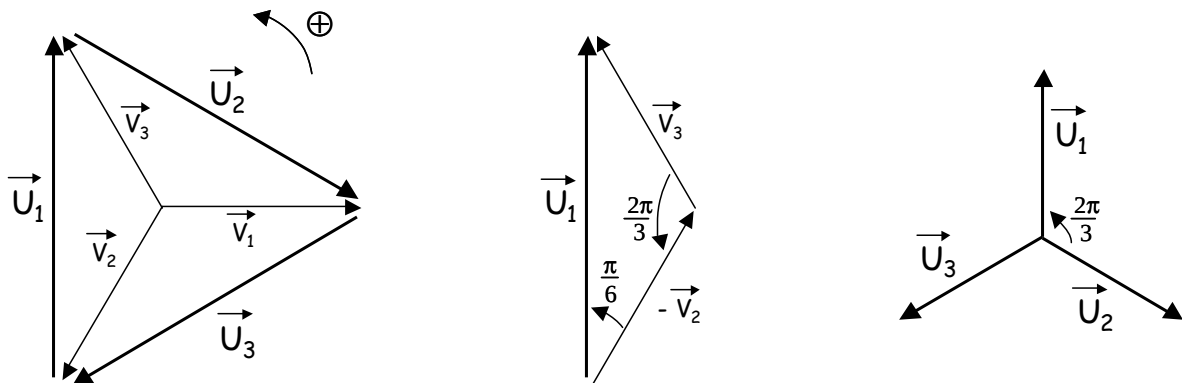
Les tensions  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  prises entre phase et neutre, c'est à dire par rapport à un point commun, sont appelées tensions simples. La plupart du temps les réseaux triphasés sont sans neutre (ou bien leur neutre n'est pas accessible) ; la mesure de la tension efficace est impossible à effectuer.

<sup>4</sup> On peut également montrer que quelque soit  $t$  :  $\cos(\omega t) + \cos(\omega t - 2\pi/3) + \cos(\omega t - 4\pi/3) = 0$

Une solution consiste alors à choisir une mesure des tensions entre les phases, on parle alors de **tensions composées**. Le schéma suivant précise la notation utilisée dans le cadre de ce cours :



Le tracé des vecteurs de Fresnel associés aux tensions composées ( cf. figure suivante ) permet de les exprimer.



On trouve

$$u_1 = U\sqrt{2}.\cos(\omega t + \pi/2)$$

$$u_2 = U\sqrt{2}.\cos(\omega t - \pi/6)$$

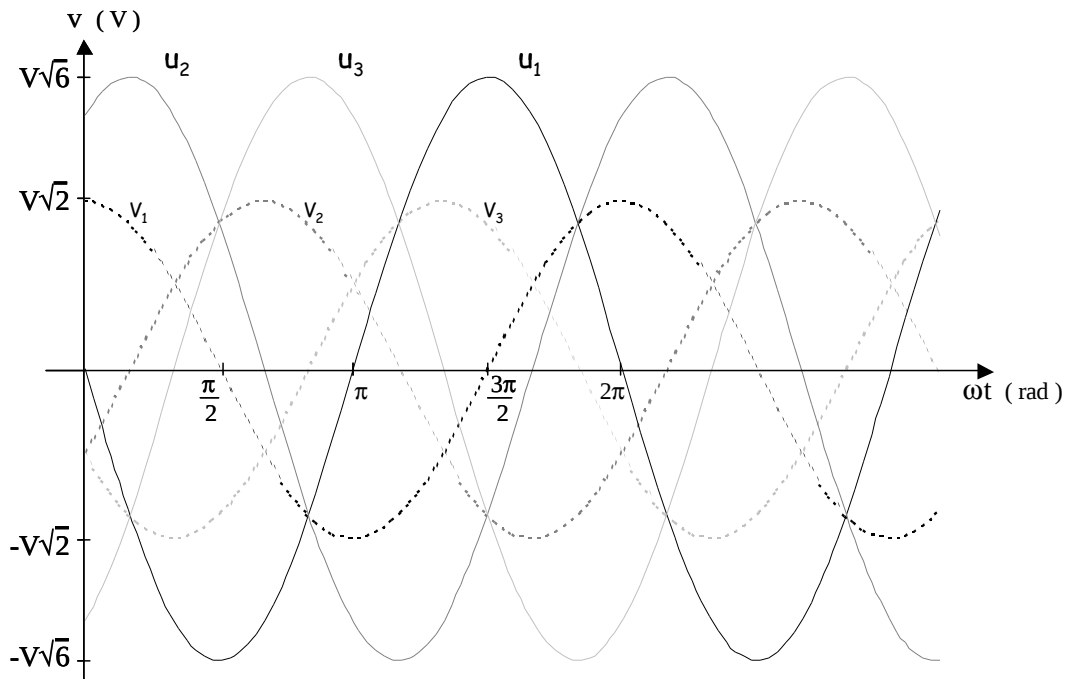
$$u_3 = U\sqrt{2}.\cos(\omega t + 7\pi/6)$$

$$\text{avec } U = 2V.\cos(\pi/6) = V\sqrt{3}$$

$$\text{Pour un même indice } k : \quad \underline{U}_k = j\sqrt{3} \underline{V}_k$$

Si le réseau est équilibré le système formé par les trois tensions composées choisies est équilibré et direct (on vérifie bien sur le troisième schéma ou par le calcul que  $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ ).

Le tracé des tensions composées est donné ci-dessous :

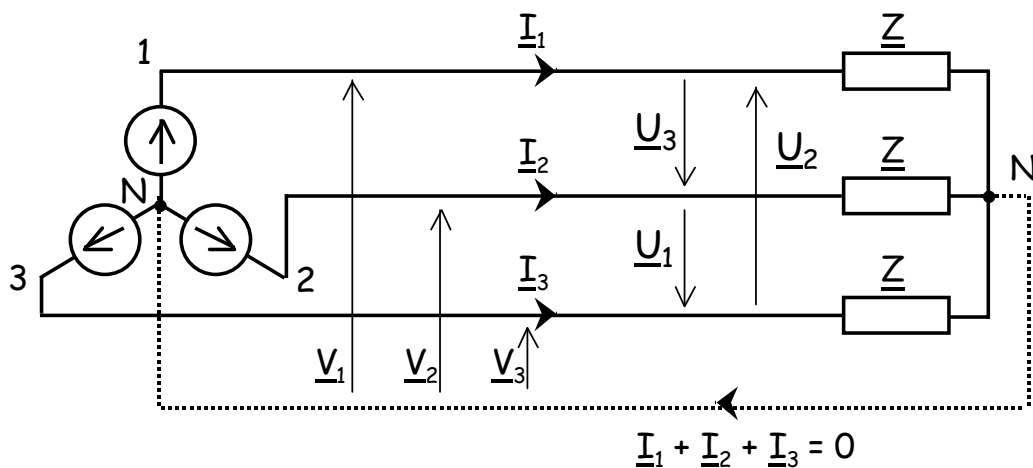


b. Modes de groupement des phases.

Dans cette partie on considère que les générateurs et récepteurs sont en régime équilibré.

**Couplage étoile – étoile (  $\star$  -  $\star$  ).**

Les trois générateurs de tension sont montés en étoile avec un point commun N et délivrent trois tensions sinusoïdales équilibrées  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$ . Ils sont reliés à trois impédances de charge identiques ( $Z$ ) montées en étoile autour du point commun N', via trois lignes numérotées 1, 2, 3 et une ligne neutre entre N et N' ( cf. schéma suivant ).



On note  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i_3$  les trois courants de ligne ; ces courants traversent les trois impédances de charge.

En régime équilibré le courant dans le neutre est nul ( $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ ), ce dernier peut donc être supprimé sans modifier le fonctionnement du montage (dessin en pointillés).

N et N' sont donc au même potentiel, qu'un neutre soit présent ou non.

Afin de simplifier l'étude des montages triphasés (et ce quelque soit le mode de couplage choisi) on essaiera de se ramener à un **schéma équivalent monophasé**. L'étude d'une seule phase est en effet suffisante, le comportement des deux autres étant identique à  $2\pi/3$  ou  $4\pi/3$  près.

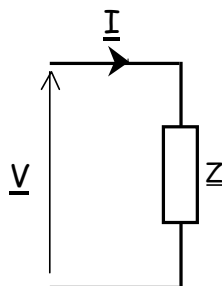
N et N' étant au même potentiel on peut écrire :

$$\underline{V}_1 = \underline{Z} \cdot \underline{I}_1$$

$$\underline{V}_2 = \underline{Z} \cdot \underline{I}_2$$

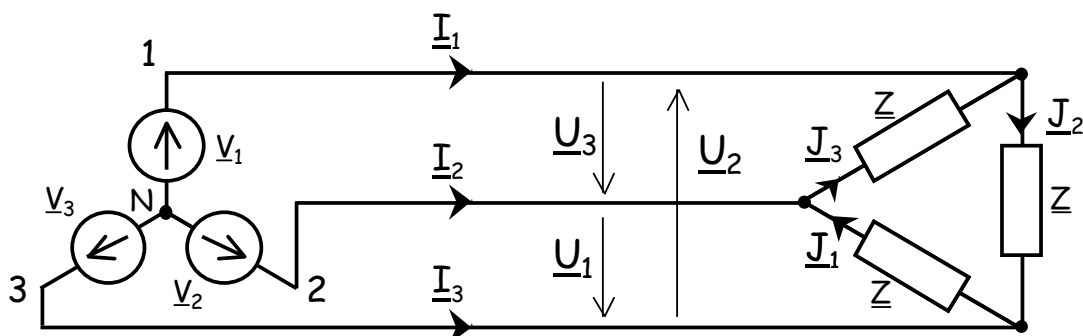
$$\underline{V}_3 = \underline{Z} \cdot \underline{I}_3$$

Ce qui conduit à un schéma monophasé équivalent extrêmement simple en posant  $\underline{V} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$  (cette relation s'applique aux trois phases aux déphasages près) :



**Couplage étoile – triangle** (  $\star$  -  $\triangle$  ).

Pour ce couplage les générateurs sont montés en étoile et les impédances de charge en triangle (c'est à dire en boucle de façon à former un triangle fermé relié par ses trois sommets aux trois lignes).



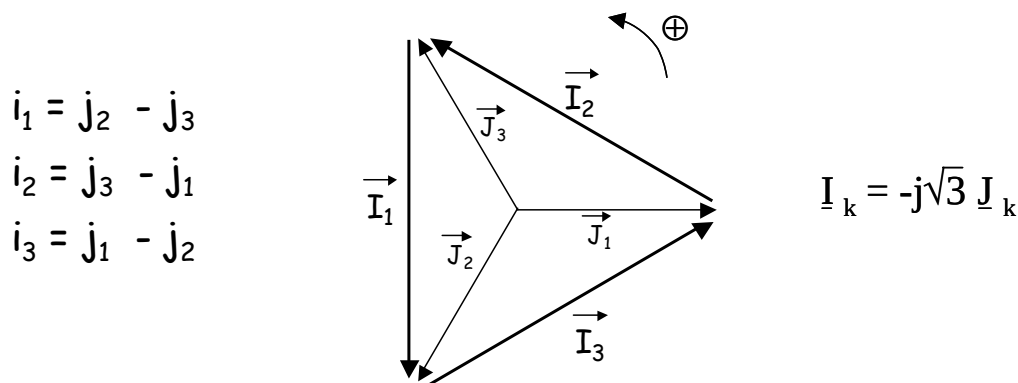
L'utilisation d'une charge en triangle ne permet pas l'existence d'un neutre.

On appelle  $j_1$ ,  $j_2$  et  $j_3$  les courants traversant les impédances de charge ( $j_k$  étant le courant traversant l'impédance ayant à ses bornes la tension composée  $u_k$ , son orientation est prise en convention récepteur).

On établit aisément :  $\underline{J}_k = \underline{U}_k / \underline{Z}$  <sup>5</sup>  $k = 1, 2, 3$

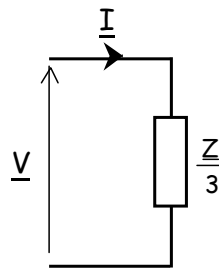
or on a vu  $\underline{U}_k = j\sqrt{3} \underline{V}_k$

et on établit de façon similaire à partir de la traduction vectorielle de la loi des nœuds ( cf. figure ci-dessous ) :  $\underline{I}_k = -j\sqrt{3} \underline{J}_k$



d'où  $\underline{I}_k = 3 \underline{V}_k / \underline{Z} = \underline{V}_k / (\underline{Z}/3)$

ce qui conduit au schéma équivalent monophasé suivant :



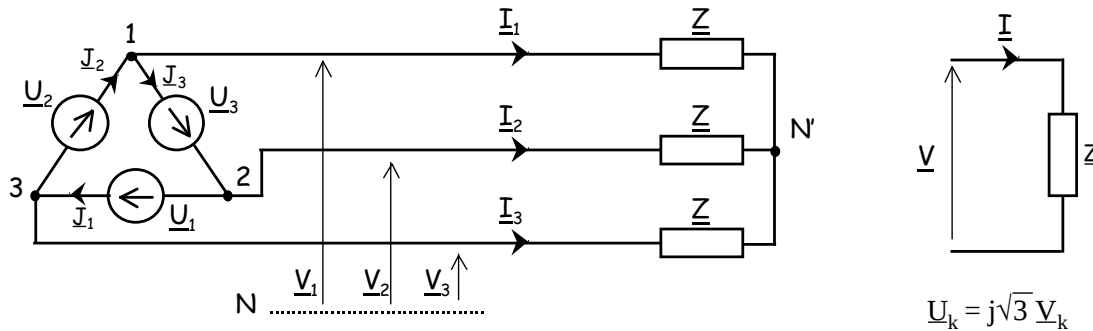
On retrouve ce résultat en utilisant la transformation de Kennelly (cf. annexe) qui consiste à substituer à la charge en triangle une charge équivalente en étoile d'impédances  $\underline{Z}/3$ .

<sup>5</sup> Les tensions composées formant un système équilibré direct ( $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ ), il en est de même pour les courants dans les charges ;  $j_1$ ,  $j_2$  et  $j_3$  forment un système équilibré direct tel que  $j_1 + j_2 + j_3 = 0$ .

### Couplage triangle – étoile ( $\triangle - \star$ ).

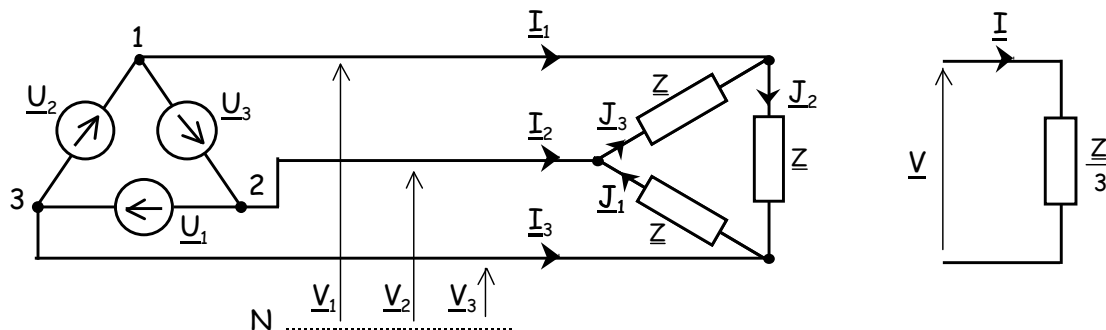
Les tensions composées associées à une source en triangle peuvent être exprimées par des tensions simples repérées par rapport à un point neutre **fictif** N, telles que  $\underline{U}_k = j\sqrt{3} \underline{V}_k$ .

On obtient le schéma équivalent monophasé simple de la figure suivante :



### Couplage triangle – triangle ( $\triangle - \triangle$ ).

A partir du mode de couplage triangle – triangle on se ramène au couplage triangle – étoile en utilisant la transformation de Kennelly ( la charge triangulaire est remplacée par une charge en étoile équivalente d'impédances  $\underline{Z}/3$  ). Ce qui conduit au schéma équivalent monophasé suivant :



### Impédance cyclique.

L'étude des modes de couplage précédente a été réalisée en supposant que les trois phases des réseaux étudiés n'avaient entre elles ni couplage inductif, ni couplage capacitif. En présence de couplages de ce type l'étude est bien plus complexe et l'on ne peut pas définir de schéma équivalent monophasé.

Cependant dans le cas où le montage est symétrique, on peut définir une impédance cyclique permettant de ramener le problème à l'étude d'une seule phase.

### Conclusion.

L'étude d'un réseau triphasé équilibré et symétrique en régime sinusoïdal s'effectue grâce au schéma équivalent monophasé. Ce dernier ne doit comporter que des tensions simples, des courants de ligne et des impédances (éventuellement cycliques) ramenées en étoile.

#### c. Puissance dans les systèmes triphasés.

En triphasé on considère les puissances relatives aux trois phases simultanément.

#### Puissance instantanée et puissance active.

En considérant les tensions simples  $v_1, v_2, v_3$  et les courants de ligne  $i_1, i_2, i_3$  on a comme expression de la puissance instantanée :

$$p = p_1 + p_2 + p_3$$

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 \quad (W)$$

en régime triphasé équilibré sinusoïdal et en choisissant de façon adéquate l'origine des phases on peut écrire :

$$\begin{aligned} v_1 &= V\sqrt{2}.\cos(\omega t) & i_1 &= I\sqrt{2}.\cos(\omega t + \varphi) \\ v_2 &= V\sqrt{2}.\cos(\omega t - 2\pi/3) & i_2 &= I\sqrt{2}.\cos(\omega t - 2\pi/3 + \varphi) \\ v_3 &= V\sqrt{2}.\cos(\omega t - 4\pi/3) & i_3 &= I\sqrt{2}.\cos(\omega t - 4\pi/3 + \varphi) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} p_1 &= VI.[\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi)] \\ p_2 &= VI.[\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi - 4\pi/3)] \\ p_3 &= VI.[\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi - 8\pi/3)] \end{aligned}$$

on obtient alors aisément l'expression de la puissance active :

$$P = \langle p \rangle = \langle p_1 + p_2 + p_3 \rangle = \langle p_1 \rangle + \langle p_2 \rangle + \langle p_3 \rangle$$

$$P = 3VI.\cos\varphi^6 \quad (W)$$

De plus, en regardant de plus près les expressions des puissances instantanées des trois phases et à partir de la relation trigonométrique :

$$\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(2\omega t + \varphi - 4\pi/3) + \cos(2\omega t + \varphi - 8\pi/3) = 0$$

on constate que :  $p = P = 3VI.\cos\varphi$ .

---

<sup>6</sup> ce résultat se démontre également à partir des produits scalaires des vecteurs de Fresnel associés aux  $v_k$  et  $i_k$ .

En régime triphasé sinusoïdal équilibré la puissance instantanée est constante et égale à la puissance active. C'est là l'un des grands intérêts du régime triphasé qui permet la réalisation de machines tournantes sans à coup de puissance (couple moteur constant).

On notera également qu'en régime équilibré les puissances actives consommées par chacune des trois phases sont égales.

On peut également exprimer la puissance active en fonction de la valeur efficace des tensions composées :

$$P = 3VI.\cos\varphi = \sqrt{3}UI.\cos\varphi \quad (W)$$

Cette dernière écriture doit cependant être manipulée avec prudence, le déphasage  $\varphi$  étant mesurée entre tension simple et courant de ligne.

### **Puissance réactive et puissance apparente.**

La puissance réactive globale est la somme des puissances réactives par phase ( théorème de Boucherot ), d'où les expressions en régime sinusoïdal équilibré :

$$Q = 3VI.\sin\varphi = \sqrt{3}UI.\sin\varphi \quad (VAR)$$

La puissance apparente en régime sinusoïdal est telle que :

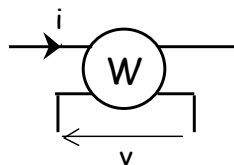
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\text{d'où } S = 3VI = \sqrt{3}UI \quad (VA)$$

### **d. Mesures de puissances en triphasé.**

#### **Le Wattmètre.**

En électrotechnique les mesures de puissance sont effectuées au moyen de wattmètres, dont le symbole est donné ci-après :



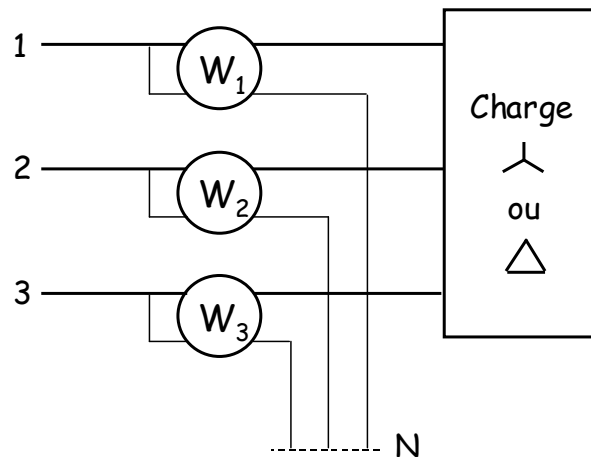
Cet appareil permet de mesurer la **puissance active** correspondant au courant  $i$  traversant son circuit courant et à la tension  $v$  aux bornes de son circuit tension.

L'indication donnée par le wattmètre est :

$$W = \langle v_i \rangle = \vec{V} \cdot \vec{I} \quad (W)$$

### Mesure de la puissance active consommée par une charge triphasée.

En régime sinusoïdal équilibré, la puissance active consommée par la charge peut être mesurée avec trois wattmètres montés comme le présente la figure suivante :



Ce montage est valable que la charge soit montée en étoile ou en triangle ; en l'absence de neutre il est constitué un neutre fictif.

On a :

$$W_1 = \langle v_1 i_1 \rangle$$

$$W_2 = \langle v_2 i_2 \rangle$$

$$W_3 = \langle v_3 i_3 \rangle$$

d'où :

$$W_1 + W_2 + W_3 = \langle v_1 i_1 \rangle + \langle v_2 i_2 \rangle + \langle v_3 i_3 \rangle = P$$

La puissance active est donnée par la somme des trois puissances actives mesurées par les wattmètres.

On démontre, de plus, que cette méthode de mesure est valide même dans le cas des régimes déséquilibrés.

Il existe des techniques plus "réfléchies", telle que la méthode des deux wattmètres par exemple, pour mesurer les puissances actives et réactives. Elles seront étudiées en travaux dirigés et en travaux pratiques.

### III. Transformateur monophasé.

#### III.1. Présentation des circuits magnétiques.

##### a. Rappels – Définitions.

##### Excitation magnétique – Champ magnétique.

On appelle **excitation magnétique** (ou également **champ magnétique**<sup>7</sup>) la grandeur vectorielle notée  $\vec{H}$  créée dans le vide par toute charge électrique en mouvement ou par un aimant permanent.

L'excitation magnétique s'exprime en ampère par mètre (  $A.m^{-1}$  ).

On rappelle l'équation de Maxwell – Ampère vérifiée par  $\vec{H}$  :

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j}$$

Et la relation de Stokes – Ampère :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

permettant de retrouver l'expression du théorème d'Ampère :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

##### Induction magnétique.

Dans un milieu magnétique soumis à une excitation magnétique on peut définir un vecteur **induction magnétique**<sup>7</sup>  $\vec{B}$  (exprimé en tesla, T).

Excitation et induction magnétiques sont liées par la relation :

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$\mu$  étant la perméabilité magnétique du milieu (exprimée en Henry par mètre,  $H.m^{-1}$ ).

Dans le vide on a  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , avec  $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} H.m^{-1}$  la perméabilité magnétique du vide.

Dans un milieu magnétique l'excitation magnétique induit une polarisation magnétique  $\vec{J}$  dont les effets s'ajoutent à ceux de  $\vec{H}$  pour créer l'induction magnétique  $\vec{B}$  telle que

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}$$

---

<sup>7</sup> De façon usuelle en physique on appelle  $\vec{B}$  le champ magnétique ; cette appellation n'est pas celle normalisée pour l'électrotechnique et utilisée dans ce cours. Cependant afin d'éviter de possibles confusions nous nous attacherons à appeler  $\vec{H}$  l'excitation magnétique et  $\vec{B}$  l'induction magnétique.

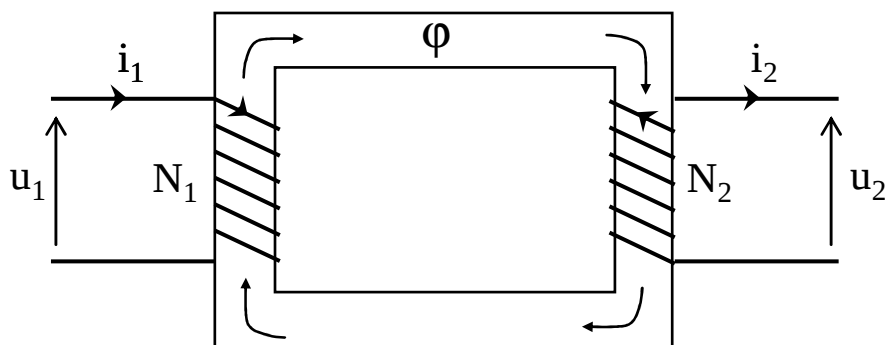
### III.2. Le transformateur parfait.

#### Principe du transformateur.

Un transformateur est un convertisseur statique (il ne comporte aucune partie mobile) permettant de transformer une tension sinusoïdale en une autre tension sinusoïdale de valeur efficace différente (et de même fréquence).

Il est constitué d'un circuit magnétique comportant deux bobinages : le primaire et le secondaire. Le primaire comporte  $N_1$  spires (l'indice 1 désignant par la suite toute les grandeurs au primaire, l'indice 2 les grandeurs au secondaire), il est alimenté par une tension sinusoïdale, il en résulte un flux sinusoïdal (cf. la bobine à noyau de fer) dans le circuit magnétique. Ce flux induit à son tour la création d'une force électromotrice sinusoïdale  $e_2$  au secondaire (enroulement comportant  $N_2$  spires). Cette f.e.m. permet d'alimenter une charge branchée aux bornes du secondaire ; ce dernier se comporte comme un générateur.

Le schéma de principe d'un transformateur est donné figure suivante :



Les tensions et courants sont orientées en utilisant la convention récepteur au primaire et la convention générateur au secondaire. Pour faciliter l'écriture des différentes équations les enroulements ont été dessinés en concordance avec le sens du flux.

#### Le transformateur parfait.

L'étude d'un transformateur "parfait", une pure vue de l'esprit, permet de simplifier l'étude du transformateur réel.

Le circuit magnétique d'un transformateur parfait est sans fuites et sans pertes énergétiques. Il est constitué avec un matériau ferromagnétique de perméabilité infinie ( $\mathfrak{R} = 0$ ) et les bobinages sont sans résistance ( $r_1 = r_2 = 0$ ).

On écrit les différentes équations vérifiées par le transformateur parfait :

La loi d'Hopkinson donne :  $N_1 i_1 + N_2 i_2 = \Re \phi = 0$  (1)

Au primaire (convention récepteur) :  $u_1 + e_1 = r_1 i_1$  avec  $r_1 = 0$

$$u_1 = -e_1 = N_1 \cdot d\phi/dt \quad (2)$$

Au secondaire (convention générateur) :  $-u_2 + e_2 = r_2 i_2$  avec  $r_2 = 0$

$$u_2 = e_2 = -N_2 \cdot d\phi/dt \quad (3)$$

D'après (1) on obtient :

$$i_2 / i_1 = - N_1 / N_2$$

et en combinant (2) et (3) :

$$u_2 / u_1 = - N_2 / N_1 = -m$$

avec  $m = N_2 / N_1$  le **rapport de transformation** du transformateur.

En considérant les valeurs efficaces on peut écrire :

$$U_2 / U_1 = N_2 / N_1 = m \quad \text{et} \quad I_2 / I_1 = N_1 / N_2 = 1 / m$$

Pour  $m > 1$  ( $m < 1$ ) il s'agit d'un transformateur élévateur ( abaisseur ) de tension.

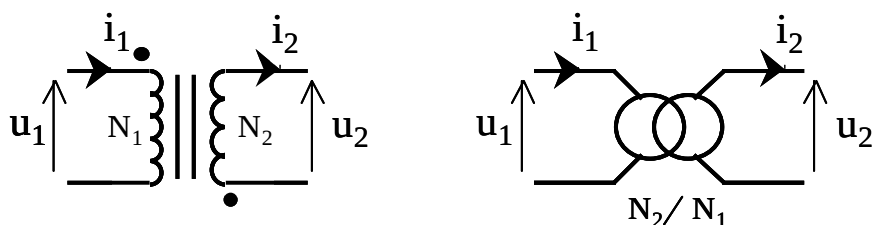
Les tensions ( et les courants ) au primaire et au secondaire sont en opposition de phase.

Pour un transformateur parfait :

$$P_1 = P_2 \quad Q_1 = Q_2 \quad \text{et} \quad S_1 = S_2$$

Un transformateur parfait permet de modifier les valeurs efficaces de la tension et du courant en conservant la puissance.

La figure suivante présente deux symboles couramment rencontrés pour représenter un transformateur parfait :



Sur le premier symbole les points portés sur les bobinages indiquent la borne d'entrée du courant pour obtenir des flux orientés dans le même sens.

Le deuxième symbole est représenté avec le rapport de transformation.

### Impédance ramenée au primaire – Adaptation d'impédance.

Si on considère un transformateur parfait dont le secondaire est chargé par une impédance complexe  $\underline{Z}_2$ , on peut écrire :

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2$$

d'où d'après  $\underline{I}_2 = -\underline{I}_1 / m$  et  $\underline{U}_2 = -m \cdot \underline{U}_1$

on obtient :

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 / m^2$$

Tout se passe comme si le générateur alimentant le primaire du transformateur était directement relié à une charge d'impédance  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 / m^2$ , c'est l'impédance ramenée au primaire.

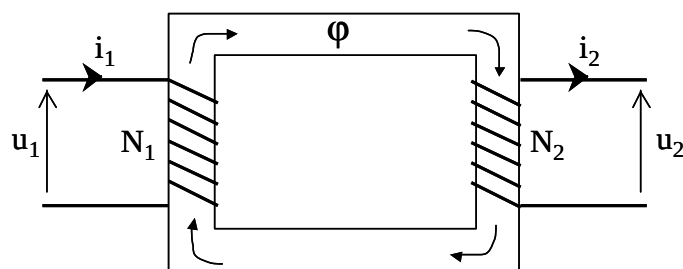
Cette propriété des transformateurs est parfois utilisée pour réaliser l'adaptation d'impédance en puissance d'un générateur avec une charge désadaptée.

### III.3. Le transformateur réel.

#### a. Schéma équivalent du transformateur réel.

Pour l'étude du transformateur réel on ne peut plus considérer un circuit magnétique parfait sans fuites de flux, il va falloir prendre en compte les pertes fer et les flux de fuite au niveau des enroulements. De même, on ne peut plus négliger les résistances d'enroulement.

D'après le schéma



on peut écrire au primaire :

$$u_1 + e_1 = r_1 i_1 \quad (\text{convention récepteur})$$

avec

$$e_1 = - d\phi_1 / dt \quad \phi_1 \text{ étant le flux total traversant les } N_1 \text{ spires de l'enroulement primaire}$$

En notant  $\phi_c$  le flux traversant le circuit magnétique et commun aux deux enroulements, et  $\phi_{f1}$  le flux de fuite on a

$$\phi_1 = N_1 \cdot \phi_c + \phi_{f1}$$

D'où :  $u_1 = r_1 i_1 - e_1$

$$u_1 = r_1 i_1 + d\phi_1/dt = r_1 i_1 + N_1 \cdot d\phi_c/dt + d\phi_{f1}/dt$$

On notera  $\phi_{f1} = l_1 i_1$  avec  $l_1$  l'inductance de fuite du primaire, on a alors :

$$\mathbf{u_1 = u_1' + r_1 i_1 + l_1 \cdot di_1/dt \quad (4)} \quad \text{avec } u_1' = N_1 \cdot d\phi_c/dt$$

Au secondaire :

$$-u_2 + e_2 = r_2 i_2 \quad (\text{convention générateur})$$

avec

$e_2 = -d\phi_2/dt$   $\phi_2$  étant le flux total traversant les  $N_2$  spires de l'enroulement secondaire de façon similaire

$$\phi_2 = N_2 \cdot \phi_c + \phi_{f2} \quad \text{avec } \phi_{f2} = l_2 i_2 \quad l_2 \text{ inductance de fuite du secondaire}$$

d'où on obtient finalement :

$$\mathbf{u_2 = u_2' - r_2 i_2 - l_2 \cdot di_2/dt \quad (5)} \quad \text{avec } u_2' = -N_2 \cdot d\phi_c/dt$$

La loi d'Hopkinson donne

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = \mathfrak{R} \phi_c$$

En considérant qu'au fonctionnement nominal du transformateur la chute de tension au primaire due à  $r_1$  et  $l_1$  est faible devant  $u_1$  (hypothèse de Kapp) on a  $u_1 \approx N_1 \cdot d\phi_c/dt$  donc on est dans le cas d'un flux forcé, c'est à dire quasiment indépendant de la charge du transformateur. On peut considérer que le flux est le même quelle que soit la charge, y compris s'il est à vide.

Or à vide  $i_2 = 0$ , d'où

$$N_1 i_{10} = \mathfrak{R} \phi_c \quad \text{avec } i_{10} \text{ courant magnétisant}$$

C'est ce courant magnétisant  $i_{10}$ , qui est à l'origine des pertes fer.

Si on remplace ce résultat dans la première expression de la loi d'Hopkinson, on obtient :

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = N_1 i_{10}$$

soit

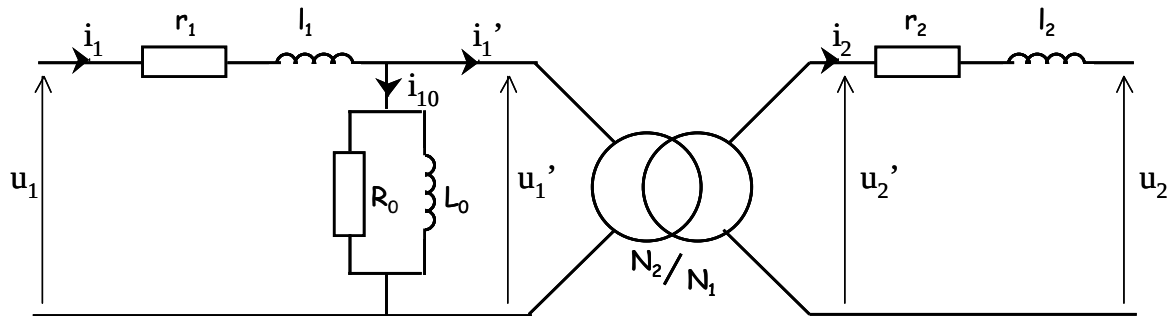
$$\mathbf{N_1 \cdot (i_1 - i_{10}) + N_2 i_2 = 0 \quad (6)}$$

Si on considère l'équation ( 6 ) et le fait que  $u_2' / u_1' = -m$  on peut construire le cœur d'un schéma équivalent du transformateur réel avec un transformateur parfait de rapport de transformation  $m = N_2 / N_1$ .

Les équation ( 4 ) et ( 5 ) permettant de compléter le schéma avec les résistance d'enroulement et les inductances de fuite ; et le courant de magnétisation étant absorbé par le schéma

équivalent de la bobine à noyau de fer permettant de modéliser les pertes fer du circuit magnétique.

On obtient le schéma équivalent du transformateur réel donné figure suivante :

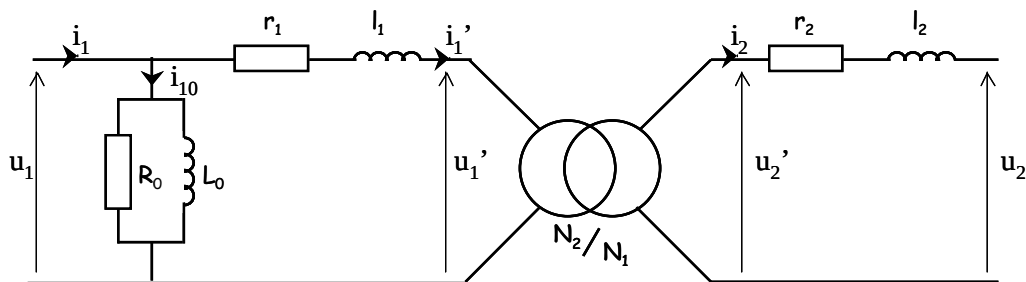


Cependant c'est un schéma compliqué à manipuler, en particulier on a du mal à déterminer  $l_1$  et  $l_2$ . D'où l'intérêt de disposer de schémas simplifiés.

#### b. Schémas simplifiés.

##### 1<sup>er</sup> schéma simplifié.

Le courant magnétisant est généralement faible devant  $i_1$  et la chute de tension dans  $r_1$  et  $l_1$  négligeable. On considère que l'on peut déplacer  $R_0$  et  $L_0$  devant  $r_1$  et  $l_1$  sans modifier significativement le modèle précédent :



##### **Impédances ramenée au secondaire.**

A partir des équations du schéma précédent

$$u_1 = r_1 i_1' + l_1 \frac{di_1'}{dt} + N_1 \frac{d\phi_c}{dt}$$

$$-u_2 = r_2 i_2 + l_2 \frac{di_2}{dt} + N_2 \frac{d\phi_c}{dt}$$

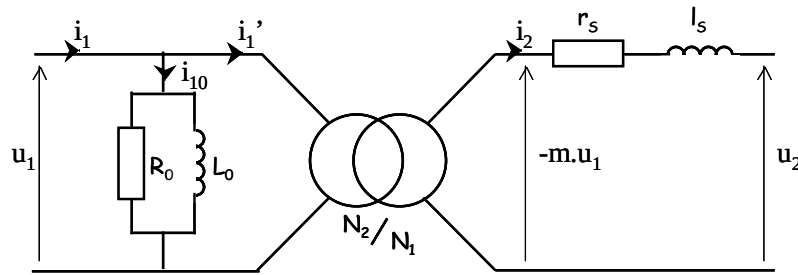
on obtient :

$$N_2 u_1 + N_1 u_2 = N_2 (r_1 i_1' + N_1 l_1 \frac{di_1'}{dt}) - N_1 (r_2 i_2 + N_2 l_2 \frac{di_2}{dt})$$

On divise par  $N_1$  et on exploite le fait que  $i_1' = -m \cdot i_2$  :

$$m.u_1 + u_2 + (r_2 + m^2.r_1).i_2 + (l_2 + m^2.l_1).di_2/dt = 0$$

On obtient alors un schéma simplifié avec les impédances ramenées au secondaire :



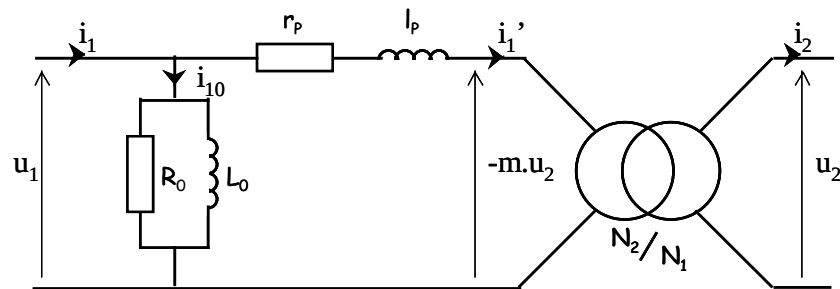
tel que :

$$r_s = r_2 + m^2.r_1$$

$$l_s = l_2 + m^2.l_1$$

### Impédances ramenée au primaire.

De façon similaire on obtient un schéma simplifié avec les impédances ramenées au primaire :



avec :

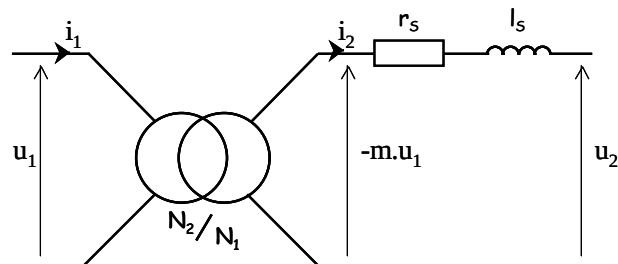
$$r_p = r_1 + r_2 / m^2$$

$$l_p = l_1 + l_2 / m^2$$

### Schéma simplifié dans le cadre de l'approximation de Kapp.

En considérant  $I_{10} \ll I_1$  on peut remplacer la bobine fictive magnétisante modélisée par  $R_0$  et  $L_0$  par un circuit ouvert sans conséquence sur l'intensité  $I_1$ .

On a alors le schéma simplifié suivant :



en considérant les impédances ramenée au secondaire.

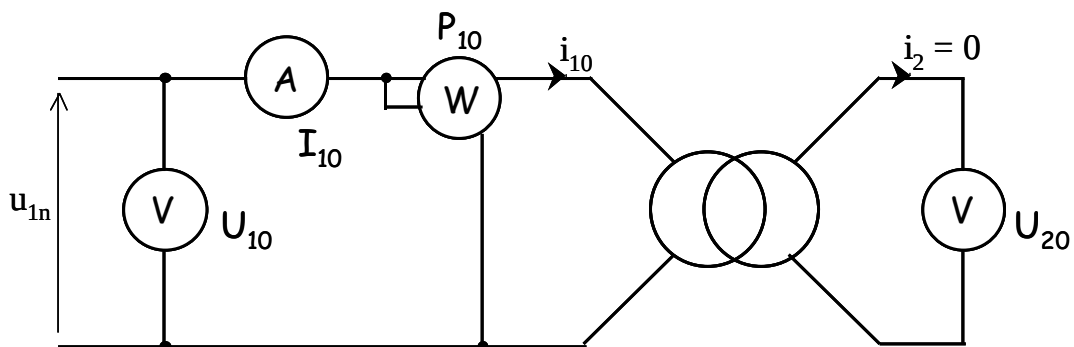
On obtient un schéma similaire en ramenant les impédances au primaire.

c. Détermination des éléments du schéma électrique équivalent du transformateur réel.

Un transformateur est conçu pour fonctionner de façon optimale à une tension nominale et un courant nominal donnés, ces valeurs sont inscrites sur sa plaque d'identification.

**Essai à vide.**

Cet essai s'effectue sous tension nominale, le secondaire étant en circuit ouvert (cf. figure suivante).



Cet essai permet de déterminer le rapport de transformation du transformateur :

$$m = U_{20} / U_{10} = N_2 / N_1$$

Il n'y a pas de puissance consommée au secondaire ( $i_2 = 0 \Rightarrow P_2 = 0$ ), la puissance mesurée par le wattmètre correspond aux pertes joules au primaire et aux pertes fer :

$$P_{10} = P_{J10} + P_{\text{fer}}$$

Or à vide  $I_{10}$  est très faible (le courant magnétisant est de l'ordre du dixième du courant nominal), on peut donc négliger les pertes joule par rapport aux pertes fer :

$$P_{10} \approx P_{\text{fer}} \quad \text{L'essai à vide permet de mesurer les pertes fer.}$$

Dans le cadre de l'approximation choisie la puissance active est consommée dans  $R_0$  :

$$R_0 = U_{10}^2 / P_{10}$$

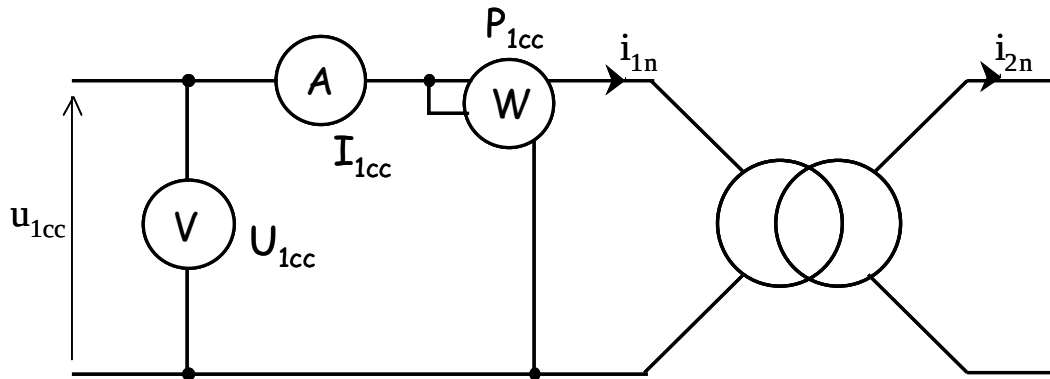
On définit la puissance réactive au sens de Kapp  $Q_K = \sqrt{S^2 - P_{10}^2}$  d'où

$$L_0 \cdot \omega = U_{10}^2 / Q_K = U_{10}^2 / \sqrt{U_{10}^2 I_{10}^2 - P_{10}^2}$$

Cet essai permet également de déterminer le courant magnétisant.

### Essai en court - circuit.

L'essai en court – circuit est réalisé avec le secondaire branché en court – circuit, au courant nominal et sous tension réduite (cet essai s'effectue sans appareil de mesure au secondaire, cf. figure suivante).



Dans cet essai également la puissance active fournie au secondaire est nulle ( $u_2 = 0 \Rightarrow P_2 = 0$ ), la puissance active mesurée au primaire correspond donc aux pertes fer et aux pertes joules au primaire et au secondaire :

$$P_{1cc} = P_{J1cc} + P_{fer} + P_{J2cc}$$

$U_{1cc}$  étant faible, on peut généralement négliger les pertes fer :

$$P_{1cc} = P_{J1cc} + P_{J2cc} \quad \text{L'essai en CC permet de mesurer les pertes joules.}$$

Si on considère les impédances ramenées au secondaire, on a :

$$P_{1cc} = r_s \cdot I_{2cc}^2$$

d'où  $r_s = P_{1cc} / I_{2cc}^2 = m^2 \cdot P_{1cc} / I_{1cc}^2$  ( $I_{1cc}$  courant mesuré au primaire)

Si on considère le module de l'impédance totale ramenée au secondaire on a :

$$Z_s = m^2 \cdot U_{1cc} / I_{1cc}$$

$$\text{d'où } l_s \cdot \omega = \sqrt{Z_s^2 - r_s^2}$$

### Essai en charge - Chute de tension en charge.

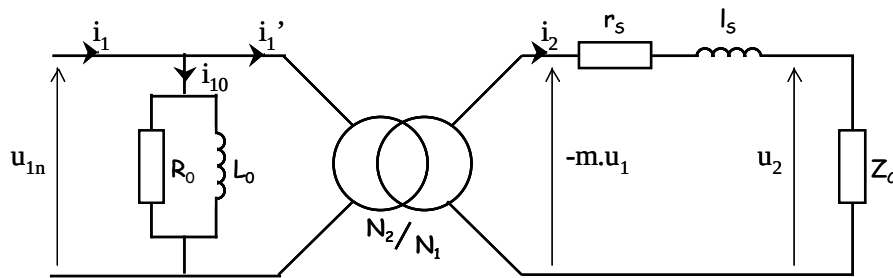
On choisit l'impédance de charge,  $Z_C$ , telle que le transformateur fonctionne aux conditions nominales de tension et de courant.

On définit la chute de tension  $\delta U_2$  comme la différence des tensions secondaires à vide et en charge :

$$\delta U_2 = U_{20} - U_2$$

En considérant le modèle du transformateur réel avec les impédances ramenées au secondaire (cf. figure ci-dessous) on peut écrire :

$$-m.\underline{U}_1 = r_s.\underline{I}_2 + j l_s \omega .\underline{I}_2 + \underline{U}_2$$

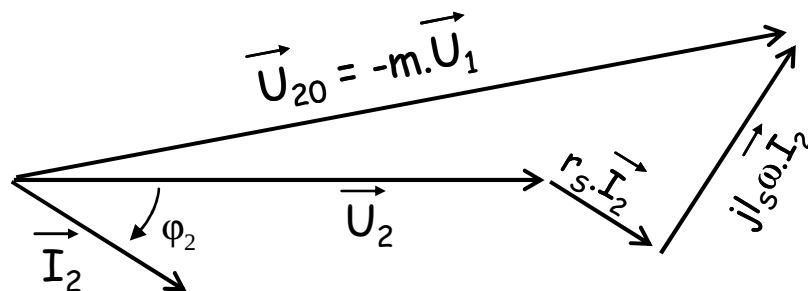


La tension au secondaire du transformateur parfait du modèle ( $-m.u_1$ ) correspond à la tension à vide mesurée sous la même tension primaire nominale ( $U_{20}$ ), d'où :

$$-m.\underline{U}_1 = \underline{U}_{20}$$

soit  $\underline{U}_{20} = r_s.\underline{I}_2 + j l_s \omega .\underline{I}_2 + \underline{U}_2$

On obtient le diagramme de Fresnel suivant :



qui conduit à :

$$\delta U_2 \approx r_s I_2 .\cos \varphi_2 + l_s \omega I_2 .\sin \varphi_2$$

L'essai en charge étant effectué aux conditions nominales il est possible de calculer le **rendement du transformateur** :

$$\eta = P_2 / P_1$$

avec  $P_2 = P_1 - P_{10} - P_{1cc}$

$P_1$  puissance active mesurée au primaire,

$P_{10}$  puissance active mesurée au primaire lors de l'essai à vide (pertes fer),

$P_{1cc}$  puissance active mesurée au primaire lors de l'essai en CC (pertes joules).