

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI-BEL-ABBES

Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique

Asservissement et Régulation
(Cours et Travaux dirigés avec corrections)

Niveaux : Licences et Masters

Options et spécialités :

- ❖ Energétique
- ❖ Energie renouvelable
- ❖ Mécatronique
- ❖ Systèmes Industriels
- ❖ Construction mécanique
- ❖ Optimisation des systèmes de production

Polycopié préparé et enseigné par :
Mme BENINE née MOULAY Fatima
Maitre de conférences A

(2021/2022)

Table des matières

1	Introduction sur les Asservissements Continus Linéaires	1
1.1	Objectif	1
1.2	Historique.....	1
1.3	Généralités sur les systèmes	1
1.4	Système de commande.....	2
1.5	Systèmes continus.....	2
1.6	Systèmes linéaires.....	2
1.7	Nature des signaux d'entrée et de sortie	2
1.8	Un signal d'entrée.....	2
1.9	Signal de sortie.....	2
1.10	Définition des systèmes à boucles fermées et à boucles ouvertes	2
1.11	Définition d'un système asservi.....	3
1.12	Définition d'un système de régulation.....	3
1.13	Système asservis régulés.....	3
1.14	Conclusion	3
2	Systèmes linéaires et transformation de Laplace	4
2.1	Définitions	4
2.2	Transformée de Laplace.....	4
2.3	Propriétés de la Transformation de Laplace	4
2.4	L'inversion de la transformation de Laplace	5
2.5	Transformées des fonctions usuelles	5
2.6	Table élémentaire de transformées de Laplace	6
2.7	Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.....	7
3	Fonctions de Transfert et Blocs de Diagrammes	9
3.1	Introduction.....	9
3.2	Fonction de transfert des systèmes linéaires.....	9
3.3	Schéma fonctionnel d'un système linéaire	9
3.4	Fonction de transfert en boucle ouverte.....	10
3.5	Fonction de transfert en boucle fermée.....	10
3.6	Schéma fonctionnel d'une commande de vitesse	10
3.7	Schéma fonctionnel d'une commande de position	11
3.8	Simplifications des schémas fonctionnels.	11
3.8.1	Eléments en cascades ou série.	11
3.8.2	Eléments en Parallèle.	12
3.8.3	Elimination d'une boucle de retour.....	12
3.8.4	Déplacement d'un comparateur soit en amont ou en aval d'un autre élément.12	

3.8.5	Déplacement d'un comparateur par rapport à un autre.....	12
3.8.6	Déplacement d'un point de dérivation soit en amont ou en aval d'un autre élément.	12
3.9	Exemples.....	13
4	Etude d'un système asservi du premier ordre	16
4.1	Définition et fonction de transfert.....	16
4.2	Exemples.....	16
4.3	Réponses du système aux différents signaux d'entrées	16
4.3.1	Réponse à une impulsion de Dirac.....	16
4.3.2	Réponse à un échelon unitaire	17
4.3.3	Réponse à une rampe	17
4.3.4	Réponse Harmonique.....	18
5	Etude d'un système asservi du second ordre	19
5.1.	Définition et fonction de transfert	19
5.2.	Exemples	20
5.3.	Réponses du système aux différent signaux d'entées.....	20
5.3.1.	Réponse à une impulsion unité	20
	Programme Matlab, réponse à une impulsion de Dirac.....	20
5.3.2.	Réponse à une entrée échelon	21
5.3.3.	Réponse Harmonique.....	23
6	Diagrammes de BODE et NYQUIST des systèmes asservis.....	24
6.1.	Introduction.....	24
6.2.	Diagramme de BODE.....	24
6.1	Diagramme de Nyquist	29
7	Etude de la stabilité des systèmes asservis	30
7.1	Définition de la stabilité.....	30
7.2 :	Condition de la stabilité	30
7.3 :	Critères algébriques de stabilité d'Hurwitz :	31
7.4 :	Critères algébriques de stabilité de Routh:	32
7.5 :	Critères géométriques de stabilité de Nyquist:	34
7.6	Critères géométriques de stabilité de Bode.....	35
8	Etude de la précision des systèmes asservis	36
8.1	Introduction.....	36
8.2	Définition de la précision.....	36
8.3	La précision statique	37
8.4	La précision dynamique.....	39
9	Analyse et synthèse des systèmes asservis linéaires.....	41
9.1	Introduction.....	41
9.2	Analyse et Synthèse des Systèmes Asservis par l'Abaque Nichols-Black.....	41

9.2.1	Analyse par l'Abaque Nichols-Black	41
9.2.2	Présentation des abaques de Nichols-Black.....	41
9.2.3	Utilisation des abaques	42
9.3	Analyse et Synthèse des Systèmes Asservis par la méthode des Lieux de Pôles	42
9.4	Analyse et Synthèse des Systèmes Asservis Linéaire par la Méthode Temporelle...	43
9.4.1	Rapidité d'un système asservi.....	43
9.4.2	Application sur le système de 2 ^{ème} ordre	44
9.4.3	Critère algébrique d'amortissement : Critère de Naslin	45
9.4.4	Précision d'un système asservi	47
10	Correction des systèmes asservis	48
10.1.	Introduction.....	48
10.2.	Le but de la correction	48
10.3.	Structure des correcteurs.....	48
10.3.1.	Fonctions de transfert des correcteurs	48
10.3.2.	Structure de la commande.....	48
10.4.	Correction série.....	49
10.4.1.	-Intérêts et réglage	49
10.4.2.	Exemples de synthèse de correcteurs dans le domaine temporel et fréquentiel	49
10.5.	Méthodes empiriques de réglage des correcteurs	51
10.5.1.	Méthode de Ziegler-Nichols	51
10.5.2.	Autres méthodes de réglage simplifié.....	53
10.6.	Exemple de système non corrigé et corrigé.....	54
10.7.	Correction parallèle.....	55

Avant-propos

Ce document s'adresse aux étudiants de la formation des licences des différentes spécialités, énergétique, construction mécanique, mécanique industrielle, systèmes industriels, électronique, électrotechnique, automatisme, informatique et des masters énergétique, énergie renouvelable, mécatroniques et optimisation des systèmes de production, dans le cadre du programme officiel.

L'objectif attendu de ce module, est de maîtriser les bases d'étude des systèmes asservis et de régulation qui est une discipline technique destinée à analyser et à concevoir des systèmes de commande pratiques et d'autres dispositifs technologiques. et les objectifs attendus de ce polycopié est d'aider l'étudiant à se familiariser avec les organes de contrôle, le principe de commande et la régulation, l'analyse et la synthèse des systèmes asservis, en plus d'une batterie de fiches de travaux dirigées avec corrections pour approfondir la compréhension du cours.

Ce polycopié a été réalisé dans le but de pouvoir assurer un enseignement relativement uniforme et cohérent et dans un but didactique, afin d'essayer d'en dégager les idées essentielles, simplifiées, ainsi que les grandes bases assignées à ce module.

Chapitre 1

1 Introduction sur les Asservissements Continus Linéaires

1.1 Objectif

L'objectif de ce chapitre est de permettre à l'étudiant d'identifier les mots clés de ce module et de comprendre leurs utilités et leurs fonctions.

1.2 Historique

L'automatisation qui a fait depuis plusieurs décennies des progrès constants, se trouve de plus en plus liée aux techniques numériques, informatiques et électroniques. Le contrôle ou commande des procédés, qu'ils soient continus ou discontinus, fut d'abord numérique puis pneumatiques et enfin électronique.

Parallèlement se différenciait le concept d'organe de contrôle de celui d'organe de réglage, c'est cette séparation des fonctions de contrôle et de réglage qui a conduit, quand les technologies l'ont permis à éloigner les organes de contrôle des procédés physiques et les concentrer en des lieux plus favorables à leurs fonctionnement, c'est le début des salles de contrôle.

1.3 Généralités sur les systèmes

On entend par système un dispositif isolé soumis aux lois de la physique et caractérisé par certaines grandeurs. Dans le système à une variable, on s'intéresse à la relation entre une grandeur particulière ou l'entrée principale $e(t)$, correspondant à une action extérieure s'exerçant sur le système et une des grandeurs de sortie caractérisant son état que l'on désigne par $s(t)$.

L'application au système des lois de la physique conduit à l'établissement d'une certaine relation entre $e(t)$ et $s(t)$. Les autres grandeurs qui possèdent une action sur le système et qui sont susceptibles par conséquent de modifier la relation existante entre $e(t)$ et $s(t)$, sont appelées entrées parasites ou perturbations.

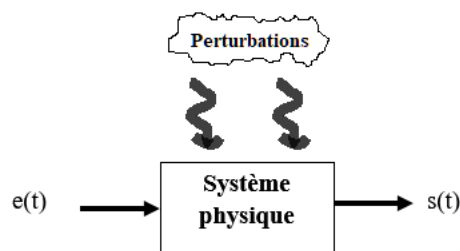


Figure. 1-1: Schéma d'un système

On représente symboliquement la relation entre l'entrée et la sortie par le système de la Figure. 1-1, c'est à dire par un dipôle dans lequel le système physique est représenté par un carré.

En fait, l'action extérieure $e(t)$ correspond à l'application au système d'une certaine énergie, caractérisée par deux composantes (tension ou intensité) pour un signal électronique, vitesse et force, pour un signal mécanique, pression et débit pour un signal pneumatique ou hydraulique, etc...

1.4 Système de commande

Un système de commande est un assemblage de constituants physiques branchés ou reliés les uns aux autres de telle sorte qu'ils puissent se commander, se diriger ou se régler par lui-même ; ou bien commander, diriger ou réguler un autre système.

La notion de commande est assez intuitive et peut être définie au moyen de quelques exemples simples lorsqu'une manivelle est reliée à un arbre par un train d'engrenage, on dit que la position de la manivelle, commande celle de la pince mécanique.

Si le courant inducteur d'un moteur électrique à excitation séparée est ajusté au moyen d'un interrupteur ; dans les deux exemples cités le mot « commande » indique qu'il existe une relation précise entre l'entrée (câble de la manivelle et la position du potentiomètre) et la sortie (c.-à-d., le câblage de la pince mécanique et le régime de fonctionnement du moteur).

1.5 Systèmes continus

Un système physique est dit continu si toutes les grandeurs caractéristiques sont de nature continue, l'information qui représente ces grandeurs est disponible à chaque instant et peut prendre toutes les valeurs possibles entre deux limites.

Leurs évolutions dans le temps est un signal continu au sens mathématique du terme.

On peut donc définir les systèmes, continus par opposition aux systèmes discrets, en temps ou en amplitude qui sont échantillonnés, quantifiés, logiques et séquentiels.

1.6 Systèmes linéaires

Un système physique est linéaire si la relation entre les grandeurs, d'entrée et la ou les grandeurs de sortie est un système d'équation différentielle linéaire.

1.7 Nature des signaux d'entrée et de sortie

Les signaux d'entrées et de sorties d'un système sont des fonctions, du temps : si à chaque instant leurs amplitudes est parfaitement connue, le signal est dit déterministe (exemple : échelon unitaire, sinusoïde, etc..).

Si par contre, à chaque instant, on ne connaît que la probabilité pour le signal d'avoir telle ou telle amplitude, on dit que celui-ci est aléatoire (ex : bruit).

1.8 Un signal d'entrée

On appelle signal d'entrée, l'excitation en stimulus appliqué au système de commande à partir d'une source d'énergie extérieure, en générale afin d'y provoquer une réponse spécifique.

1.9 Signal de sortie

On appelle un signal de sortie la réponse effective obtenue à partir du système de commande, elle peut coïncider ou non avec la réponse que doit normalement provoquer le signal d'entrée.

1.10 Définition des systèmes à boucles fermées et à boucles ouvertes

Les systèmes de commandes entrent dans deux catégories générales, les systèmes en boucle ouverte et les systèmes en boucles fermées.

Définition 1 : un système de commande en BO est un système où le signal de commande est indépendant du signal de sortie.

Définition 2 : un système de commande en BF est un système où le signal de commande dépend d'une façon ou d'une autre du signal de sortie.

1.11 Définition d'un système asservi

Un système asservi est un système de réglage, le mot asservi est pris dans le sens de réglage, commander, ou régler, commander un autre système. Un système asservi est défini par sa finalité et il est caractériser par deux chaines.

- **Chaines directes**, ou d'actions, ou de puissance. Elles comprennent des éléments amplificateurs et éventuellement des convertisseurs de puissance, en liaison avec la source d'énergie.
- **Les chaines de réactions** ou de retour ou d'asservissement. Elles sont constituées d'éléments de précision généralement passifs ; ce ne sont pas des chaines de puissances, elles transmettent à l'entrée des informations sur les grandeurs de sorties. Ces informations sont comparées aux signaux d'entrés au moyen de compensateurs.

1.12 Définition d'un système de régulation

Un système de régulation est un système capable de maintenir une variable déterminée constante et égale à une valeur, dite de consigne, sans intervention humaine (ex : régulation de la température d'un four).

1.13 Système asservis régulés

La régulation permet de maintenir une grandeur physique à une valeur constante quelques soient les perturbations extérieures. L'objectif global de la régulation peut se résumer par ces trois mots clefs : Mesurer, Comparer et Corriger.

Nous sommes donc amenés à effectuer des mesures pour obtenir certaines connaissances avant d'entreprendre une action. Ces mesures seront obtenues par l'intermédiaire d'appareillages spécifiques.

Et c'est donc faire varier une grandeur déterminée suivant une loi imposée pour un élément de comparaison, ex : régulation de la vitesse d'un moteur.

1.14 Conclusion

Tout asservissement comporte 3 tâches : mesurer, comparer et agir.

- **Mesure** : ou observation
- **Comparaison** entre le but à atteindre et la position actuelle (réflexion)
- **Action** de puissance

Tout asservissement comprend une chaine d'action, une chaine de retour et un comparateur.

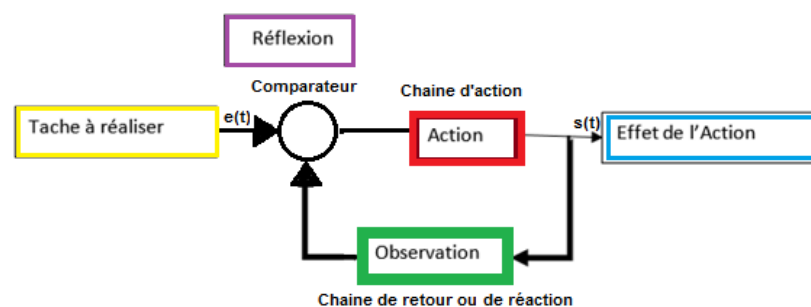


Figure 1-1 : Concept général d'un asservissement

Chapitre 2

2 Systèmes linéaires et transformation de Laplace

2.1 Définitions

Un système linéaire, est pour lequel la relation entre la grandeur d'entrée et de sortie est un système d'équations différentielles linéaires à coefficients réels constants.

Considérons un système linéaire quelconque A, le plus général possible, possédant une entrée $e(t)$ et une sortie $s(t)$ (Figure 2.1).

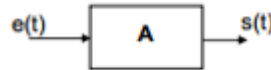


Figure 2-1 : Représentation d'un système à une entrée et une sortie

Si on applique un signal à l'entrée, on recueillera, à la sortie, un signal qui sera lié au signal d'entrée par une équation différentielle de type :

$$B_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + B_1 \frac{ds(t)}{dt} + B_0 s(t) = A_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + A_1 \frac{de(t)}{dt} + A_0 e(t)$$

Avec : $n \geq m$

Les coefficients A_i et B_j sont les paramètres du système et ils sont censés être connus, ce qui est le cas dans la pratique pour la plupart des systèmes courants. Ils représentent diverses constantes de temps et divers coefficients de proportionnalité accessibles à la mesure.

- La difficulté de la mise en équation réside surtout au niveau de la connaissance du processus lui-même. En réalité, l'équation différentielle à laquelle on arrive n'est souvent qu'une approximation qui consiste à négliger des termes d'ordre plus élevé. Cette précision suffit dans la plupart des cas, bien qu'une étude plus poussée soit quelque fois nécessaire.
- Une fois l'équation du système établie, il faut exprimer la valeur de la sortie en fonction du temps pour connaître les régimes permanents et transitoires.

2.2 Transformée de Laplace

Définition de la transformation de Laplace : C'est un outil qui permet de remplacer une équation différentielle par une expression algébrique.

En automatique, elle permet un développement simple des modèles entrées-sorties continus et une analyse qualitative directe de l'influence de variables externes sur un système (procédé).

On associe à la fonction $f(t)$ de la variable t , une autre fonction (p) de la variable complexe p appelée transformée de Laplace ainsi définie par :

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (1)$$

En supposant que le signal (t) est nul pour $t < 0$ (signal causal). On parle donc de transformée de Laplace monolatère Le symbole L se lit 'l'opérateur de la transformée de Laplace

2.3 Propriétés de la Transformation de Laplace

- Somme de deux fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ transformables :

$$L(f_1(t)) = F_1(p) \text{ et } L(f_2(t)) = F_2(p) \Rightarrow L(f_1(t) + f_2(t)) = F_1(p) + F_2(p)$$

- Linéarité

$$\text{Si } f(t) = af_1(t) + bf_2(t) \Rightarrow F(p) = aF_1(p) + bF_2(p)$$

- Dérivée :

$$\text{Si } \mathcal{L}(f(t)) = F(p) \text{ et } \mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = F'(p) \text{ alors } F'(p) = pF(p) \Rightarrow \mathcal{L}\frac{d}{dt} = p$$

- L'intégral :

En supposant que la condition initiale est nulle $f(0)=0$

$$\text{Si } f(t) = \int f'(t)dt \text{ et } F(p) = \frac{1}{p}F'(p) \text{ d'après la propriété de dérivée} \Rightarrow \mathcal{L}\int = \frac{1}{p}$$

- Théorème de la valeur initiale :

$$f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)$$

- Théorème de la valeur finale :

$$f(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

- Transformée d'un produit :

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(p)F_2(p)] = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

- Translation complexe :

$$\mathcal{L}e^{\pm at} f(t) = F(p+a)$$

$$\text{Retard : } \mathcal{L}f(t-mT) \Rightarrow e^{-mTp} F(p) ; \text{Avance : } \mathcal{L}f(t+mT) \Rightarrow e^{mTp} F(p)$$

- Changement de l'unité de temps :

$$\mathcal{L}f\left(\frac{t}{a}\right) = aF(ap)$$

2.4 L'inversion de la transformation de Laplace

Parfois, il est nécessaire d'inverser la transformation de Laplace pour obtenir la solution ayant pour domaine le temps t .

La transformation faisant passer du domaine des p au domaine des t ; s'appelle l'inversion de la transformation de Laplace.

Soit $F(p)$ la transformée de Laplace de $f(t)$, $t > 0$. L'intégrale :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)e^{pt} dp \quad (2)$$

S'appelle : la transformée inverse de $F(p)$. c 'est une valeur réelle. Le symbole \mathcal{L}^{-1} se lit 'l'opérateur de la transformée inverse de Laplace'.

2.5 Transformées des fonctions usuelles

Calculons la transformée de Laplace de $f(t) = au(t)$ avec $u(t)=1(t)$, en utilisant l'équation (1), on obtient :

$$F(P) = L[f(t)] = L[a] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} a e^{-pt} dt = \frac{-a}{p} \left[e^{-pt} \right]_0^{+\infty} = \frac{a}{p}$$

Calculons la transformée de Laplace de $f(t) = e^{-at}$, en utilisant l'équation (1), on obtient :

$$F(P) = L[f(t)] = L[e^{-at}] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-pt} dt = \frac{-1}{p+a} \left[e^{-(a+p)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p+a}$$

Calculons la transformée de Laplace de $f(t) = \sin \omega t$, et de $f(t) = \cos \omega t$ en utilisant l'équation (1), on obtient :

$$F(P) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \sin \omega t e^{-pt} dt$$

$$F(P) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \cos \omega t e^{-pt} dt$$

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad \text{et} \quad e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t \Rightarrow \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \quad \text{et} \quad \cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

En remplaçant les sinus et cosinus par leurs expressions équivalentes, on obtient :

$$\begin{aligned} F(P) &= L[f(t)] = L[\sin \omega t] = \int_0^{+\infty} \sin \omega t e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right) e^{-pt} dt = \\ &= \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{j\omega t} e^{-pt} dt - \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} e^{-pt} dt = \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{-(p-j\omega)t} dt - \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{-(p+j\omega)t} dt = \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{-p+j\omega} e^{-(p-j\omega)t} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{p+j\omega} e^{-(p+j\omega)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{p-j\omega} e^0 \right] - \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{p+j\omega} e^0 \right] = \frac{2j\omega}{2j} \left[\frac{1}{p^2 + \omega^2} \right] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(P) &= L[f(t)] = L[\cos \omega t] = \int_0^{+\infty} \cos \omega t e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) e^{-pt} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{j\omega t} e^{-pt} dt + \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} e^{-pt} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(p-j\omega)t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(p+j\omega)t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-p+j\omega} e^{-(p-j\omega)t} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-(p+j\omega)} e^{-(p+j\omega)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p+j\omega} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-p+j\omega} \right] = \frac{2p}{2} \left[\frac{1}{p^2 + \omega^2} \right] = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

2.6 Table élémentaire de transformées de Laplace

Le tableau suivant montre les transformées de Laplace de certaines fonctions élémentaires :

	$f(t)$	$F(p)$: Transformée de Laplace de $f(t)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$u(t)$	$\frac{1}{p}$
3.	$tu(t)$	$\frac{1}{p^2}$
4.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
5.	$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
6.	$t^n e^{-at} u(t)$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
7.	$\sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
8.	$\cos(\omega t) u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
9.	$e^{-at} \sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
10.	$e^{-at} \cos(\omega t) u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$

2.7 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Considérons la fonction rationnelle suivante :

$$F(p) = \frac{\sum_{i=0}^m A_i p^i}{\sum_{j=0}^n B_j p^j} \quad \text{Avec } n \geq m$$

Cette équation peut se mettre sous la forme :
$$F(p) = \frac{(p-z_1)(p-z_2)\dots(p-z_i)}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)\dots(p-p_j)}$$

Avec m et n le nombre de racines.

z_i : sont les racines de $F(p)$ (solution du numérateur).

p_j : sont les racines de $F(p)$ (solution du dénominateur).

Exemples

1) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction suivante :

$$f(t) = 2e^{7t} - 4e^t$$

$$f(t) = 2e^{7t} - 4e^t \Rightarrow F(p) = \frac{2}{p+7} - \frac{4}{p+1}$$

2) Déterminer la transformée inverse de Laplace de la fonction suivante : $F(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)}$

$$F(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2} \text{ Avec } p = -1 \text{ et } p = -2: \text{ solutions du dénominateur}$$

$$F(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2} \Rightarrow \left\{ A = \lim_{p \rightarrow -1} \left[\frac{(p+3)(p+1)}{(p+1)(p+2)} \right] = 2 \text{ et } B = \lim_{p \rightarrow -2} \left[\frac{(p+3)(p+2)}{(p+1)(p+2)} \right] = -1 \right.$$

$$F(p) = \frac{2}{p+1} - \frac{1}{p+2} \Rightarrow D' \text{ après le tableau on a : } f(t) = (2e^t - e^{2t})u(t)$$

Chapitre 3

3 Fonctions de Transfert et Blocs de Diagrammes

3.1 Introduction

Pour calculer la réponse $s(t)$ d'un système linéaire à une entrée quelconque $e(t)$, on peut appliquer la transformation de Laplace à l'équation différentielle linéaire à coefficients constants liant $e(t)$ et $s(t)$ ou $x(t)$ et $y(t)$.

3.2 Fonction de transfert des systèmes linéaires.

On désigne par $F(p)$ et on l'appelle fonction de transfert du système, le rapport des transformées de Laplace de la sortie et de l'entrée du système.

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

L'application de la transformation de Laplace à l'équation différentielle liant les variations de l'entrée aux variations de la sortie d'un système linéaire conduit à définir une fonction de transfert $F(p)$.

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A_m p^m + \dots + A_1 p^1 + A_0 p^0}{B_n p^n + \dots + B_1 p^1 + B_0 p^0}$$

Avec : $n \geq m$

3.3 Schéma fonctionnel d'un système linéaire

Soit le système suivant

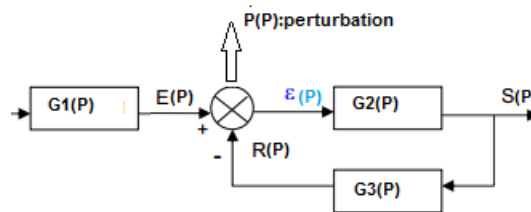


Figure 3-1 Schéma fonctionnel d'un système linéaire
Chaîne directe de $e(t)$ vers $s(t)$ et la chaîne de retour de $s(t)$ vers $r(t)$.

Et leurs transformées de Laplace

$G_1(p)$: sert à traiter $e(t)$ afin que $e(t)$ et $r(t)$ soit de même nature.

$G_2(p)$: système principal de commande.

$G_3(p)$: système de retour

$\xi(p)$: Signal d'erreur

$E(p)$ et $S(p)$: Transformées de Laplace de signaux d'entrée et de sortie

$P(p)$: perturbations ou parasites

Fonction de transfert ou transmittance totale : $F(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$

Fonction de transfert ou transmittance parasite : $T(p) = \frac{S(p)}{P(p)}$.

3.4 Fonction de transfert en boucle ouverte

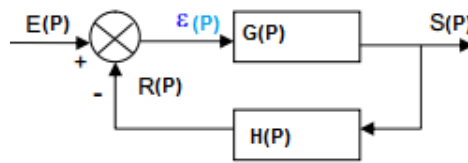


Figure 3-2 : Schéma fonctionnel d'un système linéaire simple

$$T(p) = \frac{R(p)}{\xi(p)}$$

$$S(p) = G(p) \cdot \xi(p), \quad \xi(p) = E(p) - R(p) \quad \text{et} \quad R(p) = H(p) \cdot S(p)$$

$$T(p) = \frac{R(p)}{\xi(p)}, \quad \xi(p) = \frac{S(p)}{G(p)} \quad \text{et} \quad T(p) = \frac{H(p) \cdot S(p)}{\frac{S(p)}{G(p)}} = H(p) \cdot G(p) \quad \text{et donc} \quad T(p) = G(p) \cdot H(p)$$

3.5 Fonction de transfert en boucle fermée

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p) \cdot \xi(p)}{\xi(p) + R(p)} = \frac{G(p) \cdot \xi(p)}{\xi(p) + \xi(p) [H(p) \cdot G(p)]} = \frac{G(p)}{1 + H(p) \cdot G(p)}$$

3.6 Schéma fonctionnel d'une commande de vitesse

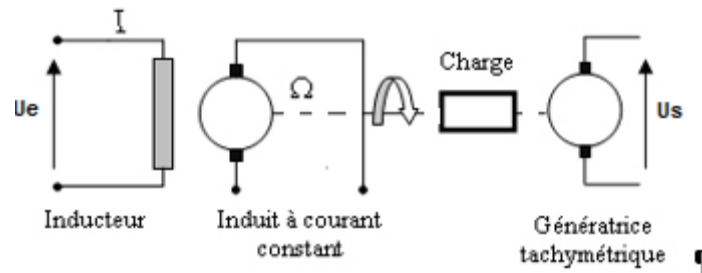


Figure 3-3 : Schéma d'une commande de vitesse

A chaque valeur de la tension U_e correspond en régime permanent à une valeur de la vitesse Ω du moteur et une valeur de l'écart. Une augmentation convenable du gain de l'amplificateur par rapport à la valeur qu'il possède dans le cas de la commande non asservie permet de faire correspondre une vitesse Ω du moteur à une même tension efficace U_e .

Lorsque par exemple la tension augmente, le moteur accélère et l'écart diminue, et si, pour une tension de commande constante, il s'exerce une perturbation sur le système, comme un couple résistant sur l'arbre du moteur, la tendance de cet organe à ralentir est contrée par la tendance correspondante de l'écart à augmenter.

On peut donc schématiser le principe de la commande de vitesse par le schéma bloc suivant en affectant à chaque organe un bloc et on les relie soit en chaîne directe pour les organes d'action, soit en chaîne de retour pour les organes de réaction ou d'asservissement.

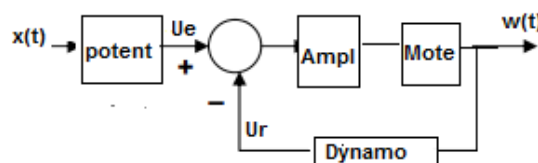


Figure 3-4 : Schéma fonctionnel d'une commande de vitesse

3.7 Schéma fonctionnel d'une commande de position

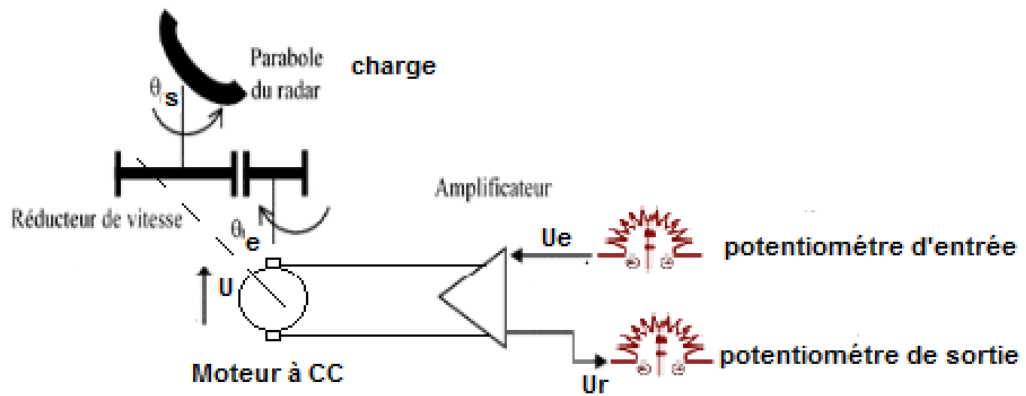


Figure 3-5 : Schéma d'une commande de Position

La position θ_s de la charge peut être commandée de façon plus précise au moyen du système asservi, celui-ci présente en outre l'avantage de s'opposer aux effets des perturbations agissant sur θ_s . La position désirée θ_e , de la charge est affichée sur un potentiomètre circulaire alimenté en courant continu ; la tension U_e entre le curseur de ce potentiomètre et la masse est proportionnelle à la position angulaire θ_e . L'arbre du moteur entraîne d'autre part le curseur d'un potentiomètre de sortie, identique au précédent et alimenté par la même tension continue U_r entre le curseur et la masse de ce potentiomètre (tension de retour) proportionnelle à la position réelle de la charge : $\xi = U_e - U_r$

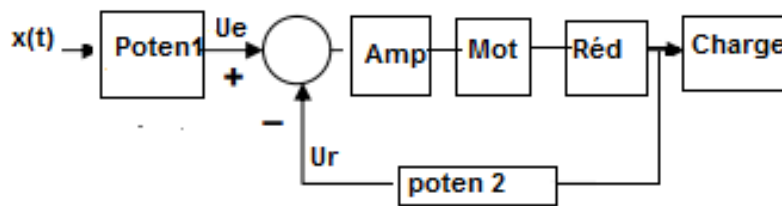


Figure 3-6 : Schéma fonctionnel d'une commande de position

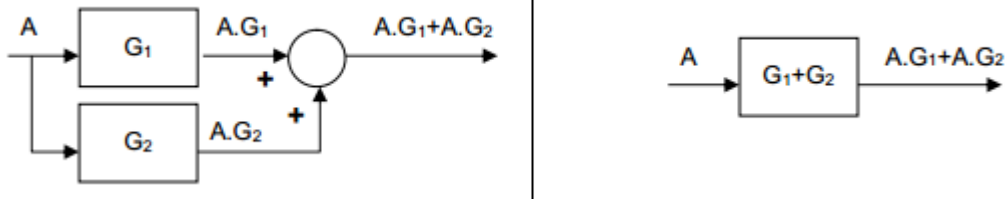
3.8 Simplifications des schémas fonctionnels.

Pour simplifier un schéma fonctionnel, il faut réduire les boucles internes et pour cela, on doit déplacer les points de connexion, les comparateurs ou les interchanger pour avoir en dernier une seule maille réduite pour déterminer la fonction de transfert du système simplifié et passer à son étude à savoir stabilité, précision etc.

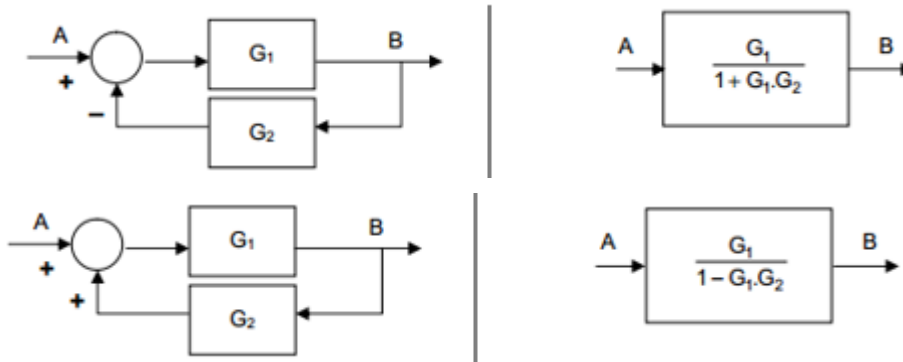
3.8.1 Éléments en cascades ou série.



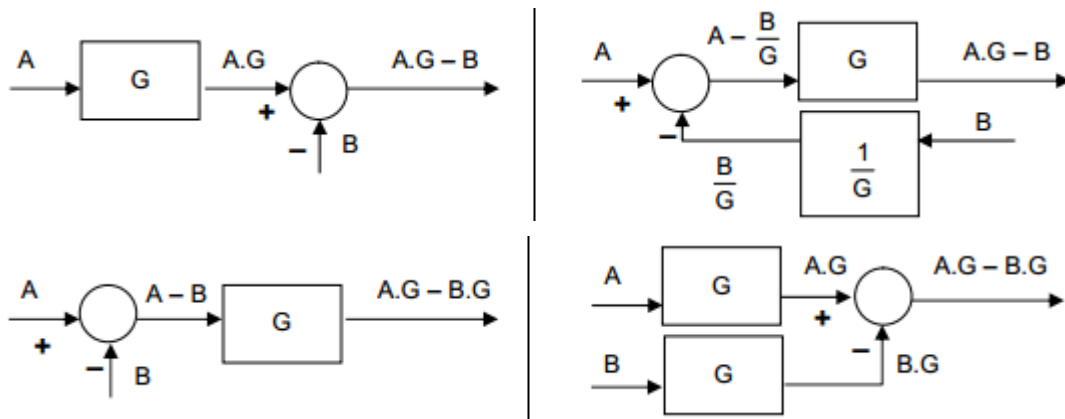
3.8.2 Eléments en Parallèle.



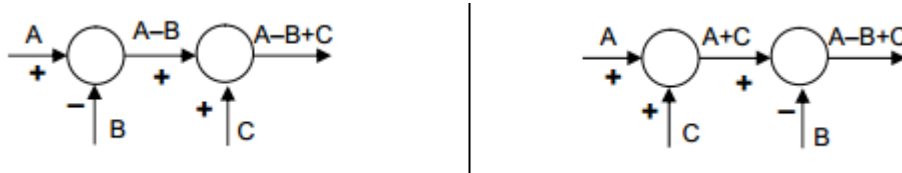
3.8.3 Elimination d'une boucle de retour.



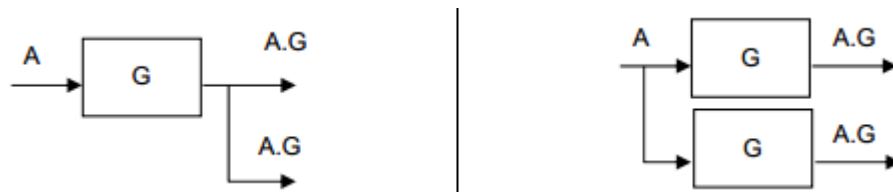
3.8.4 Déplacement d'un comparateur soit en amont ou en aval d'un autre élément.

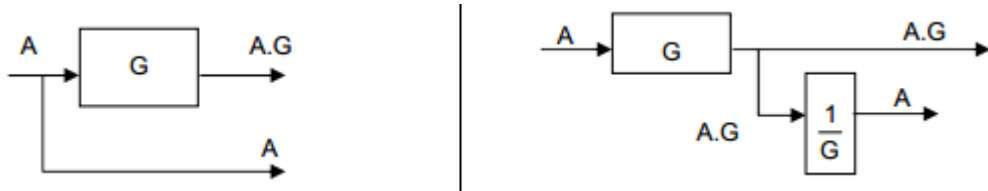


3.8.5 Déplacement d'un comparateur par rapport à un autre.



3.8.6 Déplacement d'un point de dérivation soit en amont ou en aval d'un autre élément.

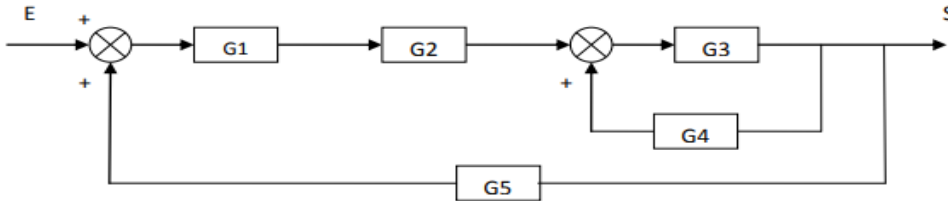




3.9 Exemples

Exemple1 :

Simplifier les schémas suivants et donner leurs fonctions de transferts $F(P) = \frac{S(P)}{E(P)}$



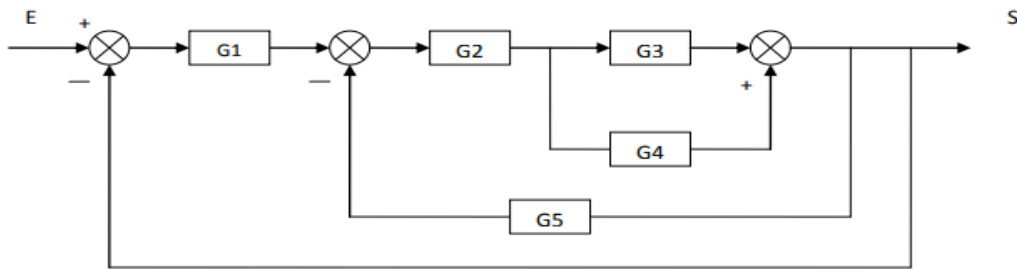
Solution :

G_1 et G_2 en cascade $G_1 * G_2$, une boucle fermée G_3 et G_4 : $\frac{G_3}{1 - G_3 G_4}$, en suite $\frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_3 G_4}$

Avec G_5 , on aura en dernier

$$F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{\frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_3 G_4}}{1 - G_5 \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_3 G_4}}$$

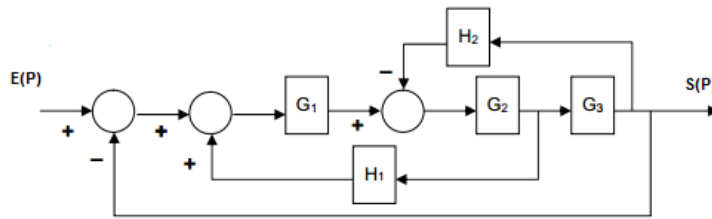
Exemple2 :



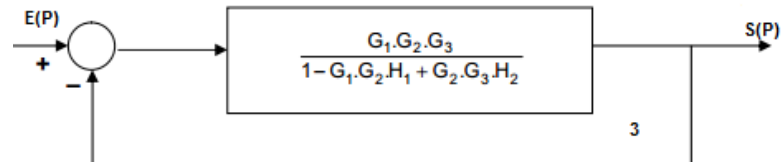
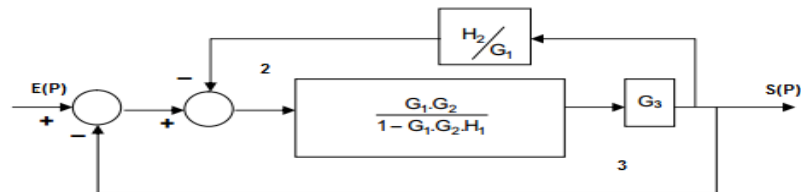
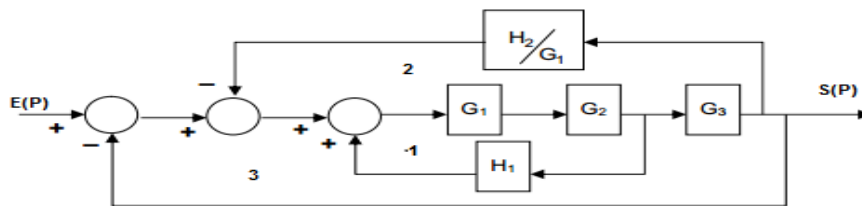
Solution :

Il y a 3 mailles il faut commencer par G_3 et G_4 , la 2ème le résultat avec G_2 et G_5 et le résultat avec G_1 , toujours élimination d'une boucle de retour et éléments en cascade

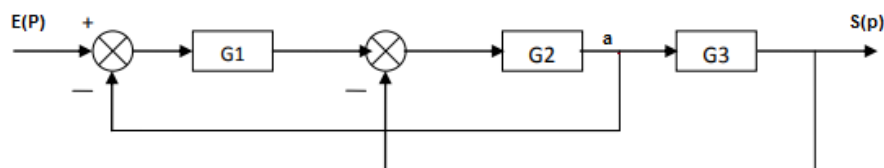
$$F(P) = \frac{G_1(G_2 G_4 + G_2 G_3)}{1 + G_2 G_5(G_4 + G_3) + G_2 G_1(G_3 + G_4)}$$

Exemple3 :

Solution :

Une fois en déplace le comparateur de la maille 2, on simplifie la maille 1 et après maille 2 avec l'utilisation de la règle des éléments en cascades et en dernier on passe à la maille 3



$$F(P) = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3}$$

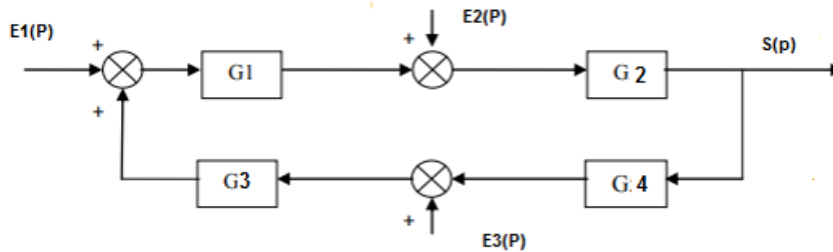
Exemple 4 :


Solution :

On a un déplacement d'un point de dérivation (a) et après on élimine la boucle de retour qui contient G_2 et G_3 puis celle qui contient G_1 et $1/G_3$

Exemple5 :

Déterminer la sorties $S(P)$ du système suivant :


Solution :

On a un système a 3 entrées, on applique le principe de superposition c.-à-d., on élimine deux entrées et on garde une et c'est consécutif E_1 existe et $E_2=E_3=0$; E_2 existe et $E_1=E_3=0$ et en dernier E_3 existe et $E_2=E_1=0$ et on simplifie le circuit correspondant à chaque entrée et on ajoute les sorties correspondantes à chaque entrée, S_1 pour E_1 , S_2 pour E_2 et S_3 pour E_3 et enfin $S(p)=S_1(P)+S_2(P)+S_3(P)$

$$E_2 = E_3 = 0 \Rightarrow S_1 = E_1 \frac{G_1 G_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4},$$

$$E_1 = E_3 = 0 \Rightarrow S_2 = E_2 \frac{G_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4},$$

$$E_1 = E_2 = 0 \Rightarrow S_3 = E_3 \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4},$$

$$S(P) = E_1 \frac{G_1 G_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} + E_2 \frac{G_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} + E_3 \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} = \frac{G_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} (E_1 G_1 + E_2 + E_3 \frac{G_1 G_3}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4})$$

Chapitre 4

4 Etude d'un système asservi du premier ordre

4.1 Définition et fonction de transfert

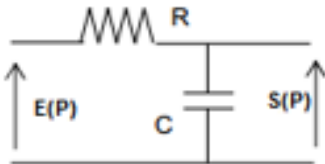
On appelle système du 1er ordre, un système régi par une équation linéaire différentielle du premier ordre telle que :

$$T \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.e(t)$$

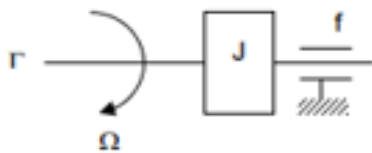
On appliquant la transformation de Laplace, on obtient la fonction de transfert du système du premier ordre qui est un système à une seule constante de temps T et K gain statique:

$$TpS(p) + S(p) = K.E(p) \Rightarrow S(p)(Tp+1) = K.E(p) \Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{Tp+1}$$

4.2 Exemples



$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1+RCp} = \frac{1}{1+\tau p} \text{ Avec } \tau = RC$$



$$\Gamma(t) = J \frac{d\Omega}{dt} + f\Omega \Rightarrow \Gamma(p) = Jp\Omega(p) + f\Omega(p) \Rightarrow$$

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\Omega(p)}{\Gamma(p)} = \frac{1}{1 + \frac{J}{f}p} = \frac{k}{1 + \tau p} \text{ Avec } \tau = \frac{J}{f}$$

4.3 Réponses du système aux différents signaux d'entrées

4.3.1 Réponse à une impulsion de Dirac

Soit un système linéaire du premier ordre. L'entrée du système est une impulsion de Dirac $e(t) = \delta(t)$ et sa transformée de Laplace est $E(p)=1$.

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{Tp+1} \Rightarrow S(p) = E(p) \frac{K}{Tp+1} \text{ et puisque } E(p)=1 \text{ on aura } S(p) = \frac{K}{Tp+1}$$

on prend $K=1$ et on détermine $s(t)$

La solution $s(t)$, pour cette équation, sera déterminée à partir du tableau de Laplace.

$$s(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

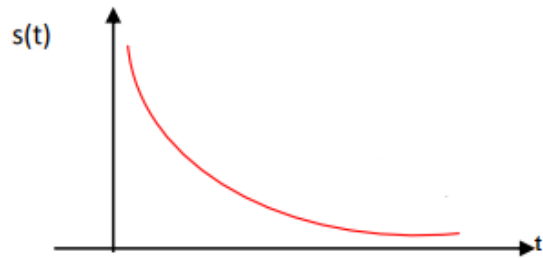
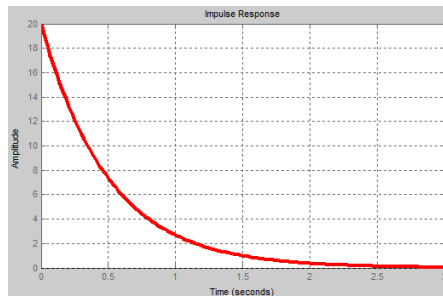


Figure 4-1 : Réponse impulsionnelle d'un système du 1er Ordre

4.3.2 Réponse à un échelon unitaire

Soit un système linéaire du premier ordre.

L'entrée du système est un échelon unitaire $e(t) = u(t)$, et sa transformée de Laplace est

$$E(p) = 1/p.$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{Tp+1} \Rightarrow S(p) = E(p) \frac{K}{Tp+1} \text{ et puisque } E(p) = \frac{1}{p} \text{ on aura } S(p) = \frac{1}{p} \frac{K}{(Tp+1)}$$

La solution $s(t)$, pour cette équation et avec $K=1$, on l'a déterminé à partir du tableau de Laplace.

$$s(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

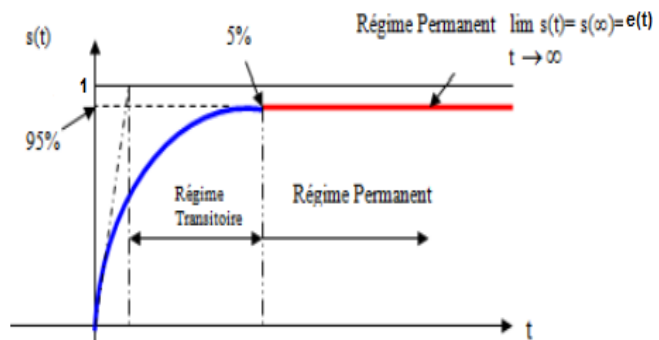
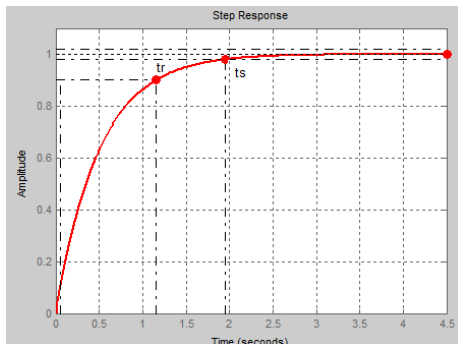


Figure 4-2 : Réponse indicielle d'un système du 1er Ordre

4.3.3 Réponse à une rampe

Soit un système linéaire du premier ordre. L'entrée du système est un échelon unitaire

$e(t) = t(t)$, et sa transformée de Laplace est $E(p) = 1/p^2$.

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{Tp+1} \Rightarrow S(p) = E(p) \frac{k}{Tp+1} \text{ et puisque } E(p) = \frac{1}{p^2} \text{ on aura } S(p) = \frac{1}{p^2} \frac{k}{(Tp+1)}$$

La solution $s(t)$, pour cette équation et avec $k=1$, on l'a déterminé à partir du tableau de Laplace.

$$s(t) = t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}}) = s_1(t) + s_2(t)$$

Ou $s_1(t)$: correspond au régime transitoire et $s_2(t)$, correspond au régime permanent.

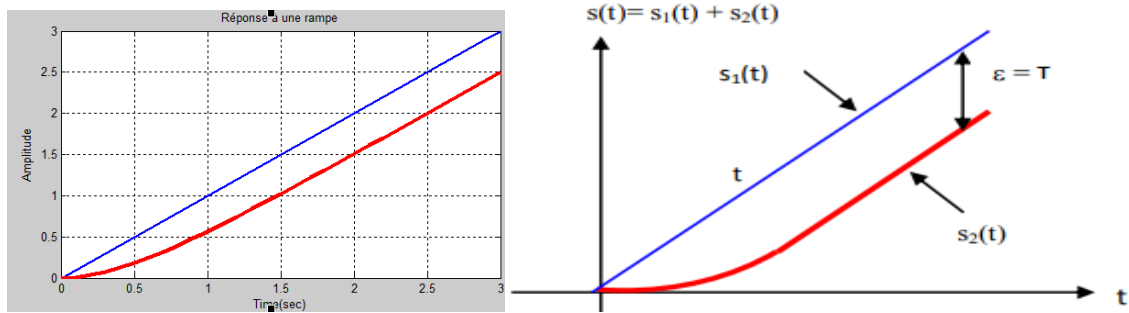


Figure 4-3 : Réponse à une rampe d'un système du 1er Ordre.

4.3.4 Réponse Harmonique

C'est la réponse d'un système à une entrée périodique comme les fonctions sinusoïdales. Elle permet d'étudier le système en régime permanent.

Ceci va être étudié au chapitre 6, avec les diagrammes de Bode et de Nyquist

Chapitre 5

5 Etude d'un système asservi du second ordre

5.1. Définition et fonction de transfert

On appelle système du second ordre, un système régi par une équation linéaire différentielle du second ordre telle que :

$$T^2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K_s e(t)$$

Avec K_s : gain statique, T : constante de temps et ξ : coefficient d'amortissement

On appliquant la transformation de Laplace, l'équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$T^2 p^2 S(p) + 2\xi T p S(p) + S(p) = K_s \cdot E(p)$$

Où $E(p)$, la transformée de Laplace de l'entrée $e(t)$, qui peut prendre l'une des 4 fonctions fondamentales, fonction de Dirac, échelon, rampe ou accélération.

La fonction de transfert du système du second ordre peut se mettre sous la forme suivante :

$$S(p)(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1) = K_s \cdot E(p) \Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K_s}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$$

On pose :

$$T = \frac{1}{\omega_n}$$

On obtient :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K_s}{\frac{1}{\omega_n^2} p^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1} = \frac{K_s \omega_n^2}{p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2}$$

Avec ω_n : fréquence du système non amorti.

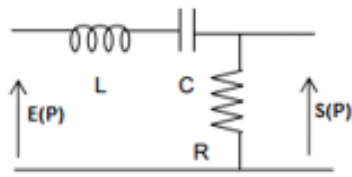
Pour le cas $\xi > 1$, la fonction de transfert $F(p)$ peut se mettre sous la forme d'un produit de deux racines :

$$T^2 p^2 + 2\xi T p + 1 = (p - p_1)(p - p_2) = \left(p - \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{T} \right) \left(p - \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}}{T} \right)$$

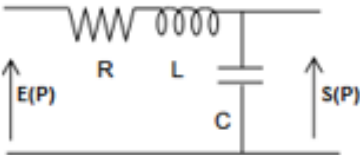
- $\xi > 1 \Rightarrow p_1$ et p_2 sont deux racines réelles négatives ou positives \Rightarrow le système est stable. (Régime sur amorti).
- $\xi = 1 \Rightarrow p_1$ et p_2 sont des racines doubles \Rightarrow le système est juste oscillant. (Régime amorti critique).
- $0 < \xi < 1 \Rightarrow p_1$ et p_2 sont deux racines complexes \Rightarrow le système est instable (il oscille : amortissement sur critique).

Pour les 2 autres cas, la solution est donnée au paragraphe 5.3.1.

5.2. Exemples



$$F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{LCP^2}{1 + RCP + LCP^2}$$



$$F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{1}{1 + RCP + LCP^2}$$

5.3. Réponses du système aux différents signaux d'entrées

5.3.1. Réponse à une impulsion unitaire

Soit un système linéaire du deuxième ordre. L'entrée du système est une impulsion unitaire $e(t) = \delta(t)$ et sa transformée de Laplace est $1(P)$.

$$E(p) = 1 \text{ et } K\omega_n^2 \neq 1 \Rightarrow S(p) = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

$$\text{Si } 0 < \xi < 1: \quad s(t) = K \left(\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n t \sqrt{1-\xi^2}) \right) \quad t \geq 0$$

$$\text{Si } \xi = 1: \quad s(t) = K (\omega_n^2 t e^{-\omega_n t}) \quad t \geq 1$$

$$\text{Si } \xi > 1: \quad s(t) = K \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}} \left(e^{-(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t} - e^{-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t} \right) \quad t \geq 1$$

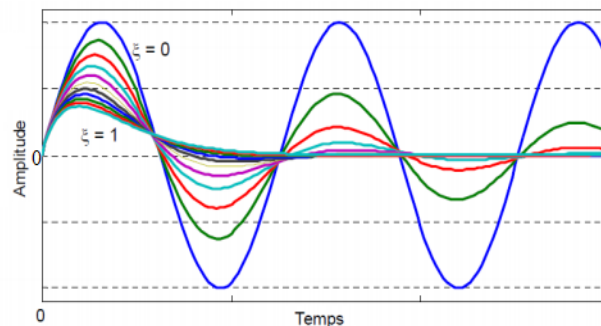


Figure 5-1 : Réponse impulsionnelle d'un système du second Ordre

Programme Matlab, réponse à une impulsion de Dirac

```
>> sys = tf(10,[1 2 1])
>> impulse (sys)
>> title ('Réponse impulsionnelle')
```

5.3.2. Réponse à une entrée échelon

Soit un système linéaire du deuxième ordre. L'entrée du système est un échelon unitaire $e(t) = u(t)$ et sa transformée de Laplace est $1/p$.

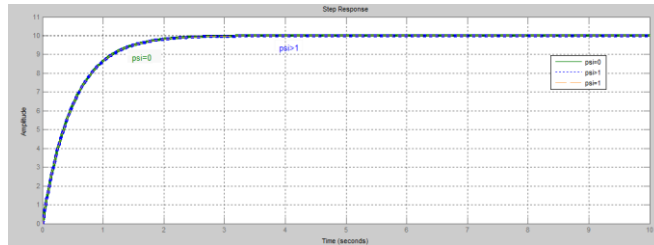
$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K_s}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1} \Rightarrow S(p) = E(p) * \frac{K_s}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}$$

$$\text{Avec : } E(p) = \frac{1}{p}$$

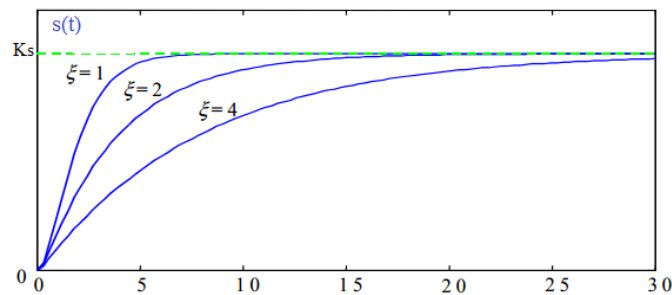
$$S(p) = \frac{K_s}{p} \left(\frac{1}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1} \right)$$

Si on prend $K_s=1$ et on discute le système suivant les valeurs du coefficient d'amortissement, on aura 3 cas à étudier.

$$a) \quad \underline{\xi > 1} : s(t) = 1 + \frac{1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + 1}} e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 + 1})\omega_n t}$$



$$b) \quad \underline{\xi = 1} : s(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$

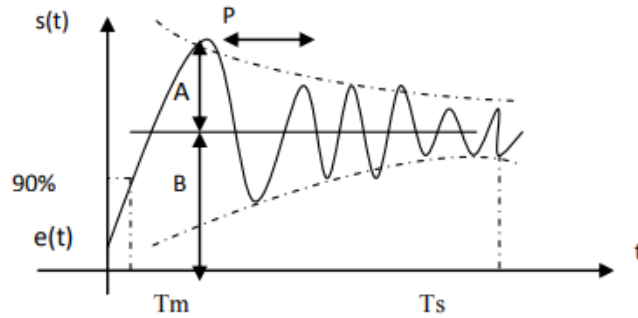


Le système est en amortissement critique.

$$c) \quad \underline{0 < \xi < 1} : s(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t + \varphi)$$

$$\text{Avec } \varphi = \arctg\left(\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right)$$

Le système étant en régime d'amortissement sur critique.



$$d : \text{dépassement} = e^{-\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} = \frac{A}{B} \quad \text{et} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \text{ est la période}$$

Figure 5-2 : Réponse indicielle pour les 3 cas du coefficient d'amortissement d'un système du second Ordre

$$d : \text{dépassement} = e^{-\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} = \frac{A}{B} \quad \text{et} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \text{ est la période}$$

T_m est le temps que met la réponse à un échelon pour être à 90% de la valeur finale.

Avec $s(\infty) = e(t)$.

T_s : est le temps de stabilisation : c'est-à-dire le temps que met la réponse à un échelon pour atteindre un certain pourcentage donné de sa valeur finale (2 à 5%).

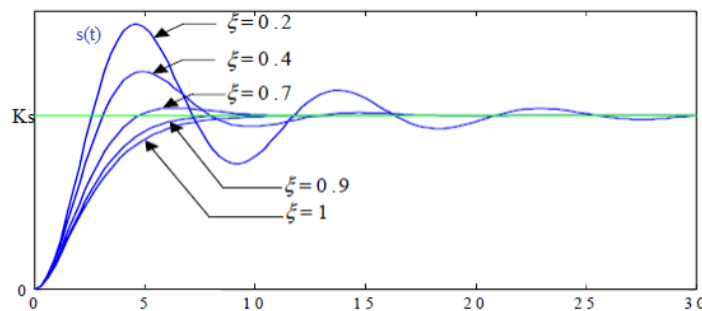


Figure 5-3 : Réponses indicielles d'un système du 2ème ordre en fonction de ξ

Programme Matlab, réponse à un échelon de position unité

```
>> sys2 = tf(10,[1 2 1])
```

```
>> step(sys2)
```

```
>> title('Réponse à un échelon unité')
```

Exemple

Soit un système d'écrit par le schéma fonctionnel suivant, trouvez les domaines de variations de k pour les trois régimes possibles.

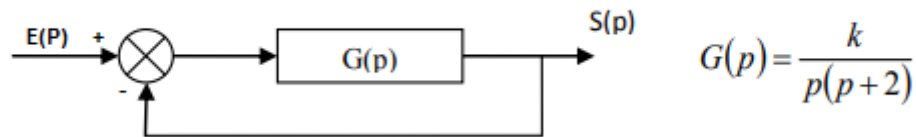


Figure 5-4 : système a retour unitaire

Solution :

$$F(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{\frac{k}{p(p+2)}}{1 + \frac{k}{p+2}} = \frac{k}{p^2 + 2p + k} = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

Avec : $\omega_n^2 = k$ et $2\xi\omega_n = 2$

Pour $0 < \xi < 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} < 1 \Rightarrow k > 1$: régime d'amortissement sur critique

Pour $\xi = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 \Rightarrow k = 1$: régime critique

Pour $\xi > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} > 1 \Rightarrow k < 1$: régime sur amorti

Programme Matlab, réponse à une rampe

```
>> t = [0:0.1:3];
>> input = t;
>> plot(t,input,t,dcgain(sys)*t,lsim(sys,input,t))
>> title ('Réponse à une rampe')
```

5.3.3. Réponse Harmonique

C'est la réponse d'un système à une entrée périodique comme les fonctions sinusoïdales. Elle permet d'étudier le système en régime permanent.

Ceci va être étudié au chapitre 6, avec les diagrammes de Bode et Nyquist

Chapitre 6

6 Diagrammes de BODE et NYQUIST des systèmes asservis

6.1. Introduction

Les fonctions de transfert en général se mettent sous la forme suivante :

$$T(p) = k \frac{\prod_{i=0}^n (p - z_i)}{\prod_{i=0}^m (p - p_i)}, \quad n < m$$

$$T(j\omega) = |T(j\omega)| e^{j\varphi}$$

$$\varphi(\omega) = \arg(T(j\omega))$$

$T(j\omega)$ peut prendre plusieurs formes, on cite les 4 les plus répandus

$$1) T(p) = kp^\alpha$$

$$2) T(p) = (1 + \tau p)^\beta$$

$$3) T(p) = \left(1 + 2 \frac{\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)^\gamma$$

$$4) T(p) = e^{-\tau p}$$

Avec $p = j\omega$ et $\alpha > 0$ ou $\alpha < 0$, $\beta < 0$ ou $\beta > 0$, et $\gamma > 0$ ou $\gamma < 0$.

6.2. Diagramme de BODE

Le diagramme de Bode consiste à faire le tracé de la fonction de transfert en boucle ouverte, une courbe de gain pour le module et une courbe de phase pour l'argument.

courbe de gain

$$|T(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |T(j\omega)| = f(\log_{10} \omega)$$

courbe de phase

$$\varphi(\omega) = \arg T(j\omega) = f(\log_{10} \omega)$$

1) Terme : $T(p) = kp^\alpha$

$$T(j\omega) = k(j\omega)^\alpha$$

$$A_{dB} = 20 \log |T(j\omega)|_{dB} = 20 \log |k(j\omega)^\alpha| = 20 \log(k\omega^\alpha) = 20 \log k + 20\alpha \log \omega = a \log \omega + b = ax + b : \text{une droite}$$

On trace la fonction A_{dB} en fonction de $\log \omega$, le décibel (dB), c'est l'unité du gain.

Pour le tracé de la droite, il faudra choisir la pente en décade ou octave.

Décade c'est la différence entre 10ω et ω dans une échelle logarithmique.

Octave c'est la différence entre 2ω et ω dans une échelle logarithmique.

$$A_{dB} = 20 \log |k(j\omega)^\alpha| = 20\alpha \log k\omega = 20\alpha \log k + 20\alpha \log \omega$$

$$A_{dB|d\acute{e}c} = A(10\omega) - A(\omega) = 20\alpha \log k + 20\alpha \log 10\omega - 20\alpha \log k - 20\alpha \log \omega =$$

$$= 20\alpha \log \frac{10\omega}{\omega} = 20\alpha \log 10 = 20\alpha dB / d\acute{e}c$$

$$A_{dB|oct} = A(2\omega) - A(\omega) = 6\alpha dB / oct$$

La courbe de gain :

$A_{dB} = 20 \log k + 20 \alpha \log \omega = a.x + b$ c'est une droite,

$k \omega_c^\alpha = 1 \Rightarrow \omega_c^\alpha = \frac{1}{k} \Rightarrow \omega_c = \left(\frac{1}{k}\right)^{1/\alpha}$ Est appelé fréquence de coupure ou la droite coupe l'axe des y

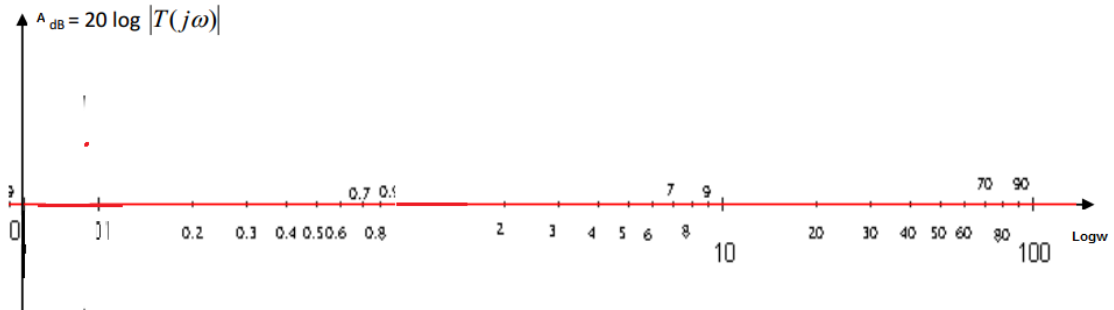


Figure 6-1 : Exemple d'échelle semi-logarithmique à trois décades

Le tracé se fait sur une échelle semi logarithmique, l'axe des y en millimétrique et l'axe des x en semi-logarithmique

L'échelle semi-logarithmique est une alternative à l'échelle linéaire. Elle peut s'avérer préférable lorsqu'on étudie un phénomène utilisant une gamme étendue de valeurs, l'échelle linéaire est mal adaptée. On lui préfère une échelle logarithmique qui espace les valeurs faibles et rapproche les valeurs fortes. La distance qui sépare 1 de 10 est la même que celle qui sépare 10 de 100 et celle qui sépare 0,1 de 1 car $\log(100) - \log(10) = \log(10) - \log(1) = \log(1) - \log(0,1)$. Chacun de ces intervalles s'appelle un module ou décade. La distance qui sépare 1 de 2 est égale à celle qui sépare 10 de 20 mais est supérieure à celle qui sépare 2 de 3 car $\log(2) - \log(1) = \log(20) - \log(10) > \log(3) - \log(2)$. Cela induit une sorte d'irrégularité récurrente dans les graduations.

La courbe de phase :

C'est la phase φ en fonction de $\log \omega$

Exemple 1:

Soit un système avec une fonction de transfert : $T(p) = \tau p$ et $\alpha = 1$, on pose $p = j\omega$

$$T(j\omega) = j\tau\omega \Rightarrow \begin{cases} |T(j\omega)| = \tau\omega \\ \varphi = \arctg \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \arctg \frac{\tau\omega}{0} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Calcul de la fréquence de coupure ω_c à $T_{dB} = 0$:

$$T_{dB} = 20 \log |T(j\tau\omega_c)| = 0 \Rightarrow 20 \log T(\tau\omega_c) = 0 \Rightarrow \tau\omega_c = 1 \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{\tau}$$

La courbe de gain :

$$\omega \rightarrow 0^+ \Rightarrow T_{dB} = 20 \log |T(j\tau\omega)| = 20 \log \tau 0^+ \rightarrow -\infty;$$

$$\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow T_{dB} = 20 \log |T(j\tau\omega)| = 20 \log \tau \infty \rightarrow +\infty;$$

$$\omega \rightarrow \omega_c \Rightarrow T_{dB} = 20 \log |T(j\tau\omega_c)| = 20 \log 1 \rightarrow 0$$

La courbe de phase :

$$\omega \rightarrow 0^+ \Rightarrow \varphi = \arctg \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \arctg \frac{\tau 0}{0} \rightarrow 0$$

$$\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow \varphi = \arctg \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \arctg \frac{\tau + \infty}{0} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\omega \rightarrow \omega_c \Rightarrow \varphi = \arctg \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \arctg \frac{1}{0} \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

Exemple 2 :

Soit un système avec une fonction de transfert $T(p) = \frac{1}{\tau p}$ et $\alpha = -1$, on pose $p = j\omega$

$$T(j\omega) = (j\tau\omega)^{-1} \Rightarrow \{|T(j\omega)| = (\tau\omega)^{-1} \text{ et } \varphi = \arctg \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \arctg \frac{(\tau\omega)^{-1}}{0} = -\frac{\pi}{2}$$

Calcul de la fréquence de coupure ω_c à $TdB = 0$:

$$TdB = 20 \log |T(j\tau\omega_c)| = 0 \Rightarrow 20 \log T(\tau\omega_c) = 0 \Rightarrow \tau\omega_c = 1 \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{\tau}$$

$$\omega \rightarrow 0^+ \Rightarrow TdB = 20 \log |T(j\tau\omega)| = 20 \log (\tau\omega)^{-1} = -20 \log (\tau\omega) \rightarrow +\infty;$$

$$\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow TdB = 20 \log |T(j\tau\omega)| = -20 \log \tau\omega \rightarrow -\infty ;$$

$$\omega \rightarrow \omega_c \Rightarrow TdB = 20 \log |T(-j\tau\omega_c)| \rightarrow 0$$

2) Terme : $T(p) = (1 + \tau p)^\beta$

On va étudier cette fonction avec $\beta = 1$ et $\beta = -1$

Soit un système avec une fonction de transfert

$$T(p) = (1 + \tau p) \Rightarrow T(j\omega) = (1 + j\tau\omega) \text{ et } \beta = 1 \text{ on pose } p = j\omega$$

$$T(j\omega) = (1 + j\tau\omega) \Rightarrow \{|T(j\omega)| = (1^2 + (\tau\omega)^2)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \varphi = \arctg \frac{\tau\omega}{1} = \arctg \tau\omega$$

$$TdB = 20 \log |T(j\tau\omega_c)| = 0 \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{\tau}$$

La courbe de gain :

$$AdB = 20 \log |T(j\omega)| = 20 \log \sqrt{1 + (\tau\omega)^2}$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow AdB = 0 \text{ 1}^{\text{ère}} \text{ Asymptote}$$

$$\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow AdB = 20 \log \tau\omega \Rightarrow 20dB / \text{déc } 2^{\text{ème}} \text{ Asymptote}$$

$$\omega \rightarrow \omega_c \Rightarrow AdB = 20 \log \sqrt{2} = 10 \log 2 \Rightarrow AdB = 3dB$$

La courbe de phase:

$$\varphi^\circ = \arctg \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \arctg \frac{\tau\omega}{1}$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi^\circ = \arctg \frac{0}{1} \Rightarrow \varphi^\circ = 0: 1^{\text{ère}} \text{ Asymptote}$$

$$\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow \varphi^\circ = \arctg \frac{+\infty}{1} \Rightarrow \varphi^\circ = \frac{\pi}{2}: 2^{\text{ème}} \text{ Asymptote}$$

$$\omega \rightarrow \omega_c \Rightarrow \varphi^\circ = \arctg \frac{1}{1} \Rightarrow \varphi^\circ = \frac{\pi}{4}$$

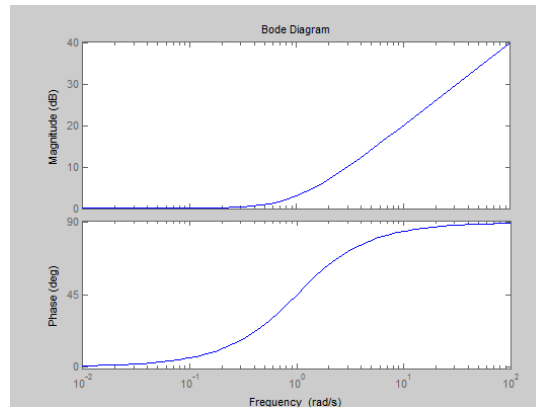


Figure 6-2 : Courbe de Bode d'un système du 1er Ordre de type pour $\beta = 1$

- Soit un système avec une fonction de transfert

$$T(p) = (1 + \tau p)^{-1} \Rightarrow T(j\omega) = (1 + j\tau\omega)^{-1} \text{ et } \beta = -1 \text{ on pose } p = j\omega$$

La courbe de gain :

$$AdB = -20 \log |T(j\omega)| = -20 \log \sqrt{1 + (\tau\omega)^2}$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow AdB = 0 \text{ 1}^{\text{ère}} \text{ Asymptote}$$

$$\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow AdB = 20 \log \tau\omega \Rightarrow -20dB / \text{déc} \text{ 2}^{\text{ème}} \text{ Asymptote}$$

$$\omega \rightarrow \omega_c \Rightarrow AdB = -20 \log \sqrt{2} = -10 \log 2 \Rightarrow AdB = -3dB$$

La courbe de phase:

$$\varphi^\circ = -\arctg \frac{Im}{Re} = -\arctg \frac{\tau\omega}{1}$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi^\circ = -\arctg \frac{0}{1} \Rightarrow \varphi^\circ = 0: \text{1}^{\text{ère}} \text{ Asymptote}$$

$$\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow \varphi^\circ = -\arctg \frac{+\infty}{1} \Rightarrow \varphi^\circ = -\frac{\pi}{2}: \text{2}^{\text{ème}} \text{ Asymptote}$$

$$\omega \rightarrow \omega_c \Rightarrow \varphi^\circ = -\arctg \frac{1}{1} \Rightarrow \varphi^\circ = -\frac{\pi}{4}$$

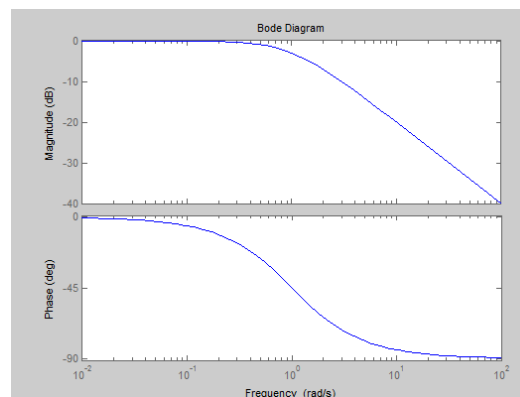


Figure 6-3 : Courbe de Bode d'un système du 1er Ordre de type pour $\beta = -1$

3) Terme : $T(p) = k \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2} \right)^{\gamma}$

Pour $\gamma < 0$ on a : $T(p) = \frac{k}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$

La courbe de Gain

$$AdB = 20 \log k - 20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} = -20 \log \sqrt{1 + (\tau\omega)^2}$$

$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow AdB = 20 \log k$ 1^{ère} Asymptote

$\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow AdB = 20 \log k - 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \Rightarrow -40dB / \text{déc}$ 2^{ème} Asymptote

$\omega \rightarrow \omega_c = \omega_n \Rightarrow AdB = 20 \log k - 20 \log 2\xi$

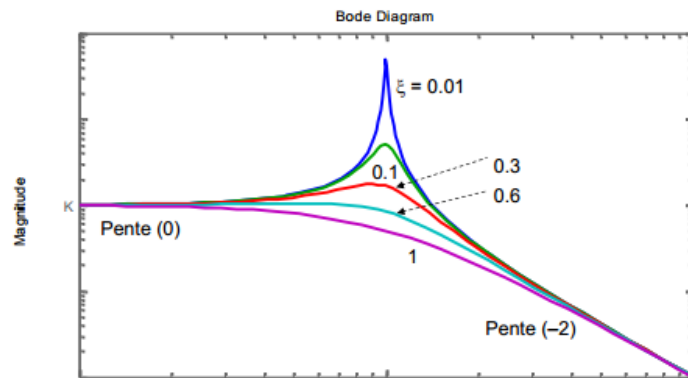


Figure 6-4 : Diagramme de Bode d'un système du 2nd ordre en fonction de ξ

La courbe de phase

$$\varphi^\circ = -\arctg \frac{Im}{Re} = -\arctg \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi^\circ = 0$: 1^{ère} Asymptote

$\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow \varphi^\circ = -\arctg 0^- \Rightarrow \varphi^\circ = -\pi$: 2^{ème} Asymptote

$\omega \rightarrow \omega_c = \omega_n \Rightarrow \varphi^\circ = -\arctg 0^+ \Rightarrow \varphi^\circ = -\frac{\pi}{2}$

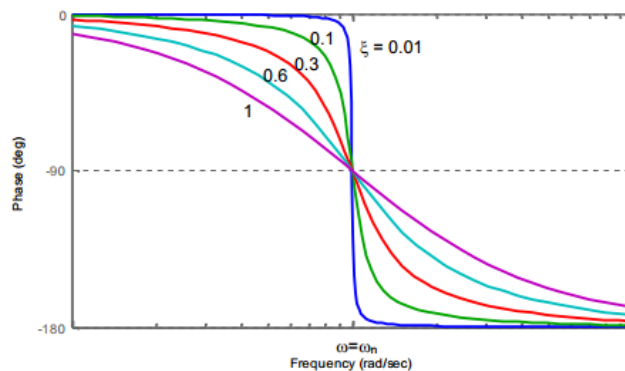


Figure 6-5 : Diagramme de Bode d'un système du 2nd ordre en fonction de ξ

4) Terme : $T(p) = e^{-j\omega\tau}$

$$|T(j\omega)| = 1$$

$$\varphi = -\tau\omega$$

Il suffit de varier ω pour tracer l'argument

6.1 Diagramme de Nyquist

L'analyse de Nyquist consiste dans un procédé graphique en la détermination des variations du module et de la phase de la fonction de transfert.

Constitution des diagrammes de Nyquist : Pour une fonction de transfert

$T(p)$ relative à un système en boucle ouverte, le diagramme de Nyquist est le lieu des points défini :

- a- **En coordonnées polaires** : Défini par un rayon vecteur égal à la valeur du module de $T(j\omega)$ et un angle polaire égal à l'argument de $T(j\omega)$.

Le lieu est gradué par rapport à la fréquence ω .

$$T(j\omega) = |T(j\omega)|e^{j\varphi} = |T(j\omega)|(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

- b- **En coordonnées rectangulaire** : Défini par une courbe donnant la variation de la partie imaginaire en fonction de la partie réelle de la fonction de transfert.

$$\text{Im}(T(j\omega)) = f(\text{Re}(T(j\omega)))$$

Exemple : Soit un système avec une fonction de transfert $T(p) = (1+p)^{-1}$, on pose $p = j\omega \Rightarrow T(j\omega) = (1+j\omega)^{-1}$

- En coordonnées polaire :

$$T(j\omega) = (1+j\omega)^{-1} \Rightarrow \{|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega)^2}} \text{ et } \varphi = -\text{arctg} \frac{\omega}{1} = -\text{arctg} \omega$$

- En coordonnées rectangulaire

$$T(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} = \frac{1}{1+\omega^2} - j \frac{\omega}{1+\omega^2} = R_e T(j\omega) + I_m T(j\omega)$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow R_e = 1 \text{ et } I_m = 0 ; \omega \rightarrow \infty \Rightarrow R_e = 0 \text{ et } I_m = 0 \text{ et } \omega \rightarrow 1 \Rightarrow R_e = 0.5 \text{ et } I_m = -0.5$$

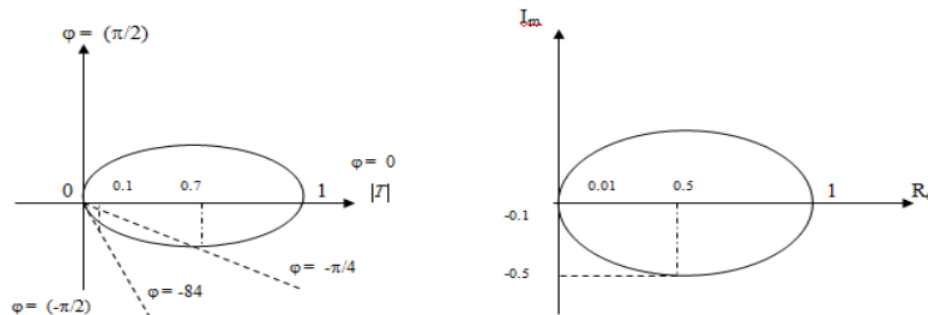


Figure 6-6 : Diagramme de Nyquist d'un système du 1er ordre

Chapitre 7

7 Etude de la stabilité des systèmes asservis

7.1 Définition de la stabilité

Un système stable peut être défini comme un système qui reste au repos à moins que l'on l'excite au moyen d'une source extérieure et qui revient au repos dès que toute excitation cesse. Un système stable peut être défini comme un système dont la réponse à l'impulsion tend vers zéro quand t tend vers l'infini.

On dira qu'un système linéaire est stable si, après avoir soumis son entrée à une brusque variation (échelon unité, par exemple) :

- Le mouvement amorcé par sa sortie reste borné en amplitude (c'est à dire que la sortie garde une valeur finie).
- Ce mouvement s'amortit plus ou moins vite et la sortie tend vers un état d'équilibre.

7.2 : Condition de la stabilité

Soit un système asservi défini par le schéma fonctionnel suivant :

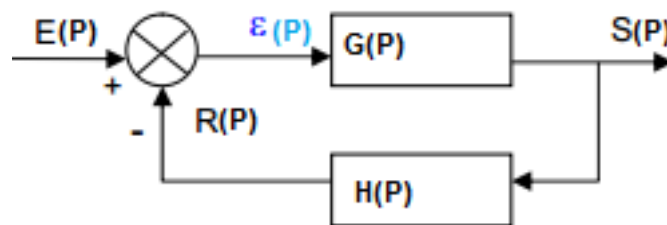


Figure 7-1 : Schéma fonctionnel d'un système linéaire simple

La fonction de transfert en boucle fermée

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p) \cdot \xi(p)}{\xi(p) + R(p)} = \frac{G(p) \cdot \xi(p)}{\xi(p) + \xi(p)[H(p) \cdot G(p)]} = \frac{G(p)}{1 + H(p) \cdot G(p)}$$

Pour étudier la stabilité, il faut prendre le dénominateur et l'annuler pour déterminer les pôles ou les racines de la fonction de transfert ce qui revient à étudier la fonction : $1 + T(p) = 0$, avec $T(p) = G(p) \cdot H(p)$, la fonction de transfert en boucle ouverte.

Le système est stable si les pôles de sa fonction de transfert en boucle fermée sont à partie réelle négative, ils se situent dans le demi-plan gauche.

$$R_e < 0 \Rightarrow \text{ système stable }$$

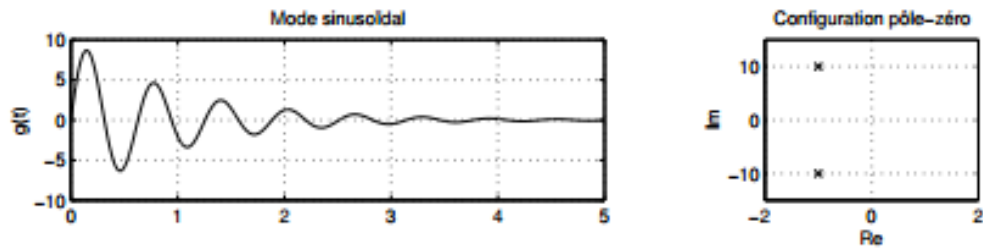
$$R_e = 0 \Rightarrow \text{ système juste oscillant }$$

$$R_e > 0 \Rightarrow \text{ système instable }$$

Conditions de stabilité

Un système linéaire est stable si aucune des racines du dénominateur de sa fonction de transfert n'a de partie réelle positive.

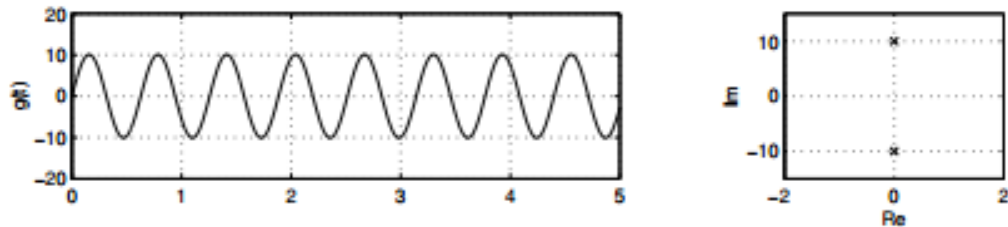
Exemples :
Premier cas : système stable

 Système oscillatoire amorti (2 racines complexes à partie réelles < 0)


(a)

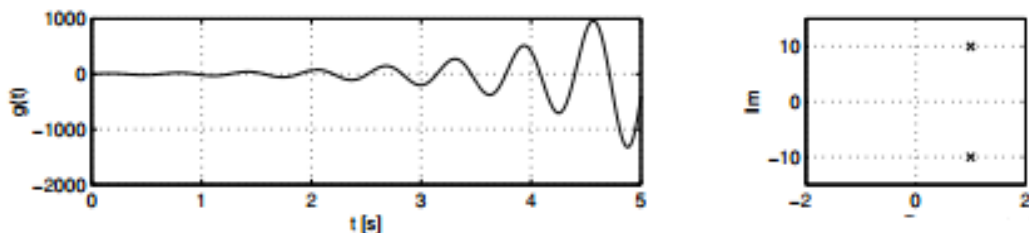
Deuxième cas : système juste oscillants.

Régime oscillatoire non amorti (2 racines imaginaires pures). Il peut être stable, s'il bascule vers le côté gauche ou instable, s'il bascule vers le côté droit, c'est pourquoi on l'appelle juste oscillants.



(b)

Troisième cas : système instable

 Régime oscillatoire divergent (2 racines complexes à partie réelles > 0)


(c)

Figure 7-2 : Comportements des systèmes selon la position et le signe des pôles (selon les réponses indicelles).

Pour l'étude de la stabilité on utilise soit les critères algébriques (Hurwitz et Routh) ou bien les critères géométriques (Bode, Nyquist et Black-Nichols).

7.3 : Critères algébriques de stabilité d'Hurwitz :

Ce critère est applicable à l'équation caractéristique d'un système en boucle fermée.

$$1 + T(p) = 0, \text{ avec } T(p) = G(p)H(p) : \text{ l'équation caractéristique.}$$

- Enoncé du critère d'Hurwitz

Soit $D(p)$ le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée.

$D(p)$ peut être écrit sous la forme :

$1+T(p) = 0$, avec $T(p) = G(p)H(p)$: l'équation caractéristique.

$$1+T(p) = A_m p^m + A_{m-1} p^{m-1} + \dots + A_1 p + A_0 = 0$$

(Équation caractéristique de la fonction de transfert en boucle fermée)

- Pour que le système soit stable, il faut et il suffit que les racines de $D(P)$ n'aient pas de
- Parties réelles positives.

Le critère d'Hurwitz n'est applicable que si tous les A_i sont strictement positif

$$\begin{vmatrix} A_{m-1} & A_{m-3} & A_{m-5} & \dots & \dots \\ A_m & A_{m-2} & A_{m-4} & \dots & \dots \\ 0 & A_{m-1} & A_{m-3} & \dots & \dots \\ 0 & A_m & A_{m-2} & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Le système est stable, si tous les A_i sont positives et si tous les déterminaux partiels sont positifs.

Exemples :

1) Equation caractéristique : $2p^5 + 7p^3 + 9p^2 + 5p + 2 = 0$

Solution : $A_4=0$ implique système instable

2) Equation caractéristique : $p^3 + 8p^2 + 17p + 10 + k = 0$

Solution : La condition de stabilité : $10 < K < 126$

Remarque : le critère d'Hurwitz est applicable pour le degré $m=3$, du système, pour $m > 3$, on applique le critère de Routh qui peut être aussi applicable pour le degré 3.

7.4 : Critères algébriques de stabilité de Routh:

Construction de la table de ROUTH :

Soit l'équation caractéristique :

$$1+T(P) = A_m P^m + A_{m-1} P^{m-1} + \dots + A_1 P + A_0 = 0$$

Le système est stable si tous les A_i sont positifs et tous les éléments de la 1^{ère} colonne sont positifs.

Pour le critère de Routh, on s'arrête à $m+1$ lignes

On arrange les coefficients sur la ligne dans la table de Routh :

	$A_m P_m$	$A_{m-1} P_{m-1}$	+	$A_0 P_0 = 0$
P^m	A_m	A_{m-2}	A_{m-4}
P^{m-1}	A_{m-1}	A_{m-3}	A_{m-5}
P^{m-2}	b_1	b_2	b_3
P^{m-3}	c_1	c_2	c_3
P^{m-4}	d_1	d_2	d_3

$$b_1 = \frac{A_{m-1}A_{m-2} - A_m A_{m-3}}{A_{m-1}}; b_2 = \frac{A_{m-1}A_{m-4} - A_m A_{m-5}}{A_{m-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 A_{m-3} - A_{m-1} b_2}{b_1}; c_2 = \frac{b_1 A_{m-5} - A_{m-1} b_3}{b_1}$$

Exemples :

- 1) Donner la condition de stabilité sur K, pour le système défini par son équation caractéristique suivante : $2p^4 + 7p^3 + 9p^2 + 5p + 2K + 1 = 0$

Solution :

2	9	$2k + 1$
7	5	0
7.57	$2k + 1$	0
$-1.84k + 4.08$	0	0
$-2k - 1$	0	0

$-0.5 < K < 2.2$ condition nécessaire et suffisante de stabilité

Si cette condition n'est pas vérifiée, c'est-à-dire, si :

- $K < -0.5$, il y a 1 seul changement de signe dans la 1^{ère} colonne ; donc un seul Pôle instable.
- $K > 2.2$, il y a 2 changements de signe dans la 1^{ère} colonne ; donc 2 pôles instables.
- Si ($K = -0.5$ ou $K = 2.2$), (frontière entre la stabilité et l'instabilité) on dit que le système est oscillant (marginale stable).

- 2) Etudier la stabilité du système défini par son équation caractéristique suivante : $p^4 + 2p^3 + 8p^2 + 4p + 3 = 0$

Solution :

1	8	3
2	4	0
6	3	0
3	0	0
3	0	0

Le système est stable car tous les A_i sont positifs et tous les éléments de la 1^{ère} colonne sont positifs.

7.5 : Critères géométriques de stabilité de Nyquist:

Le critère de Nyquist permet de déterminer la *stabilité d'un système bouclé* sur la base de sa réponse harmonique en *boucle ouverte*

- Enoncé du critère de Nyquist

La condition nécessaire et suffisante de stabilité d'un système asservi linéaire est que son lieu de transfert en boucle ouverte, parcouru de $\omega = -\infty$ à $\omega = +\infty$, entoure le point critique $(-1,0)$ dans le sens trigonométrique un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de la fonction de transfert en boucle ouverte. Étant donné un système asservi, défini par sa fonction de transfert en boucle ouverte $FTBO(p) = G(p).H(p)$.

La relation : $z = p - n$ donne le nombre z de zéros instables de l'équation caractéristique

$1 + FTBO(p) = 0$ et donc de pôles instables de la FTBF(p), avec :

- p : Nombre de pôles instables de la FTBO(p),
- n : Nombre de tours que fait le lieu complet de Nyquist (ω variant de $-\infty$ à $+\infty$) autour du point critique $(-1,0)$ dans le sens trigonométrique (sens antihoraire).

En particulier, le système asservi est stable, à condition que : $z = 0 \rightarrow p = n$

Exemple :

Soit un système asservi à retour unitaire dont la FTBO est :

$$G(P) = \frac{K}{1 - Tp} \text{ avec } T > 0$$

Discutons sa stabilité suivant les valeurs de K .

$K > 0$ (fig. 7-3.a). La FTBO(p) a un pôle instable $p = +1/T \rightarrow p = 1$

Le nombre de tours autour du point $(-1,0)$ est : $n = 0$. $z = p - n = 1 \neq 0$

1 pôle instable de la FTBF. Système instable en boucle fermée. Ce système est instable en boucle ouverte et instable en boucle fermée.

$K < -1$ (fig. 7-3.b) $p = 1$, $n = +1$, $z = p - n = 0$ Pas de pôle instable de la FTBF. Système stable en boucle fermée. Ce système est instable en boucle ouverte et stable en boucle fermée.

$-1 < K < 0$ (fig. 7-3.c) $p = 1$, $n = 0$, $z = p - n = 1$, 1 pôle instable de la FTBF. Système instable en boucle fermée. Ce système est instable en boucle ouverte et instable en boucle fermée.

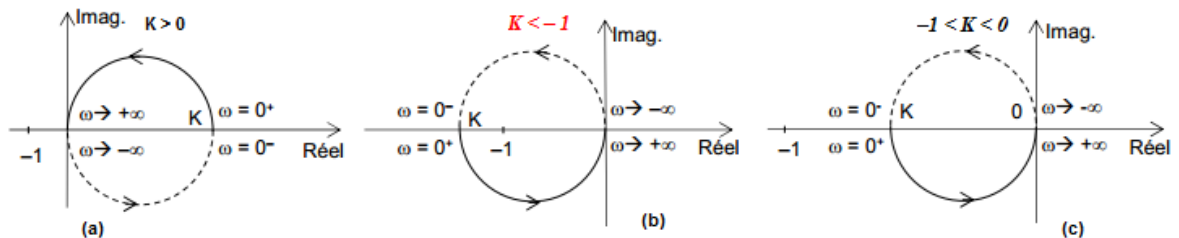


Figure 7-3: comportement du système selon la valeur de K

7.6 Critères géométriques de stabilité de Bode

a- Méthode analytique :

ΔG et $\Delta\varphi$ peuvent être calculés de la manière suivante :

$$\Delta G = \frac{1}{|T(j\omega_\pi)|} \text{ Avec } \text{Arg}T(j\omega_\pi) = -\pi : \text{marge de gain}$$

$$\Delta\varphi = 180^\circ - \text{Arg}T(j\omega_1) \text{ Avec } |T(j\omega_1)| = 1 : \text{marge de phase}$$

Dans le cas où ΔG et $\Delta\varphi$ sont positifs, alors le système est stable.

b- Méthode graphique :

Un système est stable si : $\Delta G < 0$ et $\Delta\varphi > 0$ sur le diagramme de Bode.

$\Delta G < 0$ par rapport à l'axe de ω

$\Delta\varphi > 0$ par rapport à l'axe $-\pi$

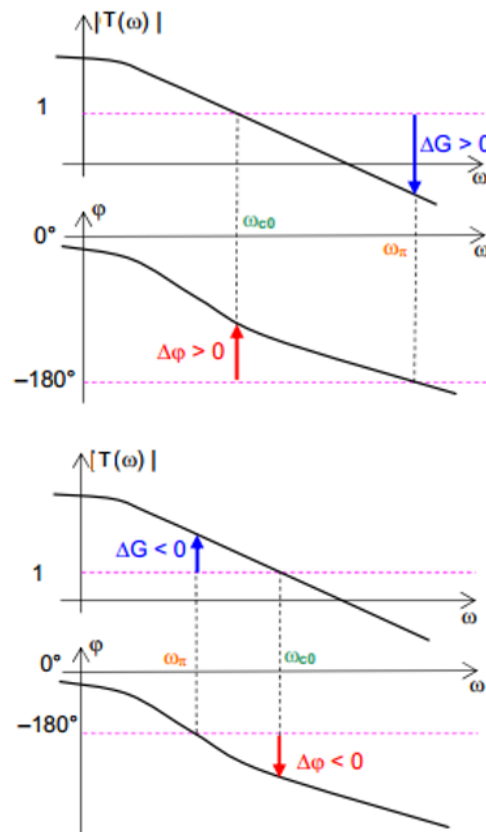


Figure 7-4 : Illustration des marges de gain et de phases sur le diagramme de Bode (cas d'un système stable : $\Delta G > 0$ et $\Delta\varphi > 0$ et instable $\Delta G < 0$ et $\Delta\varphi < 0$)

Remarque

Pour régler la stabilité d'un système, il est souvent délicat de raisonner en tenant compte des deux marges à la fois. Dans ce cas, on privilégie, en général, la marge de phase $\Delta\varphi$.

Chapitre 8

8 Etude de la précision des systèmes asservis

8.1 Introduction

On sait que le rôle d'un système asservi est de faire suivre à la sortie $s(t)$ une loi déterminée en général par une consigne $e(t)$. De même, le rôle d'un système de régulation est de maintenir la sortie égale à la consigne malgré des perturbations.

La qualité d'un système asservi est jugée par sa stabilité et sa rapidité, le dilemme stabilité-précision doit être satisfait, mais aussi par la précision avec laquelle il suit la loi d'entrée.

La précision est l'étude de l'erreur $\varepsilon(t)$ entre la sortie $s(t)$ et la consigne $e(t)$. La perturbation est représentée par $p(t)$ et on a supposé que son point d'application apparaisse dans la chaîne d'action comme le montre la figure suivante :

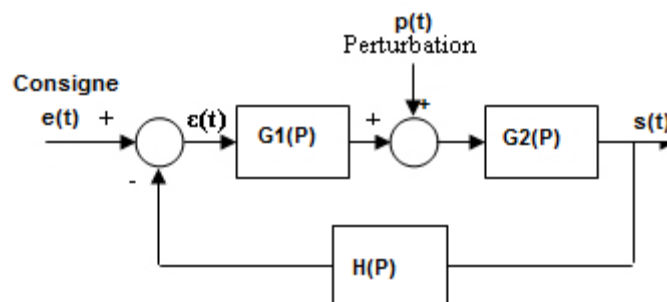


Figure 8-1 : Etude d'un système asservi

L'étude de la précision peut se faire soit par rapport à la consigne (fonctionnement en asservissement), soit par rapport aux perturbations (fonctionnement en régulation). On peut séparer ces deux cas et ensuite superposer les résultats en vertu du principe de la superposition.

8.2 Définition de la précision

La précision d'un asservissement, est définie par l'écart permanent $\varepsilon(t)$ qui existe entre la sortie réelle et celle que l'on désire obtenir. Par définition, on dira qu'un système est d'autant plus précis que le signal d'erreur $\varepsilon(t)$ est plus faible. L'idéal serait que l'on ait : $\varepsilon(t) = 0, \forall t$

On distingue deux types de précisions

Précision statique : définie à l'état permanent du système et on détermine alors l'erreur permanente qui est l'erreur en régime permanent entre la sortie et la loi d'entrée (Consigne).

Pour déterminer cette erreur on soumet le système à des entrées canoniques :

- échelon constant, on parle d'erreur indicielle ou d'erreur statique ;
- rampe, on parle erreur de traînage ou d'erreur de poursuite ou encore d'erreur en vitesse ;
- accélération, on parle d'erreur en accélération.

Précision dynamique : définie pendant l'état transitoire du système, on détermine alors l'erreur dynamique, qui est l'écart instantané entre la sortie et la consigne lors du régime transitoire suite à une variation de consigne ou suite à une perturbation.

Grande précision : $\varepsilon(t) = 0$

Faible précision : $\varepsilon(t) > 0$ et augmente

Evaluer la précision du système revient à engendrer une perturbation $p(t)$, comme un bruit par exemple, si une telle erreur doit exister, on souhaite qu'elle soit faible et qu'elle dure le moins longtemps possible.

8.3 La précision statique

Si on prend le schéma de la Figure 8.1, et on annule la perturbation, et en multipliant G_1 et G_2 , on obtient la Figure ci-après :

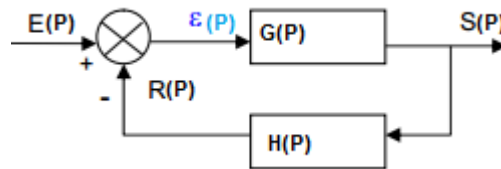


Figure 8-2 : Étude d'un système asservi simplifié.

On suppose $P(t) = 0$

$\xi(p) = E(p) - R(p)$ la précision statique relative $\frac{\xi(p)}{E(p)}$?

$$R(p) = S(p)H(p) \text{ et } S(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)H(p)} E(p) \Rightarrow \xi(p) = E(p) - H(p) \frac{G(p)}{1 + G(p)H(p)} E(p) \Rightarrow$$

$$\xi(p) = E(p) \left(1 - \frac{G(p)H(p)}{1 + G(p)H(p)} \right) \Rightarrow \frac{\xi(p)}{E(p)} = \left(1 - \frac{G(p)H(p)}{1 + G(p)H(p)} \right) = \left(\frac{1 + G(p)H(p) - G(p)H(p)}{1 + G(p)H(p)} \right) = \frac{1}{1 + G(p)H(p)}$$

Avec $T(p) = G(p)H(p)$ fonction de transfert

$$\text{en boucle ouverte} \Rightarrow \frac{\xi(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + T(p)}$$

Précision statique d'ordre n : ξ_{0n}

$$\xi_{0n} = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) : \text{régime permanent pour une entrée } e(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(t).$$

Et par application du théorème de la valeur finale, on a :

$$\xi_{0n} = \lim_{p \rightarrow 0} p \xi(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1}{p^{n-1}} \frac{1}{1 + T(p)} \right)$$

ξ_{0n} définit un système à retour unitaire, avec $T(p) = G(p)$

$$\xi_{0n} = \frac{E(p)}{1 + T(p)} = \frac{1}{p^n} \frac{1}{1 + T(p)}$$

Le comportement de $T(p)$, au voisinage de 0, dépend des pôles à l'origine $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{k}{p^\alpha}$ avec α : ordre du pôle à l'origine.

$$E(p) = \frac{1}{p^\alpha}$$

n est appelé classe du système

α : L'ordre du signal d'entrée canonique

$\alpha = \text{entier} \geq 1$. Si $\alpha = 1 \rightarrow$ échelon. Si $\alpha = 2 \rightarrow$ rampe. Si $\alpha = 3 \rightarrow$ Accélération

$$T(p) = \frac{k}{p^\alpha} \frac{1 + B_1 p + B_2 p^2 + \dots + B_n p^n}{1 + A_1 p + A_2 p^2 + \dots + A_m p^m}; \lim_{p \rightarrow 0} T(p) = \frac{k}{p^\alpha},$$

$$\xi_{0n} = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1}{p^{n-1}} \frac{1}{1 + T(p)} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1}{p^{n-1}} \frac{1}{1 + \frac{k}{p^\alpha}} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1}{p^{n-1}} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + k} \right)$$

1^{er} cas : $\alpha = 0$

$$n = 1: \xi_{01} = \frac{1}{1+k}; \quad n = 2 : \xi_{02} = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1}{p} \frac{1}{1+k} \right) = \infty \Rightarrow \forall n > 1: \xi_{0n} = \infty$$

2^{ème} cas : $\alpha \neq 0$

$$n = 1: \xi_{01} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + k} = 0; \quad n = \alpha + 1 : \xi_{0n} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^\alpha + k} = \frac{1}{k}$$

$$n > \alpha + 1: \xi_{0n} = \infty \Rightarrow \text{précision} = 0 \quad \text{et} \quad 1 \leq n \leq \alpha: \xi_{0n} = 0 \Rightarrow \text{précision} = \infty$$

Dans la Figure suivante, on donne le tracé du système avec les erreurs statiques correspondantes aux 3 entrées usuelles

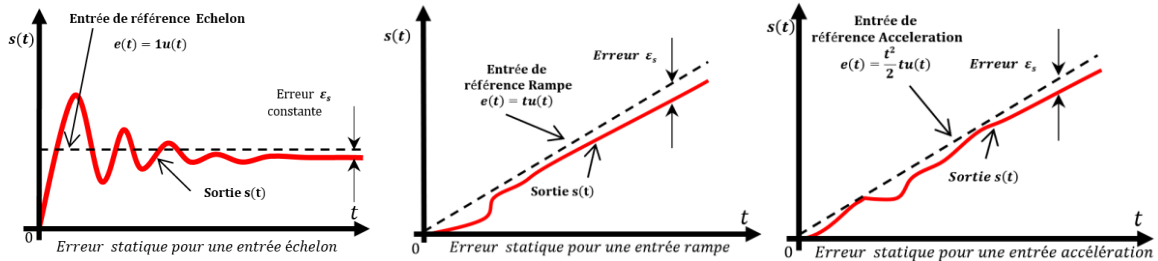


Figure 8.3 : Tracé du système avec les erreurs statiques correspondantes aux 3 entrées usuelles

Exemple :

Etudier les erreurs stationnaires d'un système à retour unitaire dont la fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$T(p) = \frac{1}{1+p} = G(p) \quad \text{avec retour unitaire } H(p) = 1$$

- Analyse directe

$$\alpha = 0, \quad \xi_{01} = \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}, \quad \xi_{02} = \infty, \quad \xi_{0n} = \infty$$

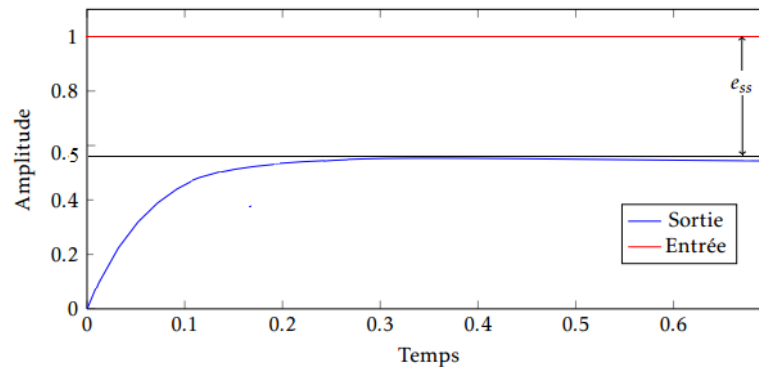
- Analyse indirecte

$$\text{En boucle fermée : } F(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{\frac{1}{1+p}}{1+\frac{1}{1+p}} = \frac{1}{2+p}$$

$$n = 1: e(t) = 1u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow S(p) = E(p)F(p) = \frac{1}{p} \frac{1}{2+p} \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})u(t)$$

$$\xi_{0n} = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) \quad \text{avec} \quad \xi(t) = e(t) - s(t) \Leftrightarrow \xi(t) = u(t) - \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})u(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})u(t)$$

$$n = 1 : \xi_{01} = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (e(t) - s(t)) = \frac{1}{2},$$



$$n > 1 : \text{avec } E(p) = \frac{1}{p^2} \Rightarrow S(p) = \frac{1}{p^2} \frac{1}{p+2} \Rightarrow$$

$$s(t) = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}(1 - e^{-2t}) \right) u(t) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \Rightarrow \xi_{02} = \lim_{t \rightarrow \infty} (e(t) - s(t)) = \infty$$

8.4 La précision dynamique

Définition : la précision dynamique est définie à l'état transitoire du système

On a le système à retour unitaire avec $e(t) = u(t)$.

1. Système du 1^{er} ordre : $\alpha = 0$

$$G(p) = \frac{k}{1 + \tau p} = T(p) \quad \text{avec } \xi(t) = e(t) - s(t) \text{ on a : } S(p) = F(p)E(p) = \frac{\frac{k}{1 + \tau p}}{1 + \frac{k}{1 + \tau p}} E(p) \Leftrightarrow$$

$$S(p) = \frac{k}{k + 1 + \tau p} E(p), \text{ ou bien si on pose } k' = \frac{k}{1 + k} \text{ et } \tau' = \frac{\tau}{1 + k} \text{ on aura : } S(p) = \frac{1}{p} \left(\frac{k'}{1 + \tau' p} \right) \Rightarrow$$

$$s(t) = k'(1 - e^{-t/\tau'})u(t) \Rightarrow \xi(t) = u(t) - s(t) = (1 - k'(1 - e^{-t/\tau'}))u(t) : \text{erreur dynamique}$$

$$l'erreur statique : \xi_{01} = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 1 - k' = 1 - \frac{k}{1 + k} = \frac{1}{1 + k} : \text{système très précis } \xi_{01} \text{ diminue } \downarrow \text{ quand } k \uparrow \text{ augmente}$$

Tableau 8-1:

α	0	1	2	3
Entrée				
Impulsion $e(t) = E_0 \delta(t)$	0	0	0	0
Echelon de position $e(t) = E_0 u(t)$	$\frac{E_0}{1 + K}$	0	0	0
Echelon de vitesse $e(t) = E_0 t u(t)$	∞	$\frac{E_0}{K}$	0	0
Echelon d'accélération $e(t) = \frac{E_0}{2} t^2 u(t)$	∞	∞	$\frac{E_0}{K}$	0

2. Système du 2^{ème} ordre

Système à retour unitaire et $e(t) = u(t)$: entrée échelon

$$T(p) = G(p) = \frac{k}{p(1+\tau p)} \Rightarrow F(p) = \frac{G(p)}{1+T(p)} = \frac{\frac{k}{p(1+\tau p)}}{1 + \frac{k}{p(1+\tau p)}} = \frac{k}{p(1+\tau p) + k} = \frac{k}{\tau p^2 + p + K}$$

$$F(p) = \frac{1}{1 + 2\eta \frac{p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}} : \text{ Elément oscillant , pour ne pas faire de confusion avec l'erreur } \xi,$$

on a choisit η , comme facteur d'amortissement

$$\eta = \frac{1}{2\sqrt{k\tau}} \text{ et } \omega_n = \sqrt{\frac{k}{\tau}}$$

Si $\eta > 1 \Rightarrow$ réponse sans oscillation et Si $\eta < 1 \Rightarrow$ réponse avec oscillation

1^{er} cas : Si $\eta < 1$, on a : $S(p) = F(p)E(p) \Rightarrow s(t) = 1 - Ae^{-\eta\omega_p t} \sin(\omega_p t + \varphi) \Rightarrow \xi(t) = A e^{-\eta\omega_p t} \sin(\omega_p t + \varphi)$

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\eta^2}, \quad \varphi = \arctg\left(\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}\right) \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}},$$

Avec ω_n : pulsation propre du système non amortie et ω_p : pulsation des oscillations de la réponse

2^{ème} cas : Si $\eta > 1 \Rightarrow$ pas d'oscillation $\xi(t)$ meilleur pour $k \uparrow$ mais il ne faut pas trop augmenter k

Chapitre 9

9 Analyse et synthèse des systèmes asservis linéaires

9.1 Introduction

Analyser un système revient à déterminer son degré de stabilité, voir son comportement au régime permanent et analyser la réponse transitoire.

Pour analyser un système, il faut :

- Déterminer les équations différentielles de chacun des constituants du système
- Déterminer la transmittance opérationnelle.
- Déterminer le modèle (schéma fonctionnel ou graphe de fluence)
- Mettre en forme de modèle du système en reliant les blocs dynamiques
- Déterminer les caractéristiques du système, soit par les méthodes fréquentielles, à savoir le diagramme de Bode, la représentation de Nyquist et les Abaques de Black, ou bien la méthode temporelle.

9.2 Analyse et Synthèse des Systèmes Asservis par l'Abaque Nichols-Black

9.2.1 Analyse par l'Abaque Nichols-Black

En appliquant le critère de revers dans le plan de Black, et si en se déplaçant sur le lieu de Black du système en boucle ouverte dans le sens des ω croissants on laisse le point critique (-180° , 0 dB) à droite. Le système en boucle fermée est stable.

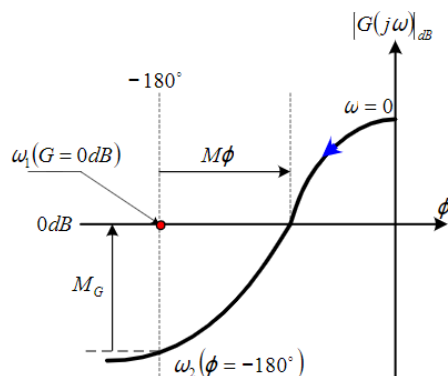


Figure 9-1: critère du revers dans le plan de Black

9.2.2 Présentation des abaques de Nichols-Black

Soit le schéma bloc d'un système Asservi linéaire à retour unitaire.



Figure 9-2 : Système asservi linéaire à retour unitaire

La fonction de transfert en boucle ouverte est : $T(p) = T(j\omega) = |T(j\omega)|e^{-j\varphi}$

La fonction de transfert en boucle fermée est : $F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \Rightarrow F(p) = \frac{T(p)}{1+T(p)}$

$F(j\omega) = \frac{T(j\omega)}{1+T(j\omega)}$ et soit $\text{Arg}(T(j\omega)) = \varphi(\omega)$

$$\Rightarrow F(j\omega) = \frac{|T(j\omega)e^{j\varphi}}{1+|T(j\omega)e^{j\varphi}} \Rightarrow F(j\omega) = \frac{|T(j\omega)(\cos \varphi + j \sin \varphi)}{1+|T(j\omega)(\cos \varphi + j \sin \varphi)} \text{ et on a donc : } F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\psi} \Rightarrow$$

$$|F(j\omega)| = \frac{|T(j\omega)|}{\sqrt{(1+|T(j\omega)|\cos \varphi)^2 + (|T(j\omega)|\sin \varphi)^2}} = \frac{|T(j\omega)|}{\sqrt{1+|T(j\omega)|^2 + 2|T(j\omega)|\cos \varphi}} \quad (1)$$

$$\text{Arg}(F(j\omega)) = \varphi - \arctg\left(\frac{|T(j\omega)|\sin \varphi}{1+|T(j\omega)|\cos \varphi}\right) \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) permettent, à partir du gain et de la phase du système en boucle ouverte, de déterminer le gain et la phase du système bouclé à retour unitaire.

Les calculs sont souvent longs et fastidieux. Une solution graphique consiste à utiliser les abaques de Black- Nichols.

Les courbes iso gains et isophases tracées sur l'abaque de Black permettent à chaque point du lieu de Black de la transmittance $T(j\omega)$, d'associer le gain et la phase de $F(j\omega)$.

9.2.3 Utilisation des abaques

On trace sur l'abaque utilisé ou sur une feuille de papier transparente posée sur l'abaque, le lieu de transfert relatif à la FTBO $T(j\omega)$. On gradue cette courbe en fonction de ω . Ce lieu coupe les faisceaux de courbes $|F(j\omega)|_{dB} = \text{const}$ et $\text{Arg}(F(j\omega)) = \text{const}$. de l'abaque

On note alors, pour diverses valeurs de ω , les valeurs de $|F(j\omega)|_{dB}$ et $\text{Arg}(F(j\omega))$

Et ensuite, on prélève sur l'abaque, la marge de gain, la marge de phase, le gain statique en BO, et en BF, La pulsation de résonance en boucle fermée ω_R , le facteur de résonance, le pic de résonance : MP et la pulsation de coupure à -3dB.

9.3 Analyse et Synthèse des Systèmes Asservis par la méthode des Lieux de Pôles

Soit le système asservi représenté par le schéma fonctionnel suivant :

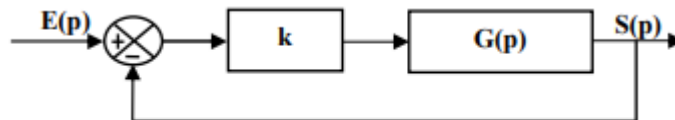


Figure 9-3 : Exemple d'un système à retour unitaire

La fonction de transfert du système en boucle ouverte $T(p) : T(p)=k.G(p)$ et du système en boucle fermée $F(p) : k.G(p)/ 1+k.G(p)$ $H(p)= k.G(p)/1+k.G(p)$

Les pôles du système en boucle fermée sont les racines de l'équation caractéristique : $1+kG(p)=0$.

On constate que les pôles évoluent en fonction de k qui varie de 0 à ∞ .

Alors : le lieu de pôles est donné par :

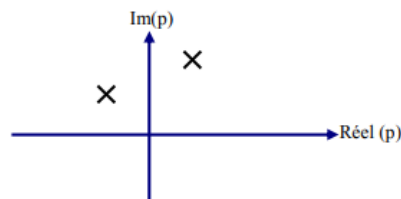


Figure 9-4 : Analyse du Système par la méthode des Lieux de Pôles

Exemple :

Soit la fonction de transfert du système en boucle ouverte :

$$G(p) = \frac{(p+1)}{p(p+2)}$$

Les pôles du système en boucle ouverte : $p_1 = 0; p_2 = -2 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow 2$ branches.

Les zéros du système en boucle ouverte : $z_1 = -1; m = 1 \Rightarrow (n - m) = 1 \Rightarrow 1$ direction asymptotique.

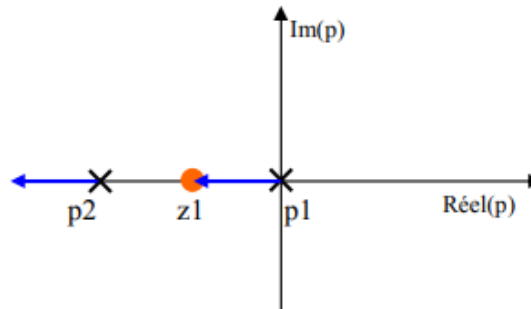


Figure 9-5 : Analyse du système par la méthode des Lieux de Pôles

Les asymptotes concourent en un point de l'axe des réels d'abscisse x_a :

$$x_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

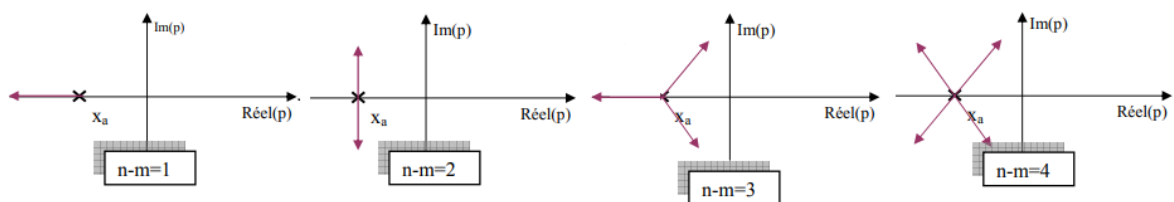


Figure 9-6 : Diverses configurations d'asymptotes

9.4 Analyse et Synthèse des Systèmes Asservis Linéaire par la Méthode Temporelle

9.4.1 Rapidité d'un système asservi

L'étude temporelle consiste à étudier les trois caractéristiques fondamentales d'un système asservi linéaire, Rapidité, Stabilité, et Précision.

→ Un système est dit performant s'il est rapide, stable et précis.

Généralement, le comportement dynamique d'un système peut être entièrement caractérisé par la réponse temporelle de ce système suite à une entrée échelon puisqu'elle est facile à générer. La réponse transitoire d'un système suite à une entrée échelon dépend des conditions initiales. Par commodité dans la comparaison des réponses transitoires de différents systèmes, il est plus pratique d'utiliser les conditions initiales standards (système au repos à l'instant initial et toutes les dérivées par rapport au temps sont nulles).

Les caractéristiques des réponses peuvent alors être comparées. La réponse transitoire des systèmes asservis pratiques présente souvent des oscillations amorties avant d'atteindre le régime permanent. Les critères de performances, communément utilisés pour la caractérisation des systèmes asservis linéaires dans le domaine temporel, sont définis comme suit :

- Temps de stabilisation t_s : c'est le temps d'établissement (**settle time**) cherché à $\pm 5\%$ (ou à $\pm 2\%$) de $s(\infty) \Rightarrow$ pour les systèmes périodiques amortis
- Temps de stabilisation t_r : le temps de réponse (**rise time**) à 95% de $s(\infty)$ pour les systèmes aperiodiques
- Temps de pic t_p : C'est le temps mis pour atteindre le 1er dépassement \Rightarrow C'est le temps de pic (peak time).
- Temps de retard (**time Delay**) stabilisation t_d : il est défini comme étant le temps nécessaire pour que la réponse atteigne la moitié de sa valeur finale.
- Dépassement maximum d : c'est la valeur du pic maximal de la réponse mesurée relativement à l'unité. Si la valeur finale du régime permanent diffère de l'unité, on utilise plus souvent le dépassement maximal exprimé en pourcentage. Il est défini par :

$$d \% = 100 \% (s(t_p) - s(\infty)) / s(\infty).$$

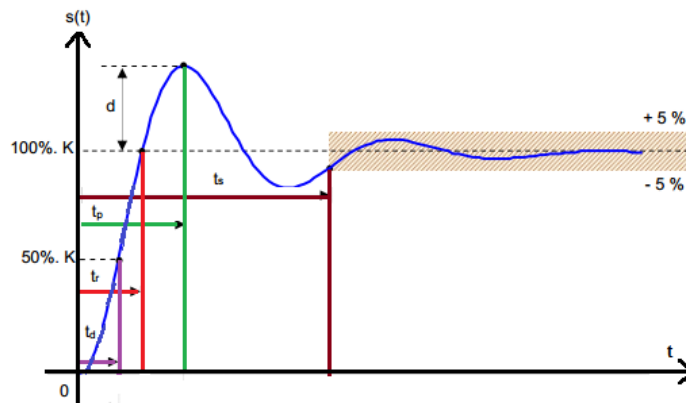


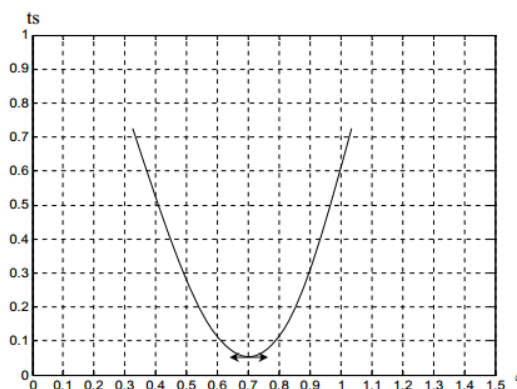
Figure 9-7 : Caractéristiques de la réponse transitoire.

9.4.2 Application sur le système de 2^{ème} ordre

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{b}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{\frac{b}{a_2}}{p^2 + \frac{a_1}{a_2} p + \frac{a_0}{a_2}}$$

$$\text{Avec : } \omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}, \quad 2\xi\omega_0 = \frac{a_1}{a_2} \Rightarrow 4\xi^2\omega_0^2 = \frac{a_1^2}{a_2^2} \Rightarrow 4\xi^2 = \frac{a_1^2}{\omega_0^2 a_2^2} = \frac{a_1^2}{\frac{a_0}{a_2} a_2^2} = \frac{a_1^2}{a_0 a_2} \Rightarrow \xi = \frac{0.5a_1}{\sqrt{a_0 a_2}}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \quad \text{et} \quad t_s = \frac{3}{\xi\omega_0} (\hat{a} \pm 5\%)$$


 Figure 9-8 : Le temps t_s en fonction du coefficient d'amortissement ξ

On constate que le temps de pic et le temps de montée diminue. Le temps t_s diminue si m croit de 0 à 0.7 puis augmente avec ξ . Le temps de réponse le plus court est obtenu pour $\xi=0.7$. En particulier $\xi=0.7$ est considéré comme la valeur optimale pour des nombreux systèmes. La rapidité d'un système de second ordre est étroitement liée à ξ . Pour un système asservi d'ordre quelconque, on va étudier de même l'amortissement.

9.4.3 Critère algébrique d'amortissement : Critère de Naslin

$$F(P) = \frac{b}{a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_1 P + a_0}$$

Par analogie avec les systèmes de second ordre, on définit les rapports caractéristiques :

$$\alpha_1 = \frac{a_1^2}{a_0 a_2} ; \quad \alpha_3 = \frac{a_3^2}{a_2 a_4} ; \quad \alpha_{n-1} = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2} a_{n-3}} \Rightarrow \alpha_i = \frac{a_i^2}{a_{i-1} a_{i+1}}$$

Le critère algébrique d'amortissement :

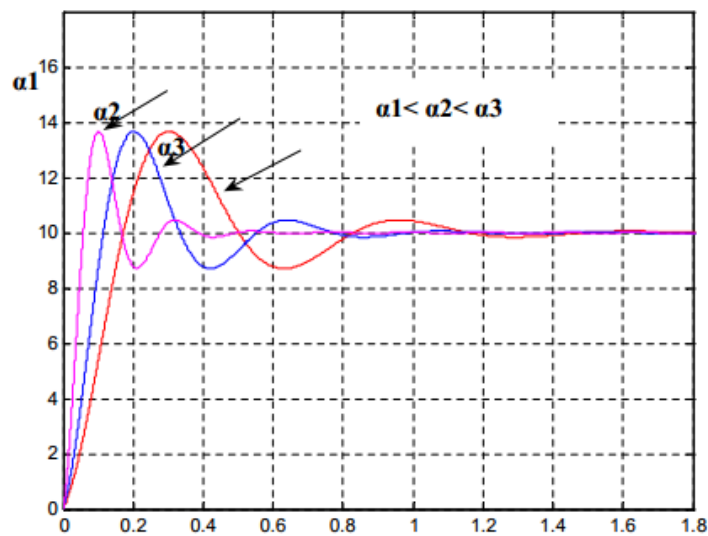


Figure 9-9 : Réponses temporelles

Le critère algébrique d'amortissement impose aux valeurs α_i d'être \geq à une valeur α bien déterminée

Tableau 9-1

α	1.6	1.75	2	2.4
$d\%$	40%	20%	6%	1%
ξ	0.3	0.45	0.7	0.9

Pour un système d'ordre 2 on a :

$$\alpha = \frac{1}{2}(4.8 - \log_{10}(d\%))$$

$$t_p = 2.2 \frac{a_1}{a_2} \text{ et } \log_{10} d\% = 4.8 - 2\alpha$$

Résumé sur la rapidité :

- Pour un système du premier ordre :

$$tr_{5\%} = 3T \quad \text{avec } T = \text{const de temps}$$

Pour un système du second ordre :

$$tr_{5\%} \text{ mini pour } \xi \text{ ou } m = 0.69 \text{ alors } tr_{5\%} = 3 / \omega_0$$

Remarque

Naslin préconise pour les coefficients alpha définis $\alpha > 2$, ce qui correspond à un amortissement de $4\xi^2 = 2$ et donc $\xi = 0.707$ qui est l'amortissement optimal produisant un dépassement de 4.7%, le dépassement pour un système d'ordre 3 reste inférieur à 5%.

- Et dans le domaine fréquentiel, en appliquant le critère de revers pour un système de fonction de transfert en boucle ouverte et en chaîne directe $G(p)$, on résume avec les marges de gain et de phase, pour définir la rapidité et déterminer les degrés de stabilité.

Le système est stable en boucle fermée si, en parcourant le lieu de Black-Nichols dans le sens des ω croissants, on laisse le point critique à droite.

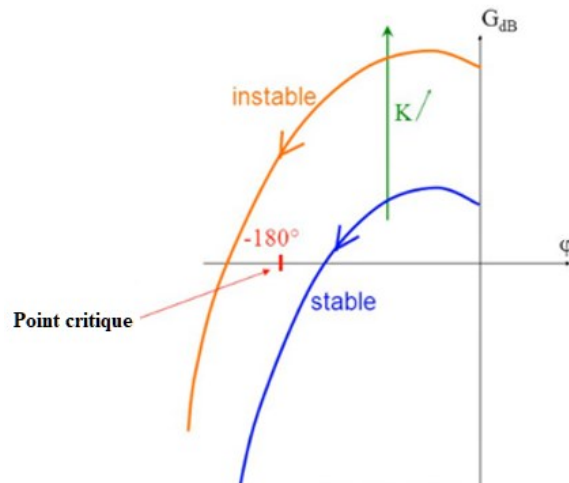


Figure 9-10 : Stabilité dans le diagramme de Black-Nichols

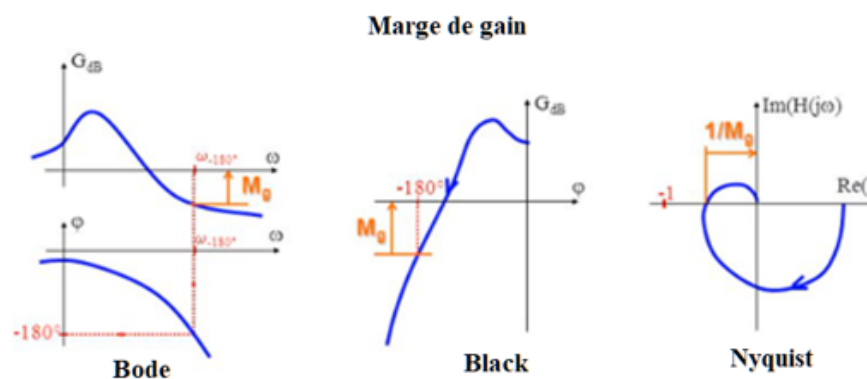


Figure 9-11 : Définitions des marges de gain dans les trois diagrammes

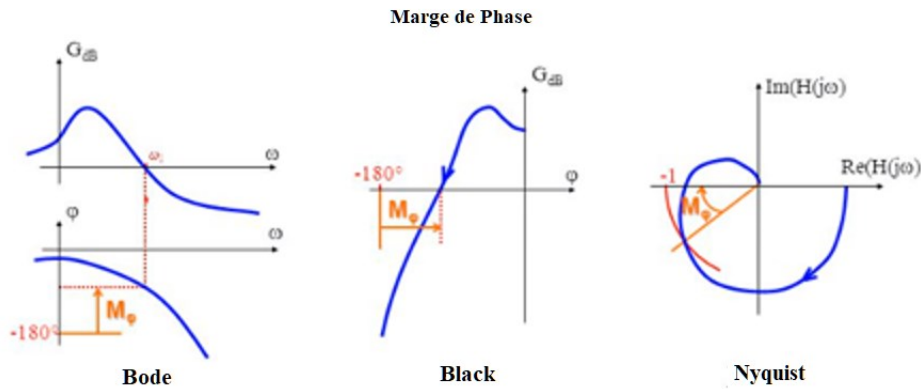


Figure 9-12 : Définitions des marges de phase dans les trois diagrammes

9.4.4 Précision d'un système asservi

La précision d'un système asservi est étroitement liée à l'erreur statique entre la consigne et la sortie réelle mesurée.

$$\text{Si } T(p) = \frac{k}{p^\alpha} \quad \text{on a : } \varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1+T(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + \frac{k}{p^\alpha}}$$

$$\text{Pour } \alpha = 0, \text{ et l'entrée échelon } \Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p} \Rightarrow \varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0}{1+k} = \frac{E_0}{1+k}$$

$$\text{Pour } \alpha = 1 \text{ et l'entrée échelon } \Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p} \Rightarrow \varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0}{1 + \frac{k}{p}} = 0$$

Conclusion :

- La précision augmente si α augmente
- L'erreur statique pour une entrée impulsionnelle est nulle pour toute valeur de α
- Pour une classe donnée, la précision se détériore si le signal d'entrée plus dur
- On appelle erreur statique de position dans le cas où l'entrée est un échelon de vitesse

Chapitre 10

10 Correction des systèmes asservis

10.1. Introduction

La sortie du procédé que l'on commande doit évoluer pour suivre la consigne demandée, il faut donc à tout instant appliquer à l'entrée du procédé, la commande appropriée. Cette commande est calculée par un ensemble de traitements d'informations, le correcteur qui utilise des opérateurs (sommateurs, gains, intégrateurs, dérivateurs) élaborant la commande à partir du signal d'erreur et des mesures auxiliaires disponibles.

Sans mettre en jeu d'énergie appréciable, le correcteur constitue la partie 'intelligente' de l'asservissement et sa détermination judicieuse confère à l'asservissement ses qualités.

10.2. Le but de la correction

Le concepteur de l'asservissement rencontre deux types de situations, auxquelles, il doit faire face :

- Assurer une réponse acceptable pour des signaux de consigne définis en fonction du temps
- Fournir des caractéristiques fréquentielles (gain, déphasage) demandées dans une bande de fréquences

On impose les qualités de l'asservissement en termes de spécifications temporelles dans le premier cas et en spécifications fréquentielles dans le second cas.

Le but de la correction est de doter l'asservissement de qualités attendues, par le calcul et l'implantation du correcteur nécessaire.

10.3. Structure des correcteurs

10.3.1. Fonctions de transfert des correcteurs

L'obtention des spécifications résulte du calcul approprié de l'action de l'entrée à envoyer à l'actionneur, à partir des informations disponibles (la consigne, la sortie...), les signaux intermédiaires accessibles sur le processus dans un schéma de régulation linéaire. On peut associer à chaque information utilisée, la fonction de transfert qui traduit sa contribution au calcul de l'action. Le correcteur comporte donc plusieurs fonctions de transfert reliant les signaux utilisés (sortie, consigne) à la commande.

10.3.2. Structure de la commande.

La Figure 10-1, montre l'organisation générale d'une chaîne de commande. On y trouve le comparateur, le premier bloc $C_p(p)$ agit directement à partir de la consigne, il réalise une commande dite prédictive, il force la commande à se préparer à aller dans la bonne direction sans attendre le résultat effectif de sortie.

Le bloc $CE(p)$ est dit correcteur série ou cascade, ce bloc est le cœur de l'asservissement c'est lui qui fixe la précision, le bloc $CA(p)$ est dit correcteur parallèle, n'apportant le plus souvent qu'une contribution transitoire

Les 2 blocs du procédé ou système $G(p)$ et de la chaîne de retour $H(p)$

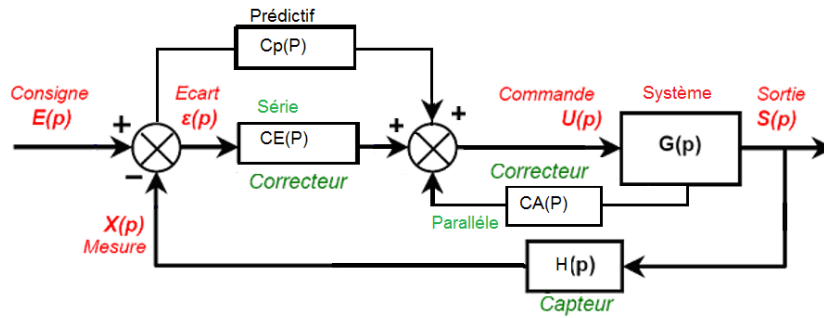


Figure 10-1 : Structure générale d'un système avec correction

Puisque la plus utilisée est la structure série, on va étudier notre chaîne de commande avec cette dernière dans le schéma suivant :

10.4. Correction série

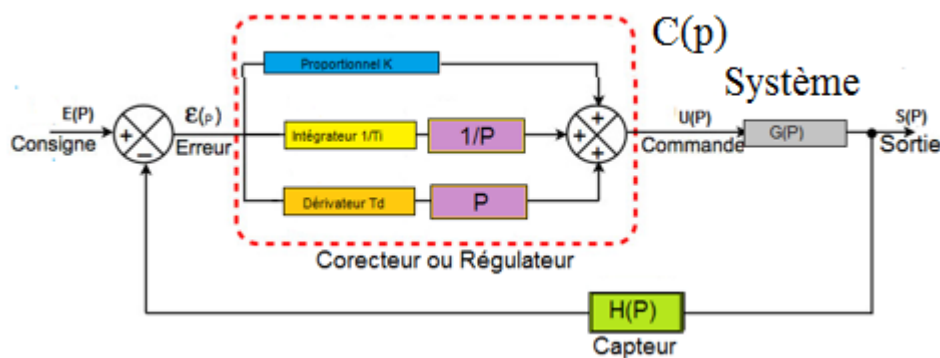


Figure 10-2 : Système avec correction série PID

10.4.1. -Intérêts et réglage

- Boucles internes rapides réalisant des régulations partielles
- Variables internes du processus bien asservies
- Elimination rapide des perturbations internes
- Réglage de la boucle interne en premier (rapidité, bande passante)
- Réglage de la boucle externe ensuite

10.4.2. Exemples de synthèse de correcteurs dans le domaine temporel et fréquentiel

On suppose maintenant que le système est à retour unitaire, et que la fonction de transfert $H(p)$ du système est de type passe bas. On ajoute un correcteur $C(p)$ en série avec $H(p)$.

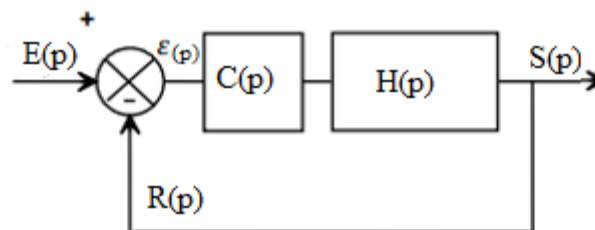


Figure 10-3 : Exemple d'un système à retour unitaire avec correction

- Correcteur P proportionnel :

Si le correcteur $C(p)$ correspond à un gain Kp pur, la fonction de transfert de l'erreur devient. :

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + k_p H(p)}$$

Si le gain Kp est très grand, l'erreur sera réduite, mais on observera une diminution de la marge de phase qui peut conduire à l'instabilité. On retiendra, que l'augmentation du gain proportionnel Kp :

- Réduit l'erreur statique, ce qui est bénéfique puisque la précision augmente,
- Réduit la marge en gain et phase ce qui est néfaste puisque la stabilité diminue.

Il y a dilemme entre stabilité et précision pour une correction proportionnelle (Kp)

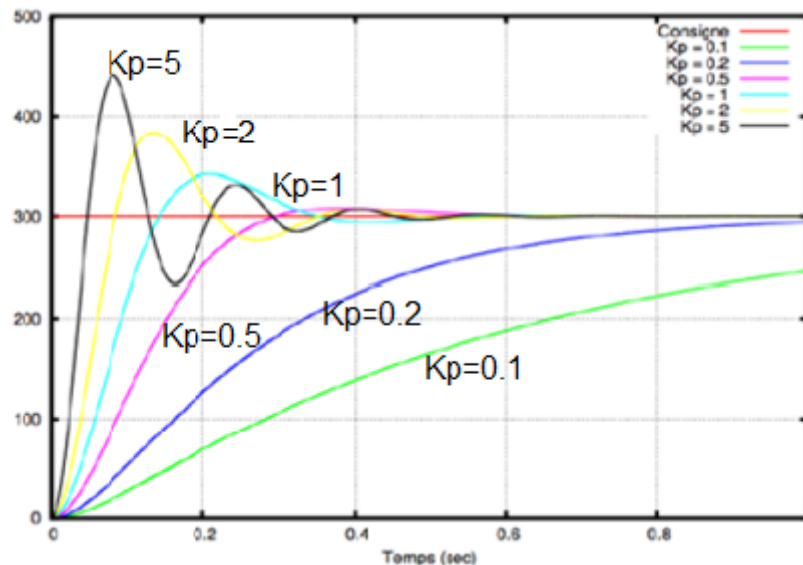


Figure 10-4 : Modélisation sous Matlab de la réponse à un échelon

- Correcteur PI proportionnel intégral :

Cas d'un système bouclé unitaire avec une fonction de transfert du système du premier ordre

$$H(p) = \frac{H_0}{1 + \tau p}$$

Le correcteur **PI** est noté $C(p)$, de fonction de transfert :

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$$

L'erreur statique est nulle dans ce cas :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + C(p)H(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E}{1 + C(p)H(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E}{1 + K \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) \left(\frac{H_0}{1 + \tau p} \right)} = 0$$

La présence d'une intégration ($\frac{1}{T_i p}$) dans la boucle annule l'erreur statique, le système est dit de classe 1.

Un correcteur PI apportant une intégration dans la boucle, l'erreur statique (entrée de type échelon) devient nulle.

- Correcteur PID Proportionnel, Intégral, Dérivé

Le correcteur PID a pour expression :

$$C(p) = Kp\left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p\right)$$

On peut définir le correcteur PID série avec sa fonction de transfert :

$$C(p) = Kp\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)(1 + T_d p)$$

Résumé de l'action des trois types de correction (PID) :

- **Action proportionnelle P** : Elle diminue l'erreur statique sans l'annuler, augmente la rapidité donc la bande passante, ce qui réduit la stabilité.
- **Action intégrale I** : Elle annule l'erreur statique, diminue la stabilité (réduction de la marge de phase) et ralentit le système.
- **Action dérivée D** : Elle n'a pas d'effet sur l'erreur statique, mais augmente la rapidité du système et augmente sa stabilité.

10.5. Méthodes empiriques de réglage des correcteurs

L'analyse du système avec un PID est simple mais sa conception peut être délicate, voire difficile, car il n'existe pas de méthode unique pour résoudre ce problème. Il faut trouver des compromis, le régulateur idéal n'existe pas. En général, on se fixe un cahier des charges à respecter sur la robustesse, le dépassement et le temps d'établissement du régime stationnaire.

Les méthodes de réglage les plus utilisées en théorie sont les méthodes de Ziegler-Nichols (en boucle ouverte et boucle fermée), la méthode de P. Naslin (polynômes normaux à amortissement réglable), la méthode du lieu de Nyquist inverse (utilise le diagramme de Nyquist). Le diagramme de Black permet d'en constater très visuellement les effets.

10.5.1. Méthode de Ziegler-Nichols

Principe

Approche 1 : Système stable en boucle ouverte

Détermination du réglage d'une correction P, PI, PID associée à un système sans connaissance précise de la FT du système.

Si le système admet une réponse indicielle aperiodique, on caractérise le système par un modèle simplifié identifié ci-dessous :

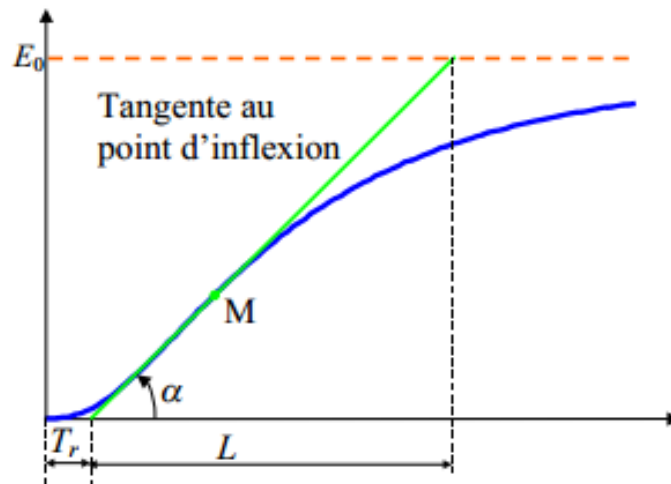


Figure 10-5 : Caractéristiques de la réponse transitoire

Intégrateur avec retard : $F(P) = \frac{a}{P} e^{-TrP}$ avec $a = \tan g(\alpha)$ et Tr et a : tiré à partir du tracé de la tangente au point d'inflexion M

Approche 2 : Système instable en boucle ouverte.

On étudie le comportement du système en boucle fermée avec un correcteur proportionnel de gain k . On augmente le gain k jusqu'à l'obtention d'oscillations entretenues : c'est le phénomène de pompage.

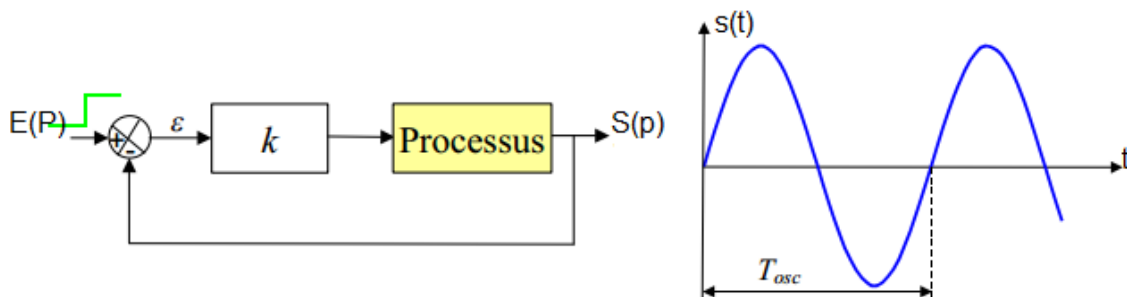


Figure 10-6 : Utilisation d'un correcteur proportionnel avec sa réponse.

Le phénomène de pompage est caractérisé par le gain limite k_{osc} et la période des oscillations T_{osc} .

- Réglage des paramètres des correcteurs

A partir des paramètres identifiés précédemment, Ziegler et Nichols ont proposé des réglages qui assurent un dépassement de 30 à 50% de la réponse indicielle du système en BF

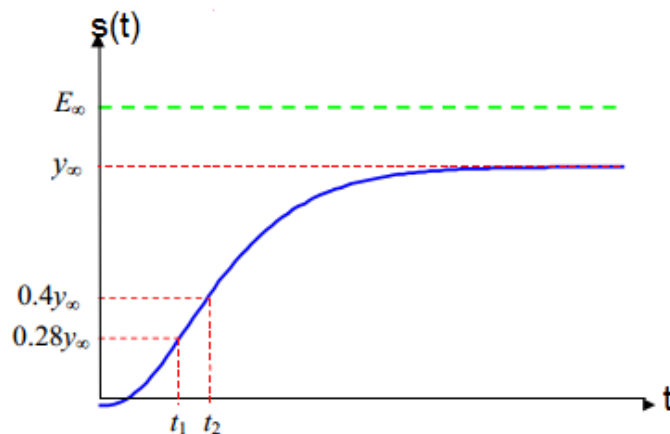
Tableau 10-1 : Paramètres des correcteurs PID (Ziegler et Nichols)

Type de correcteur	Correcteurs $C(p)$	Essai indiciel en BO (a, Tr)	Essai de pompage $(kosc, Tosc)$
Proportionnel P	Kc	$Kc = \frac{1}{aTr}$	$Kc = 0.5kosc$
Proportionnel Intégral PI	$Kc \frac{1+T_i p}{T_i p}$	$Kc = \frac{0.9}{aTr} ; T_i = 3.3Tr$	$Kc = 0.45kosc$ $T_i = 0.83Tosc$
Proportionnel Intégral Dérivée PID	$Kc \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$	$Kc = \frac{1.2}{aTr}$ $T_i = 2Tr$ $T_d = 0.5Tr$	$Kc = 0.6kosc$ $T_i = 0.5Tosc$ $T_d = 0.125Tosc$

10.5.2. Autres méthodes de réglage simplifié

- Méthode de Broïda

Si le système admet une réponse indicielle apériodique en BO, on identifie un modèle du système sous la forme d'un 1er ordre avec retard.


Figure 10-7 : Caractéristiques de la réponse temporelle

Paramètres du modèle :

$$F(p) = \frac{ae^{-Trp}}{1 + \tau p} \quad \text{Avec } a = \frac{y_\infty}{E_\infty}, \tau = 5.5(t_2 - t_1) \quad \text{et } Tr = 2.8t_1 - 1.8t_2$$

- Réglage type d'un système intégrateur avec retard : $F(p) = \frac{a}{p} e^{-Trp}$

Tableau 10-2 : Paramètres des correcteurs PID

Correcteur / Paramètres	P	PI	PID série	PID mixte
K_c	$\frac{0.8}{aT_r}$	$\frac{0.8}{aT_r}$	$\frac{0.85}{aT_r}$	$\frac{0.9}{aT_r}$
T_i		$5T_r$	$4.8T_r$	$5.2T_r$
T_d			$0.4T_r$	$0.4T_r$

10.6. Exemple de système non corrigé et corrigé

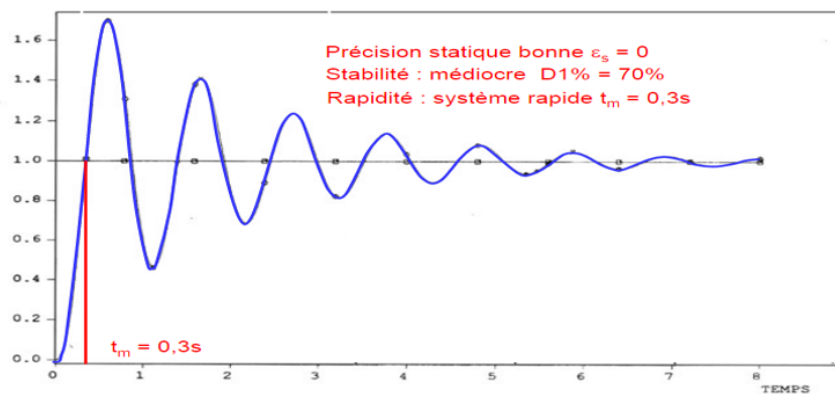


Figure 10-8 : Caractéristiques temporelles de la réponse d'un système non corrigé

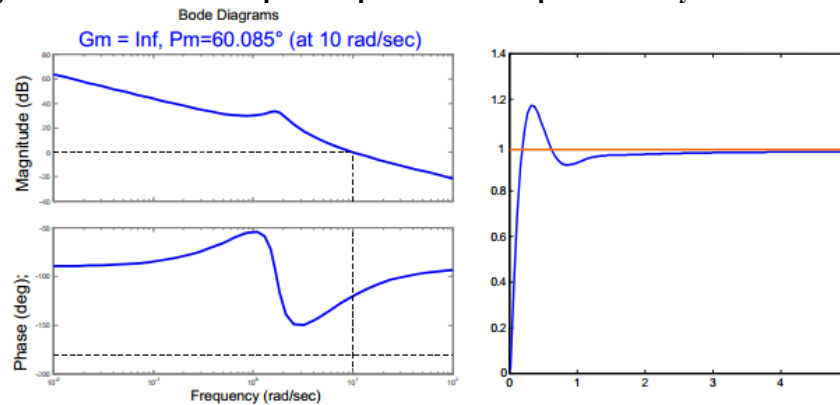


Figure 10-9 : Caractéristiques fréquentielles et temporelles de la réponse d'un système corrigé

10.7. Correction parallèle

- **Intérêt** : rendre la boucle interne plus rapide et donc le système corrigé plus rapide

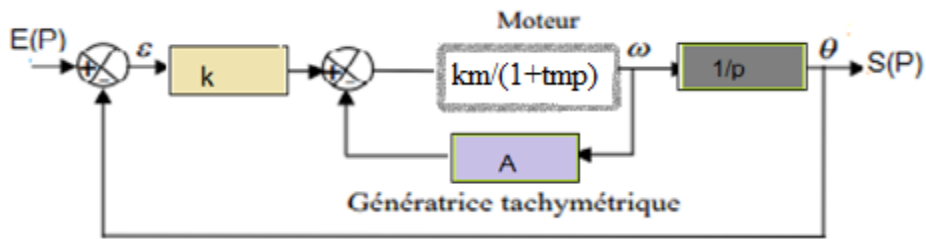


Figure 10-10 : Structure parallèle d'un système corrigé.

- Correction par retour tachymétrique

Asservissement de position par un moteur à courant continu, son principe est de réinjecter à l'entrée du moteur une tension fournie par la génératrice et fonction de la vitesse de rotation.

⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞

**TRAVAUX DIRIGÉS
AVEC CORRECTIONS**

⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞⊞

Fiche de TD n°1 :

(Systèmes linéaires et Transformation de Laplace)

Exercicen°1 :

Soit le circuit RL suivant, déterminer le courant $i(t)$, en appliquant la transformation de Laplace.

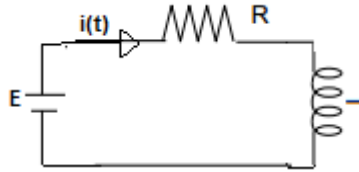


fig1 : circuit RL du 1^{er} ordre

Exercicen°2 :

Trouvez les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

- $f_1(t) = (3e^{-2t} - 1/2t^2) u(t)$
- $f_2(t) = (5 \cos(3t + \pi/4)) u(t)$
- $f_3(t) = (4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}) u(t)$
- $f_4(t) = (\sin(5t + 30^\circ)) u(t)$

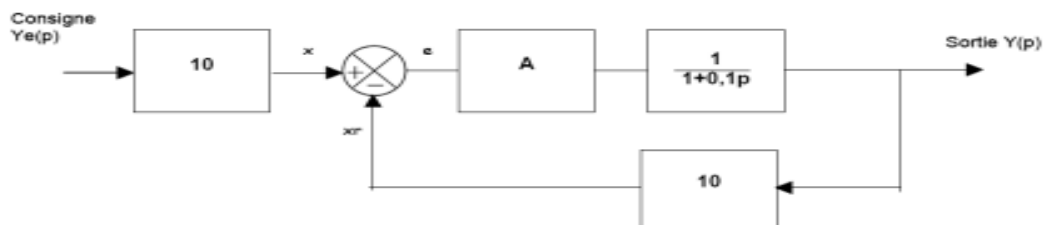
Exercicen°3 :

Trouvez les transformées inverse des fonctions suivantes :

- $F_1(p) = \frac{1}{p(p+1)(p-2)}$
- $F_2(p) = \frac{5!}{(p-2)^2}$
- $F_3(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)}$

Exercicen°4 :

Soit un système défini par son circuit suivant :



- 1) Quel est le type de ce système ?
- 2) Simplifier le circuit
- 3) Calculer la fonction de transfert en Boucle Ouverte et en Boucle Fermée.

Solution de la fiche de TD n°1 :

(Systèmes linéaires et Transformation de Laplace)

Exercicen°1 :

Les conditions initiales: $i_L(0)=0$

$$E = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

En appliquant les transformées de Laplace aux deux membres de l'égalité, on obtient :

$$l(E) = l\left(Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}\right) = l(Ri(t)) + l\left(L \frac{di(t)}{dt}\right) = Rli(t) + Ll \frac{di(t)}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\frac{E}{p} = RI(p) + LPI(p) = I(p)(R + Lp) \Rightarrow I(p) = \frac{\frac{E}{p}}{R + Lp} = \frac{E}{p(R + Lp)} = \frac{\frac{E}{L}}{p\left(\frac{R}{L} + p\right)}$$

on pose $\tau = \frac{R}{L} = a$ constante de temps

$$I(p) = \frac{\frac{E}{L}}{p(a+p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{a+p} = \frac{A(p+a) + Bp}{p(P+a)} \Rightarrow A(p+a) + Bp = \frac{E}{L} \Rightarrow p(A+B) + Aa = \frac{E}{L}$$

$$A + B = 0 \text{ et } Aa = \frac{E}{L} \Rightarrow A = \frac{E}{L} \text{ et } B = -A$$

$$I(p) = \frac{\frac{E}{L}}{p} - \frac{\frac{E}{L}}{p+a} \text{ d'après le tableau de Laplace, on a :}$$

$$i(t) = \frac{E}{L}(1 - e^{-at})$$

Exercicen°2 :

- $F_1(p) = \frac{3}{p+2} - \frac{1}{p^3}$
- $f_2(t) = 5 \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 3t - \sin 3t)u(t) \Rightarrow F_2(p) = \frac{5}{\sqrt{2}} \left(\frac{p-3}{p^2+9} \right)$
- $F_3(p) = 4 \frac{2}{p^3} - 3 \left(\frac{p}{p^2+4} \right) + 5 \left(\frac{1}{p+1} \right)$
- $f_4(t) = \sin 5t \cos 30^\circ + \cos 5t \sin 30^\circ \Rightarrow F_4(p) = \cos 30^\circ \left(\frac{5}{p^2+25} \right) + \sin 30^\circ \left(\frac{p}{p^2+25} \right)$

Exercicen°3 :

- $F_1(p)$

$$F_1(p) = \frac{1}{p(p+1)(p-2)} = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p+1} + \frac{a_3}{p-2}$$

$$a_1 = \left[\frac{1}{p(p+1)(p-2)} p \right]_{p=0} = -\frac{1}{2}; a_2 = \left[\frac{1}{p(p+1)(p-2)} (p+1) \right]_{p=-1} = \frac{1}{3}; a_3 = \left[\frac{1}{p(p+1)(p-2)} (p-2) \right]_{p=2} = \frac{1}{6}$$

$$F_1(p) = -\frac{1}{2} \frac{1}{p} + \frac{1}{3} \frac{1}{p+1} + \frac{1}{6} \frac{1}{p-2}$$

$$f_1(t) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{+2t} \right) u(t)$$

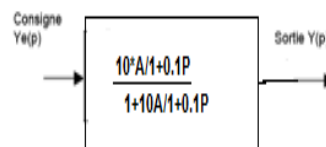
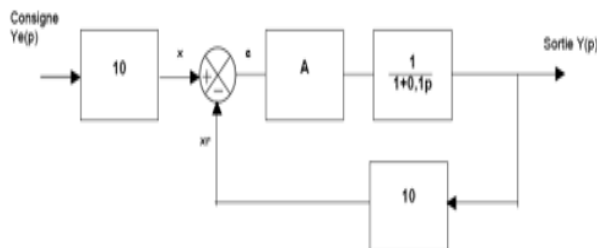
- $f_2(t) = (t^5 e^{2t}) u(t)$

- $F_3(p)$

$$F_3(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)} = \frac{a_1}{p+1} + \frac{a_2}{p+2}$$

$$a_1 = \left[\frac{p+3}{(p+1)(p+2)} (p+1) \right]_{p=-1} = 2, \quad a_2 = \left[\frac{p+3}{(p+1)(p+2)} (p+2) \right]_{p=-2} = -1$$

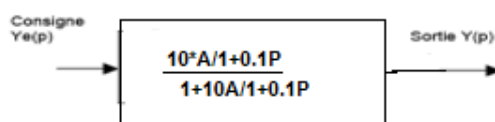
$$F_3(p) = \frac{2}{p+1} + \frac{-1}{p+2} \Rightarrow f_3(t) = (2e^{-t} - e^{-2t}) u(t)$$

Exercicen°4 :


- 1) Quel est le type de ce système ?

Système du premier ordre

- 2) Simplification du circuit



- 3) Calculer la fonction de transfert en Boucle Ouverte et en Boucle Fermée.

la fonction de transfert en boucle ouverte :

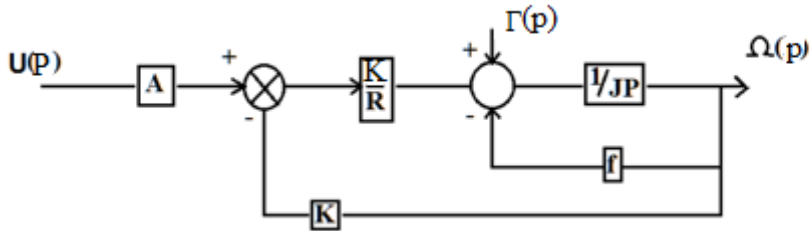
$$T(p) = \frac{100A}{1+0.1p}$$

la fonction de transfert en boucle fermée :

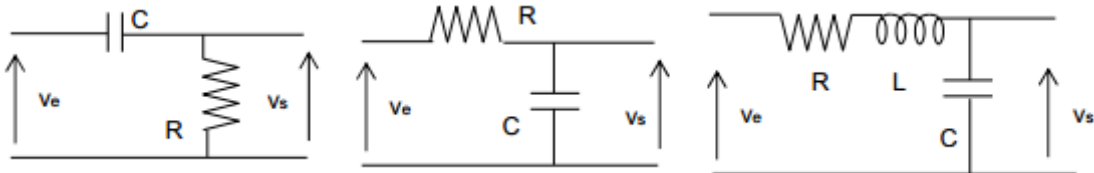
$$F(p) = 10 \frac{\frac{A}{1+0.1p}}{1 + \frac{10A}{1+0.1p}} = 10 \frac{A}{1+0.1p+10A} = \frac{10A}{0.1p+1+10A}$$

Fiche de TD n°2 :
(Fonctions de Transfert et Blocs de Diagrammes)
Exercice n°1 :

Soit le schéma bloc suivant, simplifiez et trouvez la fonction de transfert $F(p)$.


Exercice 2 :

Trouvez la fonction de transfert V_s/V_e des circuits suivants :


Exercice 3 :

Soit une régulation de pression d'un bac contenant un solvant donnée par le schéma ci-dessous :

PIC : Régulateur de pression.

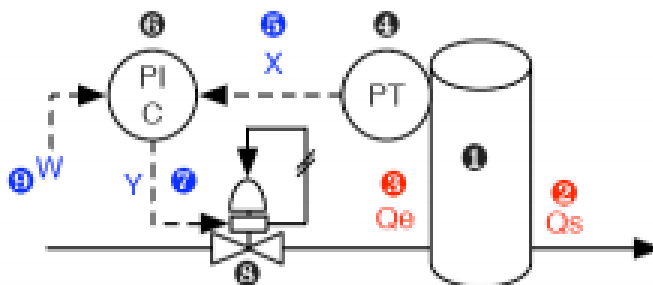
PT : Transmetteur de pression.

Q_e : Quantité de pression en entré dans le bac

Q_s : Perturbation.

8 : Détendeur.

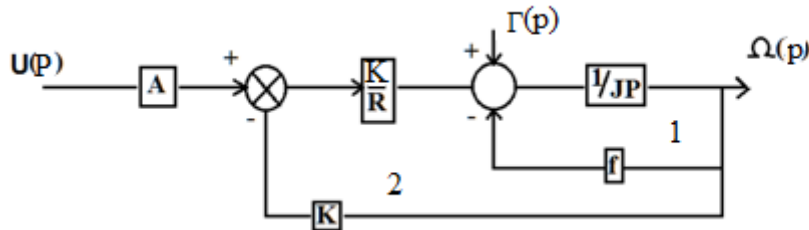
Trouver Schéma fonctionnel de cette boucle régulation.



Solution de la fiche de TD n°2 :

(Fonctions de Transfert et Blocs de Diagrammes)

Solution Exercice n°1 :



Système a deux entrées, on annule 1, et on garde la 2ème : $\Gamma(p)=0$, et $U(p)$ existe

On simplifie la maille 1, on trouve : $\frac{1}{Jp}$ puis on multiplie par $\frac{K}{R}$ et, on simplifie la maille 2

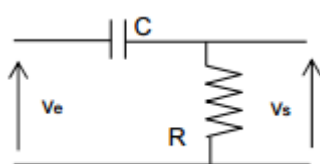
$$\frac{1}{1+f\frac{1}{Jp}} \cdot \frac{K}{R} = G_1(p) \Rightarrow \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{AG_1(p)}{1+kG_1(p)}$$

Et pour le 2ème cas $U(p)=0$ et $\Gamma(p)$ existe :

la première maille donne : $G_2(p) = \frac{1}{1+f\frac{1}{Jp}}$ et forme avec $\frac{K^2}{R}$ une nouvelle maille 2, d'entrée : $\Gamma(p)$

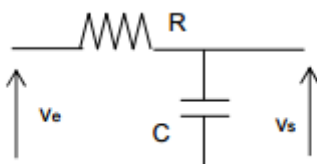
$$\frac{\Omega(p)}{\Gamma(p)} = \frac{G_2(p)}{1+G_2(p)\frac{K^2}{R}} \text{ et pour ce cas la sortie } \Omega(p) = \Gamma(p) \frac{G_2(p)}{1+G_2(p)\frac{K^2}{R}} + U(p) \frac{AG_1(p)}{1+kG_1(p)} \text{ avec } G_1(p) = \frac{1}{1+f\frac{1}{Jp}} \cdot \frac{K}{R}$$

Solution Exercice n°2 :



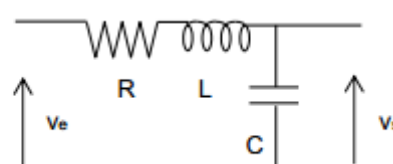
$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{RCp}{1+RCp}$$

$$T=RC$$



$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1+RCp}$$

$$T=RC$$



$$\frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{1+RCp+LCp^2}$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

On fait la démonstration pour le circuit n°1 : Avec les conditions initiales $V_s(0)=0$, on peut écrire :

On fait la démonstration pour le circuit n°1 :

$v_e(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt + Ri(t)$ et $v_s(t) = Ri(t)$ Appliquons la transformation de Laplace

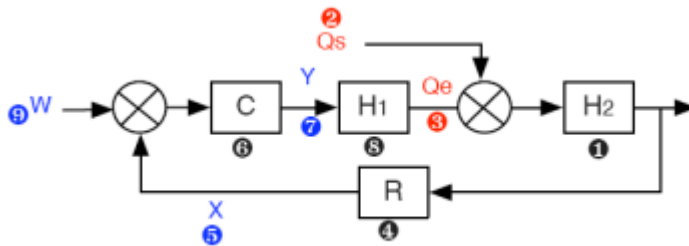
$$\frac{V_e(P)}{P} = \frac{1}{C} \frac{1}{P} I(P) + RI(P) \text{ et } \frac{V_s(P)}{P} = RI(P), \text{ trouvons maintenant } F(P) = \frac{V_s(P)}{V_e(P)} = \frac{RI(P)}{I(P) \left(\frac{1}{CP} + R \right)}$$

On simplifie par $I(P)$, on trouve : $\frac{V_s(P)}{V_e(P)} = \frac{RCP}{1 + RCP}$

Et on refait la même chose pour les autres circuits

Solution Exercice n°3 :

Le schéma bloc du circuit :



Fiche de TD n°3:**(Système du premier ordre)****Exercice n°1 :**

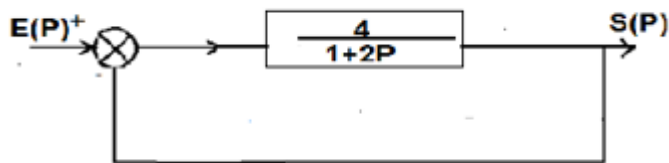
Soit le système de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{0.5(1-p)}{(1+p)(1+0.5p)}$$

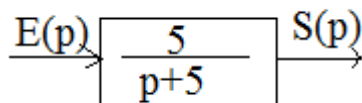
1. Mettre le système sous la forme de deux systèmes du 1^{ier} ordre.
2. Déterminer et représenter les pôles et les zéros dans le plan complexe.
3. on applique au système une entrée à un échelon unitaire $u(t)$:
 - Exprimer $y(t)$; et évaluer $y(0)$, et $y(t)$ quand t tend vers l'infinie.
 - Etudier la variation de $y(t)$, et représenter graphiquement l'évolution de la sortie.

Exercice n°2 :

Soit le système asservi a retour unitaire suivant :



1. Quel est le type de ce système, que représentent les valeurs 4 et 2
2. Déterminer les fonctions de transfert en BO et en BF

Exercice n°3 :Soit le système asservi du 1^{er} ordre suivant :

- 1-Calculer et tracer la réponse indicielle $s(t)$ pour une entrée $e(t)=1(t)$ (échelon unitaire)
- 2-Déterminer le temps de réponse

Solution de la fiche de TD n°3:

(Système du premier ordre)

Solution exercice n°1 :

1. Mettre le système sous la forme de deux systèmes du 1^{er} ordre.

$$G(p) = \frac{0.5(1-p)}{(1+p)(1+0.5p)} = \frac{A}{1+p} + \frac{B}{1+0.5p}$$

$$G(p) = \frac{A}{1+p} + \frac{B}{1+0.5p} \text{ avec } A = \lim_{p \rightarrow -1} \left(\frac{0.5(1-p)}{1+0.5p} \right) = 2 \text{ et } B = \lim_{p \rightarrow -2} \left(\frac{0.5(1-p)}{1+p} \right) = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow G(p) = \frac{2}{1+p} + \frac{-\frac{3}{2}}{1+0.5p}$$

2. Représentation des pôles et les zéros dans le plan complexe

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

$$\text{les zéros} \Rightarrow N(p) = 0 \Rightarrow 0.5(1-p) = 0 \Rightarrow \text{un zéro} = +1$$

$$\text{les pôles} \Rightarrow D(p) = 0 \Rightarrow (1+p) = 0 \text{ et } (1+0.5p) = 0 \Rightarrow \text{deux pôles, } p = -1 \text{ et } p = -2$$

3. On applique au système une entrée à un échelon unitaire $u(t)$:

$$G(p) = \frac{2}{1+p} + \frac{-\frac{3}{2}}{1+0.5p} \text{ et } U(p) = \frac{1}{p}$$

$$Y(p) = U(p) \cdot G(p) = \frac{1}{p} \left(\frac{2}{1+p} + \frac{-\frac{3}{2}}{1+0.5p} \right) = \frac{1}{p} \frac{2}{1+p} + \frac{1}{p} \frac{-\frac{3}{2}}{1+0.5p}$$

Trouvons la transformée inverse de $Y(p)$

$$y(t) = 2(1-e^{-t}) - \frac{3}{2}(1-e^{-2t}) = (0.5 + \frac{3}{2}e^{-2t} - 2e^{-t})u(t) \text{ pour } t \geq 0$$

$$y(0) = 0.5 - 2 + \frac{3}{2} = 0$$

$$y(\infty) = 0.5 \text{ et } \frac{dy(t)}{dt} = 0 \Rightarrow 2e^{-t} - 3e^{-2t} = 0 \Rightarrow t = \ln(1.5) \approx 0.40 \Rightarrow y(0.4) \approx -0.17$$

4. Etudier la variation de $y(t)$ et représenter graphiquement l'évolution de la sortie

Solution exercice n°2:

Le système est du 1^{er} ordre. Pour la fonction $T(p)$, la valeur 4 représente le gain k et la valeur 2 représente la constante de temps T ou τ

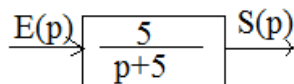
$$T(p) = \frac{4}{1+2p}$$

la fonction de transfert en boucle ouverte: $T(p) = \frac{4}{1+2p}$

la fonction de transfert en boucle fermée: $F(p) = \frac{\frac{4}{1+2p}}{1 + \frac{4}{1+2p}} = \frac{4}{1+2p+4} = \frac{4}{5+2p}$

Solution exercice n°3:

- Le Calcul et le tracé de la réponse indicielle



$$e(t) = u(t) = 1(t) \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p}, S(p) = E(p)F(p) = \frac{1}{p} \frac{5}{p+2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2}$$

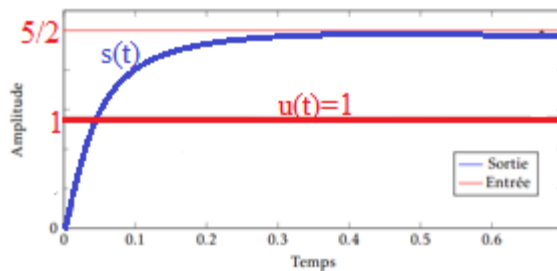
$$A = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \frac{5}{p+2} \frac{1}{p} \right) = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad B = \lim_{p \rightarrow -2} \left((p+2) \frac{5}{p+2} \frac{1}{p} \right) = -\frac{5}{2}$$

$$S(p) = \frac{5}{2p} - \frac{5}{2(p+2)} \Rightarrow \text{En déterminant la transformée inverse } s(t) \text{ de la fonction}$$

$$S(p) \Rightarrow s(t) = \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2} e^{-2t} \right) u(t)$$

L'allure de $s(t)$

A $t = 0 \Rightarrow s(0) = 0$ et $s(\infty) = \frac{5}{2}$



- Le temps de réponse t_r

$$\frac{5}{2}(1 - e^{-2t_r}) = 0.95 * \frac{5}{2} = 2.375 \Rightarrow e^{-2t_r} = 0.05 \Rightarrow 2t_r = \ln 20 \Rightarrow t_r = 1.17 \text{ sec}$$

Fiche de TD n°4 :
(Système asservi du second ordre)

Exercice N°1

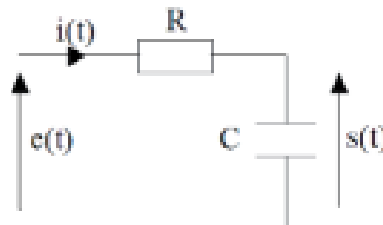
Calculer la réponse indicielle et la réponse impulsionnelle des deux systèmes définie par les fonctions de transfert suivantes :

$$G_1(p) = \frac{2(p + 1)}{p(p + 3)^2}$$

$$G_2(p) = \frac{p + 4}{(p + 1)(p^2 - 4p + 4)}$$

Exercice N°2

Considérons le circuit RC présenté sur la figure suivante :



Le signal d'entrée injecté est $e(t) = 3t$.

Donner l'expression de $y(t)$.

Exercice N°3

On considère un système du second ordre d'équation :

$$\ddot{y} + 0.4\dot{y} + 0.25y = e.$$

1. Ecrire la fonction de transfert selon la forme.
2. Donner la valeur de K , la fréquence propre f_0 et du facteur d'amortissement ξ .

Exercice N°4

Soit un système dont la fonction de transfert est :

$$G(p) = \frac{-p + 5}{p^2 + 5p + 4}$$

Calculer la réponse temporelle du système $y(t)$ lorsque l'entrée $e(t)$ est :

1. Une impulsion de Dirac.
2. Un échelon unitaire.

Solution de la fiche de TD n°4:
(Etude d'un système asservi du second ordre)

Exercice N°1

$$\bullet G_1(p) = \frac{2(p+1)}{p(p+3)^2}$$

La réponse indicielle :

$$e(t) = 1 \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p}$$

$$Y(p) = \frac{2(p+1)}{p^2(p+3)^2} = \frac{2/9}{p^2} + \frac{2/27}{p} - \frac{4/9}{(p+3)^2} - \frac{2/27}{p+3}$$

$$y(t) = L^{-1}(Y(p))$$

$$y(t) = \left[\frac{2}{9}t + \frac{2}{27} - \frac{4}{9}te^{-3t} - \frac{2}{27}e^{-3t} \right] u(t)$$

La réponse impulsionnelle :

$$g(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{2}{9} + \frac{4}{3}te^{-3t} - \frac{2}{9}e^{-3t}$$

$$\bullet G_2(p) = \frac{p+4}{(p+1)(p^2+p+1)}$$

La réponse indicielle :

$$e(t) = 1 \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p}$$

$$Y(p) = \frac{4}{p} - \frac{3}{p+1} + \frac{2.1 \times e^{76j}}{p - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{2.1 \times e^{-76j}}{p - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$y(t) = 4 - 3e^{-t} + 4.2e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(76 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)t$$

La réponse impulsionnelle

$$g(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 3e^{-t} - 2.1e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(76 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)t + 4.2e^{-\frac{t}{2}} \left(76 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sin\left(76 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)t$$

Exercice N°2

L'équation différentielle de circuit :

$$e(t) = Ri(t) + s(t)$$

$$i(t) = C \frac{ds(t)}{dt}$$

$$\text{On obtient : } RC \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$$

La fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1+RCp}$$

$$e(t) = 3t \Rightarrow E(p) = \frac{3}{p^2}$$

$$S(p) = \frac{3}{p^2(RCp + 1)}$$

$$s(t) = 3RC \left(e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{t}{RC} - 1 \right) u(t)$$

Exercice N°3

$$p^2Y(p) + 0.4pY(p) + 0.25Y(p) = E(p)$$

$$[p^2 + 0.4p + 0.25]Y(p) = E(p) \Rightarrow G(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{1}{p^2 + 0.4p + 0.25}$$

$$= \frac{4}{1 + \frac{0.4}{0.25}p + \frac{p^2}{(0.25)^2}}$$

$$K=4 ; \omega_n = 0.5 \text{ rad/s} ; \xi = 0.4$$

Exercice N°4

$$Y(p) = \frac{-p + 5}{p^2 + 5p + 4} E(p)$$

1. La réponse impulsionnelle ($E(p)=1$)

$$Y(p) = \frac{-p + 5}{p^2 + 5p + 4} = \frac{-p + 5}{(p + 1)(p + 4)} = \frac{2}{p + 1} - \frac{3}{p + 4}$$

$$y(t) = (2e^{-t} - 3e^{-4t}) u(t)$$

2. La réponse indicielle ($E(p) = \frac{1}{p}$)

$$Y(p) = \frac{-p + 5}{p^2 + 5p + 4} \times \frac{1}{p} = \frac{5/4}{p} - \frac{2}{p + 1} + \frac{3/4}{p + 4}$$

$$y(t) = \left(\frac{5}{4} - 2e^{-t} + \frac{3}{4}e^{-4t} \right) u(t)$$

Fiche de TD n°5 :**(Diagrammes de Bode et de Nyquist)****Exercice n°1:**

Tracer le diagramme de Bode à savoir la courbe de gain et la courbe de phase de la fonction de transfert $F(p)$ suivante :

$$F(p) = \frac{220}{p^2 + 13p + 22}$$

Exercice n°2:

Soit le système décrit par la fonction $T(p)$ suivante :

$$T(p) = \frac{100}{(1 + 0.2p)(1 + 0.4p)(1 + 2.5p)}$$

Tracer les 2 courbes de Bode (de gain et de phase).

Exercice n°3:

Tracer le diagramme de Bode et de Nyquist de la fonction suivante :

$$G(p) = \frac{5p}{1 + 5p}$$

Exercice n°4:

Tracer dans le plan de Nyquist la fonction $T(p)$ en boucle ouverte, d'un système à retour unitaire de fonction en chaîne directe $G(p)$

$$G(p) = \frac{4}{\tau p - 1} \quad ; \quad \tau > 0$$

Exercice n°5:

Tracer dans le plan de Black la fonction $G(p) = \frac{2}{1 + 3p}$.

Solution de la fiche de TD n°5 :

(Diagrammes de Bode et de Nyquist)

Solution de l'exercice n°1:

Tracer le diagramme de Bode à savoir la courbe de gain et la courbe de phase de la fonction de transfert $F(p)$ suivante :

$$F(p) = \frac{220}{p^2 + 13p + 22}$$

On a besoin de certaines valeurs comme :

$$\text{Log}(2) = 0.301, \text{Log}(10) = 1; \text{Log}(11) = 1.041; \text{Log}(220) = 2.342$$

Pour commencer, on va essayer de mettre $F(p)$, sous la forme de facteurs de 1^{er} ordre, on prend le dénominateur et on cherche les racines ou les pôles du dénominateur :

$$p^2 + 13p + 22 = 0,$$

$$p_1 = 11 \text{ et } p_2 = 2 \Rightarrow (p + p_1)(p + p_2) = (p + 11)(p + 2)$$

$$F(p) = \frac{220}{p^2 + 13p + 22}$$

$$F(j\omega) = \frac{220}{22(1 + \frac{1}{2}j\omega)(1 + \frac{1}{11}j\omega)} = \frac{10}{(1 + \frac{1}{2}j\omega)(1 + \frac{1}{11}j\omega)} = \frac{F_1(j\omega)}{F_2(j\omega)F_3(j\omega)}$$

On a 3 fonctions, une constante et les 2 autres du type : $(1 + \tau p)^\beta$

La courbe de gain :

$$A_{dB} = 20 \log F_1(j\omega) - 20 \log F_2(j\omega) - 20 \log F_3(j\omega) = 20 \log 10 - 20 \log(1 + \frac{1}{2}j\omega) - 20 \log(1 + \frac{1}{11}j\omega)$$

$$A_{dB} = 20 - 20 \log \sqrt{1 + \frac{1}{4}\omega^2} - 20 \log \sqrt{1 + \frac{1}{11^2}\omega^2}$$

Pour les deux fonctions $F_2(j\omega)$ et $F_3(j\omega)$:

Pour $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow A_{dB} = 0 \text{ dB}$ première asymptote

Pour $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow A_{dB} = -20 \text{ dB / déc}$ 2^{ème} asymptote

Le tracé dépend de la valeur de la fréquence de coupure, pour $F_2(j\omega)$, $\omega_c = 2$ et pour $F_3(j\omega)$, $\omega_c = 11$.

Pour $\omega \rightarrow \omega_c \Rightarrow A_{dB} = 3 \text{ dB}$ pour les 2 cas

La courbe de phase :

$\varphi = -\text{arctg} \tau \omega$ pour les deux fonctions :

Pour $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi = -\text{arctg} 0 = 0^\circ$

Pour $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi = -\text{arctg} \infty = -90^\circ$

Pour $\omega \rightarrow \omega_c \Rightarrow \varphi = -\text{arctg} 1 = -45^\circ$

Solution de l'exercice n 2:

Soit le système décrit par la fonction T(p) suivante :

$$T(p) = \frac{100}{(1+0.2p)(1+0.4p)(1+2.5p)}$$

$$A_{dB} = 20 \log F_1(j\omega) - 20 \log F_2(j\omega) - 20 \log F_3(j\omega) - 20 \log F_4(j\omega) = 20 \log 100 - 20 \log(1+0.2j\omega) - 20 \log(1+0.4j\omega) - 20 \log(1+2.5j\omega)$$

$$A_{dB} = 200 - 20 \log \sqrt{1+(0.2)^2 \omega^2} - 20 \log \sqrt{1+(0.4)^2 \omega^2} - 20 \log \sqrt{1+(2.5)^2 \omega^2}$$

Pour les tris fonctions $F_2(j\omega)$, $F_3(P)$ et $F_4(j\omega)$:

Pour $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow A_{dB} = 0 \text{ dB}$ première asymptote

Pour $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow A_{dB} = -20 \text{ dB/déc}$ 2ème asymptote

Le tracé dépend de la valeur de la fréquence de coupure, pour $F_2(j\omega)$, $\omega_c = \frac{1}{0.2} = 5 \text{ rd/s}$

et pour $F_3(j\omega) \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{0.4} = 2.5 \text{ rd/s}$, pour $F_4(j\omega)$, $\omega_c = \frac{1}{2.5} = 0.4 \text{ rd/s}$

Pour $\omega \rightarrow \omega_c \Rightarrow A_{dB} = 3 \text{ dB}$ pour les 3 cas

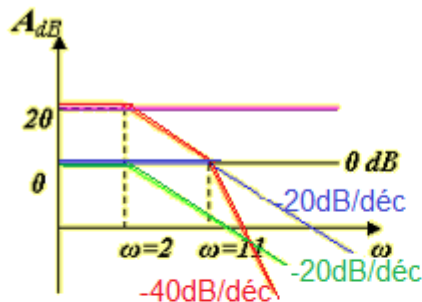
La courbe de phase

$\varphi = -\arctg \tau \omega$ pour les trois fonctions :

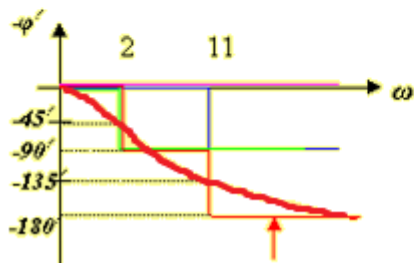
Pour $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi = -\arctg 0 = 0^\circ$

Pour $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi = -\arctg \infty = -90^\circ$

Pour $\omega \rightarrow \omega_c \Rightarrow \varphi = -\arctg 1 = -45^\circ$



$$A_{dB}(T(j\omega)) = A_{dB}(100) + A_{dB}(|1+j\omega \tau_1|^{-1}) + A_{dB}(|1+j\omega \tau_2|^{-1})$$



$$A_{dB}(T(j\omega)) = A_{dB}(100) + A_{dB}(|1+j\omega \tau_1|^{-1}) + A_{dB}(|1+j\omega \tau_2|^{-1})$$

Solution de l'exercice n 3:

Tracer le diagramme de Bode et de Nyquist de la fonction suivante :

$$G(p) = \frac{5p}{1+5p}$$

Le module et l'argument de cette fonction sont décrits par les équations suivantes :

$$|G(j\omega)| = \frac{5\omega}{\sqrt{1+25\omega^2}} \quad \text{et} \quad \text{tg}\varphi(\omega) = \frac{1}{5\omega}$$

La courbe de gain :

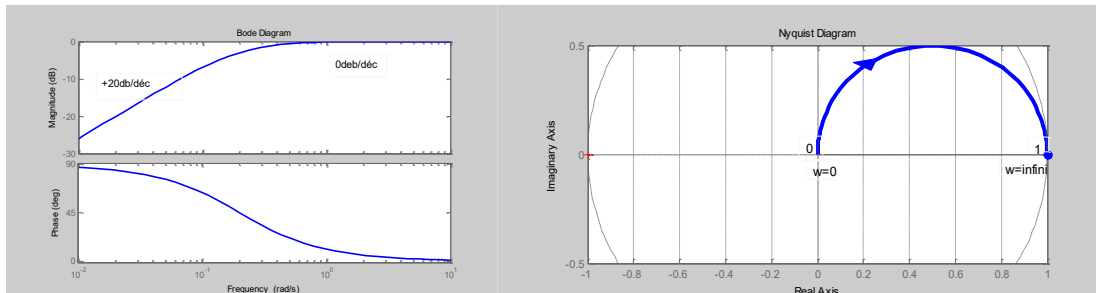
$$AdB = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log |(5j\omega)| - 20 \log |(1+5j\omega)| = 20 \log(5\omega) - 20 \log \sqrt{1+25\omega^2}$$

Pour $\omega \rightarrow 0$: $AdB = 20 \log 5 + 20 \log \omega \Rightarrow$ on a une 1^{ère} Asymptote de pente 20dB / déc

Pour $\omega \rightarrow \infty$: $AdB = 20 \log(5\omega) - 20 \log(5\omega)$ on néglige le 1 devant 5ω et donc on a la 2^{ème} Asymptote 0dB / déc

La courbe de phase :

$$\omega \rightarrow \infty : \text{actg}(\infty) \Rightarrow \varphi = 90^\circ \quad \text{et} \quad \omega \rightarrow 0 : \text{arctg}(0) \Rightarrow \varphi = 0^\circ$$



Solution de l'exercice n 4:

Tracer dans le plan de Nyquist la fonction $T(p)$ en boucle ouverte, d'un système a retour unitaire de fonction en chaine directe

$$G(p) = \frac{4}{\tau p - 1} \quad ; \quad \tau > 0$$

$$T(p) = G(p) * 1 = \frac{4}{\tau p - 1}$$

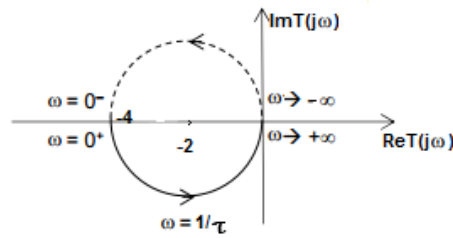
$$T(j\omega) = \frac{4}{j\omega\tau - 1}. \text{ On multiplie par le conjugué du dénominateur pour obtenir la forme : } Re + j Im$$

$$T(j\omega) = \frac{4}{(j\omega\tau - 1)(-j\omega\tau - 1)} = \frac{-4 - 4j\omega\tau}{1 + \tau^2\omega^2} = \frac{-4}{1 + \tau^2\omega^2} + j \frac{-4\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2}$$

$$\text{Re}T(j\omega) = \frac{-4}{1 + \tau^2\omega^2} = X, \text{ et } \text{Im}T(j\omega) = \frac{-4\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2} = Y \Rightarrow (X + 2)^2 + Y^2 = 4$$

équation d'un cercle de rayon 2 et de centre (-2,0).

$$A: \omega = \frac{1}{\tau} \text{ on a : } \text{Re} = -2 \text{ et } \text{Im} = -2$$



Solution de l'exercice n°5:

Tracer dans le plan de Black la fonction $G(p) = \frac{2}{1+3p}$.

Courbe de Black

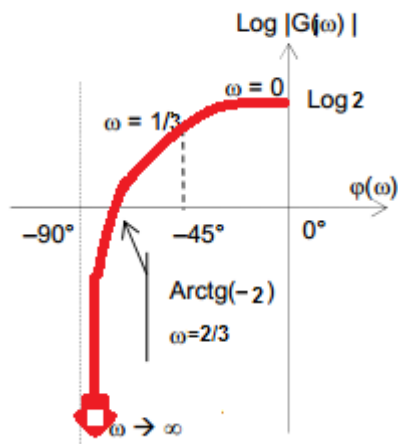
On trace cette fois $\log |G(j\omega)|$ en fonction de $\varphi(\omega)$. On peut, également, la déduire des courbes d'amplitude et de phase du diagramme de Bode.

$$\text{Pour } \omega \rightarrow 0, \log |G(j\omega)| = \log 2 - \log \sqrt{1+9\omega^2} \Rightarrow \log 2$$

$$\text{Pour } \omega \rightarrow \infty; \log 2 - \log 3\omega = \log 2 - \log 3 - \log \omega = \log \frac{2}{3} - \log \omega \Rightarrow -\log \omega$$

Il faut représenter $\varphi = \text{Arctg}(-\omega T)$ en fonction de $\log \omega$

- $\omega \rightarrow 0, \varphi = 0$
- $\omega \rightarrow \infty, \varphi = -90^\circ$
- $\omega = 1/3, \varphi = -45^\circ$.



Fiche de TD n°6 :

(Stabilité des systèmes asservis)

Exercice n°1:

Déterminer la condition de stabilité du système défini par sa fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$.

$$T(p) = \frac{2k}{p(1 + \tau p)}$$

Exercice n°2:

Examiner la stabilité du système en boucle ouverte et en boucle fermée du système suivant :



$$\text{Avec : } G(p) = \frac{10}{3p^3 + 2p^2 + p + 1} \text{ et } H(p) = 1.9p + 1$$

Exercice n°3:

Le système défini par : $1 + T(p) = p^5 + p^4 + 3p^3 + 4p^2 + p + 2 = 0$: est-il stable ?

Exercice n°4:

Etudier la stabilité du système suivant :

$$1 + T(p) = 4p^5 + 10p^4 + 10p^3 + 20p^2 + p + 1 = 0$$

Exercice n°5:

1. Par le critère de Nyquist, déterminer la condition de stabilité du système suivant :

$$T(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1 + Tj\omega)(1 + aTj\omega)} \text{ avec } k > 0, a > 0 \text{ et } T > 0$$

2. Examiner la stabilité par le critère de Nyquist du système de la fonction suivante :

$$G(p) = \frac{4}{\tau p - 1} ; \tau > 0$$

Solution de la fiche de TD n°6 :

(Stabilité des systèmes asservis)

Solution de l'exercice n°1:

Déterminer la condition de stabilité du système défini par sa fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$.

$$T(p) = \frac{2k}{p(1+\tau p)}$$

Pour étudier la stabilité en boucle fermée, il faut étudier le numérateur de la fonction :

$$1+T(p)=0$$

$$1+T(p) = 1 + \frac{2k}{p(1+\tau p)^2} = \frac{p(\tau p+1)^2 + 2k}{p(1+\tau p)^2}$$

$$p(1+\tau p)^2 + 2k = 0 \Leftrightarrow p(\tau^2 p^2 + 2\tau p + 1) + 2k = 0 \Leftrightarrow \tau^2 p^3 + 2\tau p^2 + p + 2k = 0$$

$$m=3, A_m = A_3 = \tau^2, A_{m-1} = A_2 = 2\tau, A_{m-2} = A_1 = 1, A_{m-3} = A_0 = 2k : 1^{ere} \text{ condition vérifiée,}$$

Pour la stabilité, on applique le critère de Routh :

$$\begin{vmatrix} \tau^2 & 1 & 0 \\ 2\tau & 2k & 0 \\ 1-\tau k & & \end{vmatrix}$$

La condition de stabilité pour ce système : $0 < \tau k < 1$

Solution de l'exercice n°2:

La fonction de transfert en boucle ouverte :

$$T(p) = G(p)H(p) = \frac{10(1.9p+1)}{3p^3 + 2p^2 + p + 1}$$

$$3p^3 + 2p^2 + p + 1 = 0$$

$$A_i > 0, m=3, A_m = A_3 = 3, A_{m-1} = A_2 = 2, A_{m-2} = A_1 = 1, A_{m-3} = A_0 = 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_1 = 2 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 < 0 \Rightarrow \text{système instable en boucle ouverte}$$

On a appliqué le critère d'Hurwitz, on s'arrête à Δ_2 puisque la condition de stabilité n'est pas vérifiée, si Δ_2 était positif, on continue, car $m=3$, l'ordre du système.

La fonction de transfert en boucle fermée :

On a appliqué le critère d'Hurwitz, on s'arrête à Δ_1 puisque la condition de stabilité n'est pas vérifiée, si Δ_1 était positif, on continue, car $m=3$, l'ordre du système.

La fonction de transfert en boucle fermée :

$$F(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)H(p)} = \frac{\frac{10}{3p^3+2p^2+p+1}}{1+(1.9p+1)\frac{10}{3p^3+2p^2+p+1}} = \frac{10}{3p^3+2p^2+p+1+19p+10}$$

$$3p^3+2p^2+p+1+19p+10=0 \Leftrightarrow 3p^3+2p^2+20p+11=0$$

$$a_i > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 11 & 20 & 2 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix}, \Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = 40 - 33 = 7 > 0, \Delta_3 = 11 \cdot \Delta_2 > 0 \Rightarrow \text{ystème stable en boucle fermée}$$

Remarque :

1. Si on étudie $1+T(p)=0$, on prend le numérateur égal à zéro, mais si on détermine la fonction de transfert $F(p)$, on prend le dénominateur égal à zéro.
2. On remplit le déterminant suivant l'ordre m du système, pour le critère d'Hurwitz, on a m déterminant et si la condition de stabilité apparaît au 1^{er} ou 2^{ème} déterminant, il ne faut pas terminer. Pour le critère de Routh, on s'arrête à $m+1$ lignes.

Solution de l'exercice n°3:

$$1+T(P)=P^5+P^4+3P^3+4P^2+P+2=0$$

$m = 5$, on applique le critère de Routh,

$$A_i > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ -5/3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Le système est instable dès le 1^{er} élément négatif de la colonne, mais on a continué pour voir le nombre de racines à partie réelle positive, pour pouvoir les corriger, une fois on applique la correction des systèmes.

Solution de l'exercice n°4:

Étudier la stabilité du système suivant :

$$1+T(P) = 4P^5 + 10P^4 + 10P^3 + 20P^2 + P + 1 = 0$$

$$m = 5, A_i > 0 \text{ avec } i = 1, \dots, 5.$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 10 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 20 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Delta_1 = 10 > 0, \Delta_2 = 20 > 0, \Delta_3 = 1900 - 4 \cdot 390 > 0, \Delta_4 = 940 > 0, \Delta_5 = A_0 \Delta_3 > 0$$

Le système est stable

Solution de l'exercice n°5:

1. Par le critère de Nyquist, déterminer la condition de stabilité du système suivant :

$$T(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1+Tj\omega)(1+aTj\omega)} \text{ avec } k > 0, a > 0 \text{ et } T > 0$$

$$T(j\omega) = \frac{-jk(1-Tj\omega)(1-aTj\omega)}{\omega(1+T^2\omega^2)(1+a^2T^2\omega^2)} \text{ on pose } \Omega = \omega T \text{ et on remplace dans l'expression}$$

du $R_e T(j\omega)$ et $I_m T(j\omega)$.

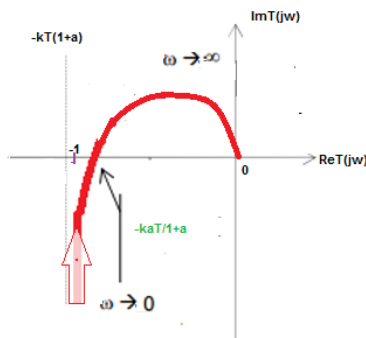
$$R_e = \frac{-kT(1+a)}{(1+a)^2\Omega^2 + (1-a\Omega^2)^2} \text{ et } I_m = \frac{-kT(1-a\Omega^2)}{\Omega((1+a)^2\Omega^2 + (1-a\Omega^2)^2)}$$

$$\Omega \rightarrow 0 \Rightarrow \omega \rightarrow 0 \Rightarrow R_e \rightarrow -kT(1+a) \text{ et } I_m \rightarrow -\infty$$

$$\Omega \rightarrow \infty \Rightarrow \omega \rightarrow \infty \Rightarrow R_e \rightarrow 0 \text{ et } I_m \rightarrow 0$$

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow I_m = 0 \text{ et } R_e = \frac{-kaT}{1+a}$$

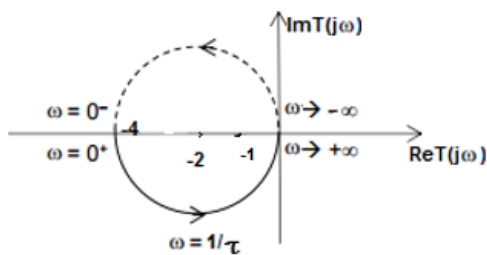
$$\text{système stable } \frac{kaT}{1+a} < 1, \text{ instable } \frac{kaT}{1+a} > 1 \text{ et juste oscillant } \frac{kaT}{1+a} = 1$$



2. Stabilité par le critère de Nyquist du système défini par la fonction suivante : $G(P) = \frac{4}{\tau P - 1}$

$$ReT(j\omega) = \frac{-4}{1+\tau^2\omega^2} = X, \text{ et } ImT(j\omega) = \frac{-4\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2} = Y \Rightarrow (X+2)^2 + Y^2 = 4$$

équation d'un cercle de rayon 2 et de centre (-2,0).

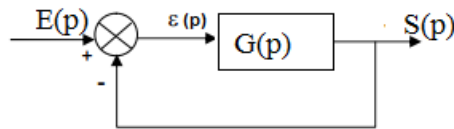


Si $N=1$ et $P=1$, on a $P=N$ et le système est stable en boucle fermée

Fiche de TD n°7:
(Précision des systèmes asservis)

Exercice n°1 :

Soit un système à retour unitaire défini par :

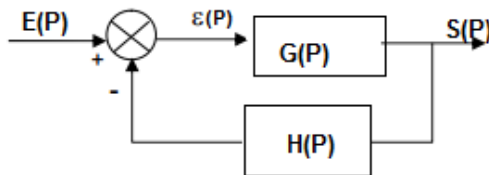


Avec : $G(p) = \frac{k}{(5p+2)(p+3)^2}$ en chaîne directe, dans quel limite, on peut varier k pour que

le système soit stable et que son erreur statique établie pour une entrée échelon unitaire $e(t)=1(t)$ ne dépasse pas 10%

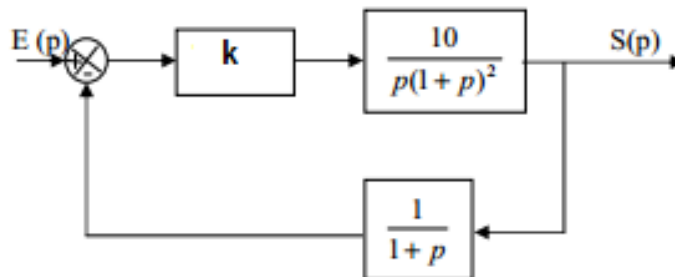
Exercice n°2 :

Soit le système donné par la figure suivante avec : $G(p) = \frac{4}{p(p+2)}$ et $H(p) = \frac{p+1}{p+3}$



Etudier la stabilité et donner l'erreur statique pour les entrées suivantes : échelon unitaire et la rampe

Exercice n°3 :



Dans quel limite, on peut varier k pour que le système soit stable et que son erreur statique établie pour une entrée échelon unitaire $e(t)=1(t)$ et une rampe, ne dépasse pas 10%

Solution de la fiche de TD n°7:

Solution de l'exercice n°1 :

$$G(p) = \frac{k}{(5p+2)(p+3)^2} :$$

Etude de La stabilité :

La fonction de transfert en boucle fermée : $F(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{\frac{k}{(5p+2)(p+3)^2}}{1 + \frac{k}{(5p+2)(p+3)^2}} = \frac{k}{(5p+2)(p+3)^2 + k}$.

$$(5p+2)(p+3)^2 + k = 0 \Leftrightarrow (5p+2)(p^2+6p+9) + k = 0 \Leftrightarrow 5p^3 + 30p^2 + 45p + 2p^2 + 12p + 18 + k = 0 \Leftrightarrow$$

$$5p^3 + 32p^2 + 57p + 18 + k = 0, \text{ tous les } B_i > 0, m=3, B_3=5, B_2=32, B_1=57, B_0=18+k.$$

$$\begin{vmatrix} 32 & 18+k & 0 \\ 5 & 57 & 0 \\ 0 & 0 & 18+k \end{vmatrix}, \Delta_1 = |32| = 32 > 0, \begin{vmatrix} 32 & 18+k \\ 5 & 57 \end{vmatrix} = 32*57 - 5(18+k) = 1824 - 90 - 5k > 0 \Rightarrow k < \frac{1734}{5} = 346.8$$

Pour que le système soit stable, il faut que : $k < 346.8$

Etude de l'erreur statique :

$$\xi_{0n} = \lim_{p \rightarrow 0} p \xi(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1}{p^{n-1}} \frac{1}{1+T(p)} \right), \text{ on a : } \xi_{01} = \lim_{p \rightarrow 0} [p G_0(p) E(p)] \text{ avec : } G_0(p) = \frac{1}{1+T(p)} \text{ et } E(p) = \frac{1}{p}$$

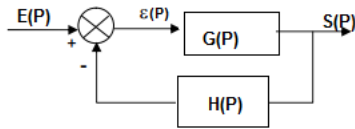
$$\xi_{01} = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{1}{(1+T(p))} \frac{1}{p} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1 + \frac{k}{(5p+2)(p+3)^2}} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{(5p+2)(p+3)^2}{(5p+2)(p+3)^2 + k} \right] =$$

$$\xi_{01} = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{5p^3 + 32p^2 + 57p + 18}{5p^3 + 32p^2 + 57p + 18 + k} \right] = \frac{18}{18+k} \leq 0.1 \Rightarrow 1.8 + 0.1k \geq 18 \Rightarrow k = \frac{18-1.8}{0.1} \geq 162$$

Pour que le système soit stable et que son erreur ne dépasse pas 10%, il faut que :

$$k \text{ soit borné entre les deux valeurs } 346.8 \text{ et } 162 \Rightarrow \underline{162 \leq k < 346.8}$$

Soit le système donné par la figure suivante avec



$$: G(p) = \frac{4}{p(p+2)} \text{ et } H(p) = \frac{p+1}{p+3}$$

$$F(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)H(p)} = \frac{\frac{4}{p(p+2)}}{1 + \frac{4}{p(p+2)} \frac{(p+1)}{p+3}} = \frac{\frac{4}{p(p+2)}}{\frac{4p+4+(p+2)(p+3)p}{p(p+2)(p+3)}}$$

$$F(p) = \frac{4(p+3)}{4p+4+(p+2)(p+3)p} = \frac{4(p+3)}{4p+4+(p^2+3p+2p+6)p} = \frac{4(p+3)}{4p+4+p^3+3p^2+2p^2+6p} = \frac{4(p+3)}{p^3+5p^2+10p+4}$$

$p^3 + 5p^2 + 10p + 4 = 0, \quad B_i > 0, \quad m = 3, B_3 = 1, B_2 = 5, B_1 = 10 \text{ et } B_0 = 4$

la table de Routh :

1	10	0	0
5	4	0	0
46/5	0	0	0
4	0	0	0

, on voit que tous les éléments de la 1ère colonne sont positifs et de même signe

⇒ Système stable

L'erreur statique $\xi_{01} = \lim_{p \rightarrow 0} [pG_0(p)E(p)]$

Avec : $G_0(p) = \frac{1}{1+T(p)} = \frac{1}{1+G(p)H(p)}$ et $E(p) = \frac{1}{p}$ pour l'échelon et $E(p) = \frac{1}{p^2}$ pour la rampe

1^{er} cas : $E(p) = \frac{1}{p}$

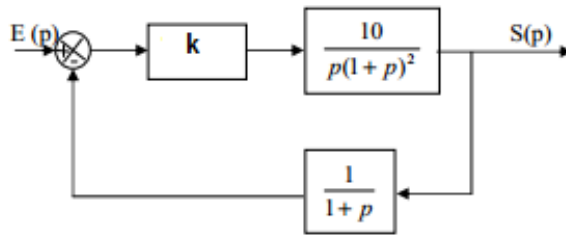
$$\xi_{01} = \lim_{p \rightarrow 0} [pG_0(p)E(p)] = \xi_{01} = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{1}{(1+G(p)H(p))} \frac{1}{p} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1+G(p)H(p)} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1 + \frac{4}{p(p+2)} \frac{(p+1)}{p+3}} \right]$$

$$\xi_{01} = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{p(p+2)(p+3)}{p(p+2)(p+3) + 4(p+1)} \right] = 0$$

2^{eme} cas : $E(p) = \frac{1}{p^2}$

$$\xi_{01} = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{1}{(1+G(p)H(p))} \frac{1}{p^2} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1+G(p)H(p)} \frac{1}{p} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1 + \frac{4}{p(p+2)} \frac{(p+1)}{p+3}} \frac{1}{p} \right]$$

$$\xi_{01} = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{p(p+2)(p+3)}{p(p+2)(p+3) + 4(p+1)} \frac{1}{p} \right] = \frac{3}{2}$$

Solution de l'exercice n°3 :

Etude de La stabilité :

$$F(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)H(p)} = \frac{\frac{10k}{p(p+1)^2}}{1 + \frac{10k}{p(p+1)^2} \frac{1}{1+p}} = \frac{\frac{10k}{p(p+1)^2}}{\frac{p(p+1)^2(p+1) + 10k}{p(p+1)^2(p+1)}}$$

$$F(p) = \frac{10k(p+1)}{p(p+1)^2(p+1) + 10k} = \frac{10k(p+1)}{p(p^2 + 2p + 1)(p+1) + 10k} =$$

$$\frac{10k(p+1)}{(p^3 + 2p^2 + p)(p+1) + 10k} = \frac{10k(P+1)}{p^4 + p^3 + 2p^3 + 2p^2 + p^2 + p + 10k}$$

$$p^4 + 3p^3 + 3p^2 + p + 10k = 0, \quad B_i > 0, \quad m = 4, B_4 = 1, B_3 = 3, B_2 = 3, B_1 = 1 \text{ et } B_0 = 10k$$

la table de Routh :

1	3	10k	0	0	, Pour que le système soit stable ;
3	1	0	0	0	
$\frac{8}{3}$	10k	0	0	0	
$\frac{8}{3} - 10k$					
$\frac{8}{3}$	0	0	0	0	
10k	0	0	0	0	

$$\text{il faut que : } \frac{\frac{8}{3} - 10k}{\frac{8}{3}} > 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3} - 10k > 0 \Rightarrow \frac{8}{3} > 10k \Rightarrow \frac{8}{30} > k \Rightarrow k < \frac{8}{30}$$

$$\text{Et } 10k > 0 \Rightarrow 0 < k < \frac{8}{30}$$

Etude de l'erreur statique :

Pour une entrée échelon unitaire l'erreur est :

$$\xi_{0n} = \lim_{p \rightarrow 0} p \xi(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1}{p^{n-1}} \frac{1}{1+T(p)} \right), \text{ on a : } \xi_{01} = \lim_{p \rightarrow 0} [p G_0(p) E(p)] \text{ avec : } G_0(p) = \frac{1}{1+T(p)} \text{ et } E(p) = \frac{1}{p}$$

$$\xi_{01} = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{1}{(1+T(p))} \frac{1}{p} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1 + \frac{10k}{p(p+1)^2} \frac{1}{(1+p)}} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\left(\frac{p(p+1)^2(1+p)}{p(p+1)^2(1+p) + 10k} \right) \right] = 0$$

Pour une entrée rampe l'erreur est :

$$\xi_{0n} = \lim_{p \rightarrow 0} p \xi(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1}{p^{n-1}} \frac{1}{1+T(p)} \right), \text{ on a : } \xi_{01} = \lim_{p \rightarrow 0} [p G_0(p) E(p)] \text{ avec : } G_0(p) = \frac{1}{1+T(p)} \text{ et } E(p) = \frac{1}{p}$$

$$\xi_{01} = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{1}{(1+T(p))} \frac{1}{p^2} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1 + \frac{10k}{p(p+1)^2} \frac{1}{(1+p)}} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\left(\frac{p(p+1)^2(1+p)}{p(p+1)^2(1+p) + 10k} \right) \frac{1}{p} \right] =$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}{p^4 + p^3 + 2p^3 + 2p^2 + p^2 + p + 10k} \right] = \frac{1}{10k} \leq 0.1$$

$$\Rightarrow 10k \cdot 0.1 \geq 1 \Rightarrow \underline{k \geq 1}$$

Pour que le système soit stable et que son erreur ne dépasse pas 10%, il faut que :

$$k \text{ soit borné entre les deux valeurs } 1 \text{ et } \frac{8}{30}$$

Conclusion : ces deux conditions sont incompatibles, le correcteur proportionnel P est incapable de répondre à ces spécifications (stabilité et précision). On ne peut pas avoir les deux conditions en même temps pour une rampe comme entrée et une erreur de 10%.

Fiche de TD n°8:
(Analyse des systèmes asservis)

Exercice n°1 : Pour le système suivant donnée par la figure 1, tracer le Lieu des racines de la FTBF avec K comme paramètre de réglage :

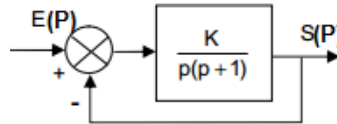


Figure1 : système du second ordre

Exercice n°2 : Déterminer la valeur de K qui garantit un dépassement d (%) < 6% si on a :

$$F(p) = \frac{k}{8p^3 + 21p^2 + 10.5p + k + 1}$$

Exercice n°3 : On considère un système à retour unitaire dont la FTBO est tracée dans le lieu de Black de la figure 2. La tracé est gradué en pulsation pour 6 points de la courbe (unité : rad/s)

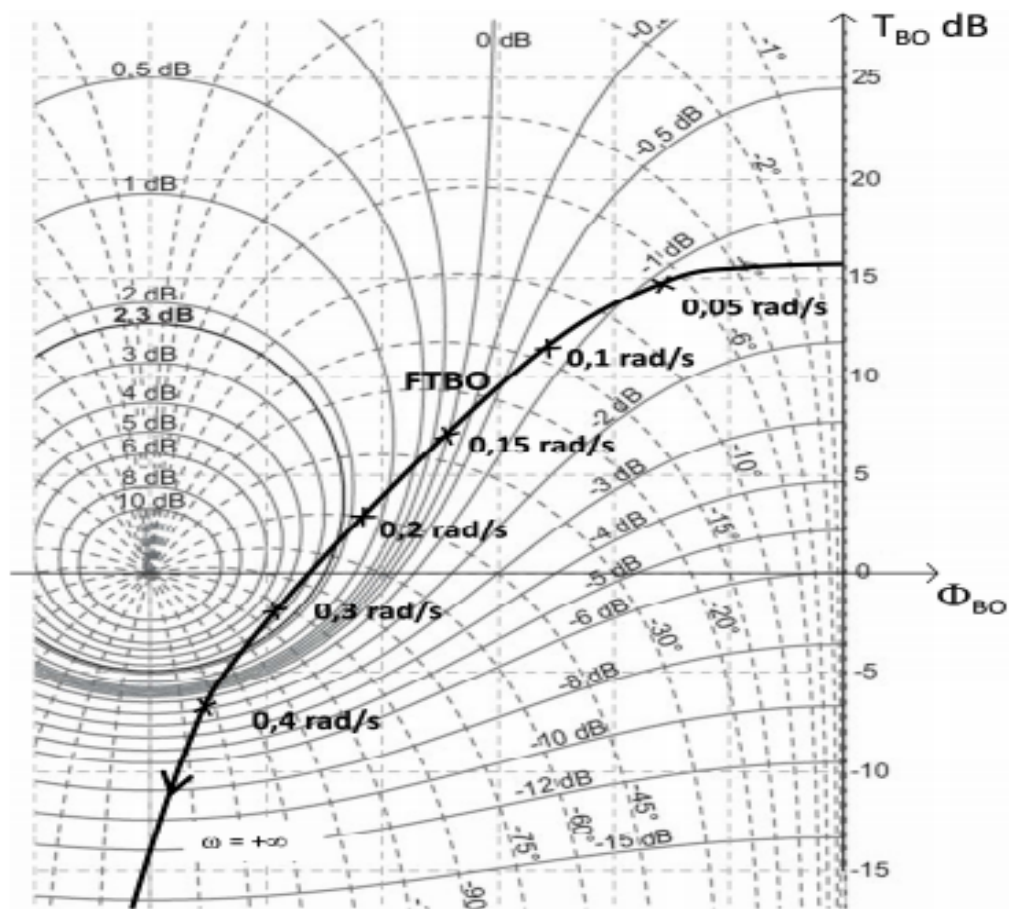


Figure 2

Donner les marges de gain et de phase du système considéré. Conclure sur la stabilité en boucle fermée.

Solution de la fiche de TD n°8:

(Analyse des systèmes asservis)

Solution de l'exercice n°1 :

Pour le système suivant donnée par la figure 1, tracer le Lieu des racines de la FTBF avec K comme paramètre de réglage :

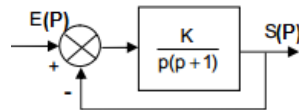


Figure1 : système du second ordre

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = G(p)H(p) = \frac{\frac{k}{p(p+1)}}{1 + \frac{k}{p(p+1)}} = \frac{\frac{k}{p(p+1)}}{\frac{p(p+1) + k}{p(p+1)}} = \frac{k}{p^2 + p + k}$$

$$p^2 + p + k = 0 \text{ pour } \Delta = 1 - 4k$$

$$\text{si } \Delta > 0 \Rightarrow p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4k} : \text{on a 2 racines réelles et } k \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{si } \Delta < 0 \Rightarrow p_{1,2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{4k - 1}}{2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{4k - 1} : \text{on a 2 racines complexes et } k > \frac{1}{4}$$

Le lieu des racines avec comme paramètre k, a la forme de la figure 2, la construction du lieu des racines se fait en étudiant la FTBO (P-Z=2), on a 2 zéros à l'infini et 2 pôles 0 et -1.

Deux branches asymptotiques direction $\pm \pi/2$, point d'intersection des branches abscisse $(0 + (-1))/2 = -1/2$. Point de départ des branches les pôles 0 et -1, point de bifurcation -1/2, pôles réels, pôles complexes sur la deuxième branche.

Tous les pôles sont situés sur le demi-plan gauche, donc système stable en BF. Le tracé du réseau du lieu des pôles à amortissement constants (droites) et du lieu des courbes à pulsation propre constante (cercles) permettent de déterminer k.

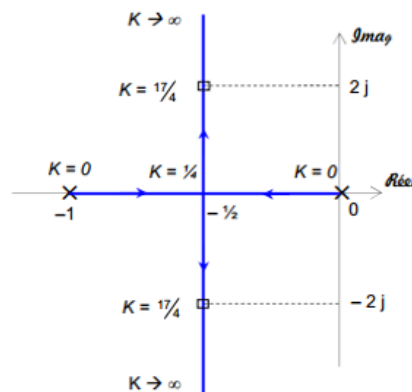


Figure2 : lieu des racines de la fonction F(p), avec le gain k variable

Solution de l'exercice n°2

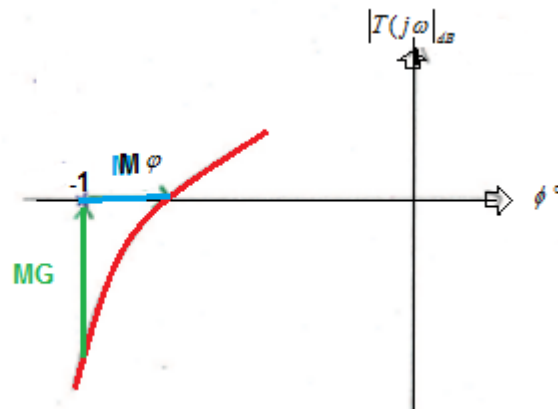
$$F(p) = \frac{k}{8p^3 + 21p^2 + 10.5p + k + 1}$$

$$\alpha_1 = \frac{a_1^2}{a_0 a_2} = \frac{10.5^2}{21 * (k+1)} = \frac{5.25}{1+k}$$

$$\alpha_2 = \frac{a_2^2}{a_1 a_3} = \frac{21^2}{10.5 * 8} = 5.25 \text{ Pour un dépassement } d \leq 6\% \Rightarrow$$

$$\alpha \geq 2 \Rightarrow \frac{5.25}{1+k} \geq 2 \Rightarrow \frac{5.25}{2} \geq 1+k \Rightarrow \frac{5.25}{2} - 1 \geq k \Rightarrow 1.625 \geq k \Rightarrow k \leq 1.625$$

Solution de l'exercice n°3



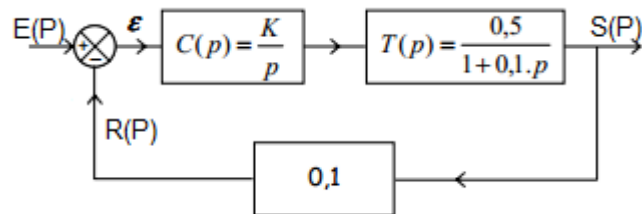
On relève à partir de l'Abaque :

La marge de phase : $\Delta\phi = M_\phi \approx 40^\circ$ et La marge de Gain : $\Delta G = M_G = 14\text{dB}$

$\Delta\phi > 0$ et $\Delta G > 0 \Rightarrow$ Le système est stable en Boucle fermée

Fiche de TD n°9:
(Correction des systèmes asservis)
Exercice n°1 :

On considère le système bouclé de la figure suivante :



1. Etablir l'expression de la transmittance $F(p)$ en boucle fermée de ce système asservi.
2. Calculer la valeur de K permettant d'obtenir un dépassement de 16% en réponse à un échelon unitaire. Donner l'expression numérique de $F(p)$.
3. Calculer l'erreur statique, $\varepsilon(+\infty)$, en réponse à un échelon unitaire, et en réponse à une rampe de pente $\alpha = 2$.
4. Quels sont le nom et le rôle du correcteur utilisé dans ce système asservi ?

Exercice n°2 :

Soit un système à retour unitaire, dont la fonction en boucle ouverte est :

$$T(p) = \frac{100}{(1+0.2p)(1+0.4p)(1+2.5p)}$$

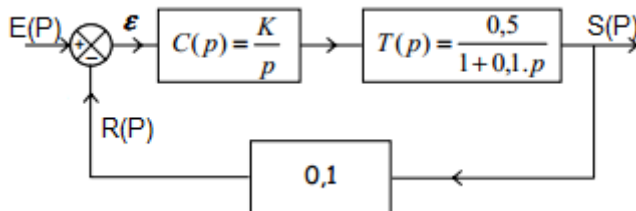
1. Etudier la stabilité
2. Déterminer les marges de stabilité ou d'instabilité
3. Analyser l'effet du correcteur à action proportionnel
4. Calculer les erreurs statique et dynamique

Exercice n°3

On considère un système de fonction de transfert : $G(p) = \frac{k}{(p+1)^3}$ avec $k > 0$ placé dans une

boucle de régulation à retour unitaire. On souhaite avoir à la fois une marge de phase supérieure à 45° et un temps de montée plus petit que 0,5 s.

Calculer la valeur de k qui assure, en boucle fermée, un temps de montée de 2,15 s. Calculer, pour cette valeur de k , la valeur de la marge de phase. En déduire l'expression de la fonction de transfert du correcteur à avance de phase qu'il faut introduire dans la chaîne directe.

Solution de la fiche de TD n°9:
(Correction des systèmes asservis)
Solution de l'exercice n°1 :


1. La fonction de transfert en boucle fermée :

$$F(p) = \frac{\frac{K}{p} \frac{0.5}{1+0.1p}}{1 + \frac{K}{p} \frac{0.5}{1+0.1p} \cdot 0.1} = \frac{0.5K}{p(1+0.1p) + 0.05K} = \frac{10}{1 + \frac{p}{0.05K} + \frac{p^2}{0.5K}}$$

F(p) : est un système du second ordre (2)

Un dépassement d=16% correspond à un facteur d'amortissement ξ ou m=0.5

En identifiant F (p) à l'expression canonique, il vient :

$$\omega_0^2 = 0.5K \text{ et } \frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{1}{0.05K} \Rightarrow 2\xi = \frac{\sqrt{0.5K}}{0.05K} \Rightarrow \xi = \frac{\sqrt{0.5K}}{0.1\sqrt{K}\sqrt{K}} = \frac{\sqrt{0.5}}{0.1\sqrt{K}} \Rightarrow \sqrt{K} = \frac{\sqrt{0.5}}{0.1\xi} \Rightarrow K = \frac{0.5}{0.01\xi^2} = \frac{0.5}{0.01 \cdot 0.5^2} = 200 \Rightarrow F(p) = \frac{10}{0.01p^2 + 0.1p + 1}$$

2. D'après le théorème de la valeur finale :

$$\begin{aligned} \xi(+\infty) &= \lim_{p \rightarrow 0} p \xi(p) \text{ Avec : } \xi(p) = E(p) - R(p) = E(p) - \xi(p) \frac{K}{p} \frac{0.05}{1+0.1p} \Rightarrow \\ \xi(p) + \xi(p) \frac{K}{p} \frac{0.05}{1+0.1p} &= E(p) \Leftrightarrow \xi(p) \left(1 + \frac{0.05K}{p(1+0.1p)} \right) = E(p) \Rightarrow \xi(p) = E(p) \frac{p(1+0.1p)}{p(1+0.1p) + 0.05K} \\ \xi(+\infty) &= \lim_{p \rightarrow 0} p E(p) \frac{p(1+0.1p)}{p(1+0.1p) + 0.05K} \end{aligned}$$

Réponse à un échelon unitaire : E(p)=1/p

$$\xi(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p E(p) \frac{p(1+0.1p)}{p(1+0.1p) + 0.05K} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{p(1+0.1p)}{p(1+0.1p) + 0.05K} = 0$$

Réponse à un échelon unitaire : $E(p)=1/p$

$$\xi(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) \frac{p(1+0.1p)}{p(1+0.1p)+0.05K} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{p(1+0.1p)}{p(1+0.1p)+0.05K} = 0$$

Réponse à une rampe : $E(p)=2/p^2$

$$\xi(+\infty) = \lim_{P \rightarrow 0} PE(P) \frac{P(1+0.1P)}{P(1+0.1P)+0.05K} = \lim_{P \rightarrow 0} P \frac{2}{P^2} \frac{P(1+0.1P)}{P(1+0.1P)+0.05K} = \frac{2}{0.05K} = \frac{40}{k}$$

1. C'est un correcteur intégral, son rôle est d'annuler l'erreur en réponse à un échelon unitaire.

Solution de l'exercice n°2 :

Soit un système à retour unitaire, dont la fonction en boucle ouverte est :

$$T(p) = \frac{100}{(1+0.2p)(1+0.4p)(1+2.5p)}$$

- 1 Pour la stabilité en BF :

$$T(p) = \frac{100}{(1+0.2p)(1+0.4p)(1+2.5p)} = \frac{100}{0.2p^3 + 1.58p^2 + 3.1p + 1}$$

$$1 + T(p) = 0.2p^3 + 1.58p^2 + 3.1p + 101 = 0$$

On peut trouver la matrice d'Hurwitz comme suit, et avec l'équation caractéristique approprié et c'est le même raisonnement avec la 2ème équation caractéristique qui est appliquée dans toutes nos solutions.

Critère de Hurwitz – Le polynôme est de Hurwitz si et seulement si les n mineurs principaux

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & & \vdots \\ a_5 & a_4 & a_3 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{i-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_i \end{vmatrix}$$

($i = 1, \dots, n$) sont tous > 0 .

$$R(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i} = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

Et si on prend l'équation caractéristique de la manière suivante :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

Pour notre équation $n=3$, $a_n=a_3=0.2$; $a_{n-1}=a_2=1.58$; $a_{n-2}=a_1=3.1$ et $a_{n-3}=a_0=101$

$$\text{les } a_i > 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1.58 & 0.2 & 0 \\ 101 & 3.1 & 1.58 \\ 0 & 0 & 101 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 1.58 > 0; \Delta_2 = 1.58 * 3.1 - 101 * 0.2 < 0 \Rightarrow \text{système instable en BF}$$

2 les marges d'instabilité

$$\omega_1 : |T(j\omega_1)| = 1 \text{ et } \omega_2 : \varphi(T(j\omega_2)) = -\pi$$

$$T(j\omega) = \frac{100}{0.2P^3 + 1.58P^2 + 3.1P + 1} = \frac{100}{-j\omega^3 0.2 - 1.58\omega^2 + 3.1j\omega + 1} = \frac{100}{(1 - 1.58\omega^2) + j\omega(3.1 - 0.2\omega^2)}$$

$$\omega_1 : |T(j\omega_1)| = 1 \Rightarrow \omega_1 = 7.3048 \text{ rad / sec}$$

$$\omega_2 : \varphi(T(j\omega_2)) = -\pi \Rightarrow \omega_2 = 3.937 \text{ rad / sec}$$

$$\Delta G = -20 \log |T(j\omega_2)| = -20 \log \frac{100}{1 - 1.58(3.974)^2} = -12.6 \text{ dB}$$

$$\Delta \varphi = \pi - \arctg 0.2 - \arctg 0.4 - \arctg 2.5 = 33.6^\circ$$

Le calcul en détail des valeurs de ω_1 et ω_2

$$T(j\omega) = \frac{100}{0.2P^3 + 1.58P^2 + 3.1P + 1} = \frac{100}{-j\omega^3 0.2 - 1.58\omega^2 + 3.1j\omega + 1} = \frac{100}{(1 - 1.58\omega^2) + j\omega(3.1 - 0.2\omega^2)}$$

$$\omega_1 : |T(j\omega_1)| = 1 \Rightarrow \omega_1 = 7.35$$

ω_2 : condition sur la phase

$$\arg(T(j\omega_2)) = \pi = -\arctan(2.5\omega_2) - \arctan(0.2\omega_2) - \arctan(0.4\omega_2) \Rightarrow \arctan(0.2\omega_2) + \arctan(0.4\omega_2)$$

$$= \pi - \arctan(2.5\omega_2) \Rightarrow \frac{0.2\omega_2}{1 - 0.08\omega_2^2} = -2.5\omega_2$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \sqrt{1.24 / 0.08} = 3.937 \text{ rad / sec}$$

ω_1 : condition ω sur le gain

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{100}{(1 - 1.58\omega^2) + j\omega(3.1 - 0.2\omega^2)} \right| = \frac{100}{\sqrt{((1 - 1.58\omega^2)^2 + \omega^2(1.58\omega^2)^2)}$$

$$\Rightarrow \omega^6 / 25 + 3141 / 2500\omega^4 + 129 / 20\omega^2 + 1 = 10^4 \Rightarrow \omega_1 \text{ solution du polynome du degré 6}$$

roots([1/25 0 3141/2500 0 129/20 0 1-10^4]) admet une seule racine positive $\omega_1 = 7.3048 \text{ rad / sec}$

3 Analyser l'effet du correcteur a action proportionnelle

$$T_c(p) = T(p) C(p)$$

$$T(p) = \frac{100k}{(1 + 0.2p)(1 + 0.4p)(1 + 2.5p)} = \frac{100k}{0.2p^3 + 1.58p^2 + 3.1p + 1}$$

$$1 + T(p) = 0.2p^3 + 1.58p^2 + 3.1p + 100k + 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1.58 & 0.2 & 0 \\ 100k+1 & 3.1 & 1.58 \\ 0 & 0 & 100k+1 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 1.58 > 0; \Delta_2 = 1.58 * 3.1 - (100k+1)0.2 > 0 \Rightarrow k < 0.235$$

$$\text{Pour } k = 0.1 \Rightarrow \Delta G = 7.4 \text{ dB} > 0 \text{ et } \Delta \varphi = 27.6^\circ > 0$$

$$\text{Pour } k = 0.15 \Rightarrow \Delta G = 3.9 \text{ dB} > 0 \text{ et } \Delta \varphi = 13.7^\circ > 0$$

4 Calcul des erreurs statiques et dynamiques

$$\xi_{01} = \frac{1}{1+k'} = \frac{1}{1+100k} \text{ si } k = 0.1 \Rightarrow \xi_{01} = \frac{1}{11} \approx 9\%$$

$$\text{si } k = 0.235 \Rightarrow \xi_{0\min} = \frac{1}{1+100.235} \approx 4\%$$

Solution de l'exercice n°3 :

Le critère de Barkhausen, donne :

$$\frac{k}{(1 + \omega_{osc}^2)^{3/2}}$$

$$\varphi(osc) = -3 \arctan(\omega_{osc}) = -\pi \Rightarrow \omega_{osc} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\frac{k}{(1 + 3^2)^{3/2}} \leq 1 \Rightarrow k \leq 8$$

$$\omega_0 = \frac{3}{2.15} = 1.4 \text{ rad / sec}$$

On donne la condition de stabilité de ce système $k < 8$. Calculons la valeur de k qui permet d'obtenir un temps de montée de 2,15 s :

$$\text{On a : } \omega_{c_0} = \frac{\xi}{t_m} \approx \frac{3}{2.15} \approx 1.4 \text{ rad / s or : } G(\omega) = \frac{k}{(\sqrt{\omega^2 + 1})^3} \text{ et } \varphi(\omega) = -3 \arctg \omega$$

$$\text{Par définition : } G(\omega_{c_0}) = \frac{k}{(\sqrt{\omega_{c_0}^2 + 1})} \leq 1 \Rightarrow k = 5$$

Dans ces conditions la marge de phase vaut :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c_0}) = \pi - \arctg \omega_{c_0} = 17^\circ$$

Il faut introduire un correcteur : $C(P) = \frac{1 + aTP}{1 + TP}$ dans la chaîne directe, en le réglant pour obtenir une remontée de phase de 28° à la pulsation $\omega_{c_0} = 1,4 \text{ rad/s}$.

$$\text{On a donc : } \varphi_{\max} = \arcsin \frac{a-1}{a+1} = 28^\circ \Rightarrow a = 2.8 \text{ et } \omega_{\max} = \omega_{c_0} = \frac{1}{T\sqrt{a}} \Rightarrow T = \frac{1}{\omega_{c_0}\sqrt{a}} = 0.43 \text{ s}$$

$$C(P) = \frac{1 + 1.2P}{1 + 0.43P}$$

TD n°10 avec solution:**Synthèse d'un correcteur série à marge de phase ou de gain imposées****Exemple exercice n°3 du TD n° 9**

Le programme qui suit détermine le réglage proportionnel et les caractéristiques fréquentielles et temporelles à marge de phase ou de gain imposées.

Les marges de stabilité usuelles sont :

- Marge de Gain 12 à 18 dB
- Marge de Phase de 45 à 60 °

Le programme détermine la valeur de K_p , la marge de stabilité (gain ou phase) ainsi que les marges de module et de retard.

La marge de module est la distance minimale séparant le point critique -1 du lieu de Nyquist. Plus cette valeur est élevée, meilleure sera assurée la stabilité à l'égard d'une variation des caractéristiques du modèle.

La marge de retard est le rapport à la marge de phase exprimée en rad à la pulsation de coupure correspondant au gain unitaire de la FTBO. C'est-à-dire pour laquelle et définie la marge de phase. Cette valeur donne le retard pur maximal toléré n'ayant pas été pris en compte dans la détermination du modèle

1. PROGRAMME Matlab

```
%*****  
%*****FONCTION REGLAGE PROPORTIONNEL  
%*****  
function Y=calcul_correcteur_P(G,TYPE,VAL)  
% PROGRAMME QUI CALCULE LA VALEUR DE K REGLAGE PROPORTIONNEL  
% A MARGE DE GAIN IMPOSEE  
% A MARGE DE PHASE IMPOSEE  
% ARGUMENTS ENTREE  
% G : FT DEFINIE DANS WORKSPACE  
% TYPE : MP : MARGE DE PHASE  
% MG : MARGE DE GAIN IMPOSEE  
% VAL : VALEUR MARGE DE GAIN & MARGE DE PHASE  
% ARGUMENTS DE SORTIE DANS Y VARIABLE STRUCTUREE  
% PARAMETRES FREQUENTIELS  
% MG, MP : MARGES DE STABILITE AVANT CORRECTION  
% MM, MR : MARGE DE MODULE ET DE RETARD  
% W0,Wp : PULSATION GAIN UNITAIRE ET INVERSION AVANT CORRECTION  
% W0c : APRES CORRECTION Wp EST INCHANGE  
% MGc, MPc : MARGES DE STABILITE APRES CORRECTION  
% K : VALEUR DE REGLAGE  
% PARAMETRES TMPORELS  
% tp : TEMPS DE PIC  
% tr : TEMPS DE MONTEE A 95 %  
% te : TEMPS ETABLISSEMENT  
% Dep : DEPASSEMENT EN %  
[MG,MP,Wp,W0]=margin(G);
```

```

Kc=MG;
% CONVERSION MG EN dB
MG=20*log10(MG);
% VALEURS GAIN PHASE EN FONCTION PULSATION
[MAG,PHASE,W]=bode(G);
% TRACE DE BODE AVANT CORRECTION
    figure(1)
    bode(G)
switch TYPE
    case 'MG'
        K=10^((-VAL+MG)/20);
        [MGc,MPc,Wp,W0c]=margin(K*G);
        MGc=20*log10(MGc);
    case 'MP'
        PHI=VAL-180;
        G0=spline(PHASE,MAG,PHI);
        K=1/G0;
        [MGc,MPc,Wp,W0c]=margin(K*G);
        MGc=20*log10(MGc);
    otherwise
end
% TRACE DE BODE APRES CORRECTION
    figure(2)
    bode(K*G)
% SI SYSTEME STABLE CALCUL MARGES DE RETARD ET MODULE
if (MGc>0)&&(MPc>0)
[MAG,PHASE,W]=bode(K*G);
RHO=(MAG.*cos(PHASE*pi/180)+1).^2+(MAG.*sin(PHASE*pi/180)).^2;
rmin=RHO(min(RHO)==RHO);    % MARGE DE MODULE
Y.MM=rmin(1);
Y.MR=MPc/W0c*pi/180;    % MARGE DE RETARD EN sec
end
% CALCUL FTBF
F=feedback(K*G,1);
% REPONSE INDICIELLE
figure(3)
step(F);
% SORTIE CAR. FREQUENTIELLES
Y.MG=MG;
Y.MP=MP;
Y.MPc=MPc;
Y.MGc=MGc;
Y.Wp=Wp;
Y.W0=W0;
Y.W0c=W0c;
Y.Kc=Kc;
Y.K=K;
% DETERMINATION CARACTERISTIQUES TEMPORELLES
[R,T]=step(F);
Gs=polyval(F.num{1},0)/polyval(F.den{1},0);
    
```

```

% DEPASSEMENT EN %
dep=(max(R)-Gs)/Gs*100;
% TEMPS DE PIC
tp=T(R==max(R));
tt=T(T<=tp);
yy=R(T<=tp);
% TEMPS DE REPONSE A 95%
tr=spline(yy,tt,0.95*Gs);
n=length(T);
ii=n;
while abs(R(ii)-Gs)<=0.05*Gs
    ii=ii-1;
end
% TEMPS D'ETABLISSEMENT
te=T(ii+1);
% SORTIE CAR. TEMPORELS
Y.tp=tp;
Y.tr=tr;
Y.te=te;
Y.dep=dep;
%*****
    
```

2. Exemple Tiré de l'exercice 3 TD9 : marge de phase fixée à 45°

A titre d'exemple pour l'exercice 3 du TD N°9 ; on aura les commandes suivantes à l'invite Matlab.

```

>> num=100;
>> den=conv(conv([ 0.2 1],[ 0.4 1]),[ 2.5 1]);
>> G=tf(num,den);
>> Y=calcul_correcteur_P(G,'MP',45)
    
```

1-Résultats :

Caractéristiques fréquentielles :

Marge de Phase avant Correction (MG) -33.59 ° ; Après correction : 45 °
 Marge de Gain avant Correction (MP) --12.5 dB ° ; Après correction : 11.38 dB°
 Pulsation de Coupure avant Correction (W0): 7.3048 rad/ ; Après correction : 1.8626 rad/s
 Marge de Module (MM) : 0.2891 Marge de retard : 0.42 sec
 Pulsation d'inversion (Wp): 3.94 rad/s
Valeur de Kp : Kp : 0.0634 Valeur de Kc critique : 0.2349

Caractéristiques Temporelles :

Temps de Pic (tp): 1.5598 s Dépassement : (dep)32.17 %
 Temps de montée à 95 % (tr) : 0.9615 s ; Temps d'établissement (te): 3.4884 s

2-Graphes:

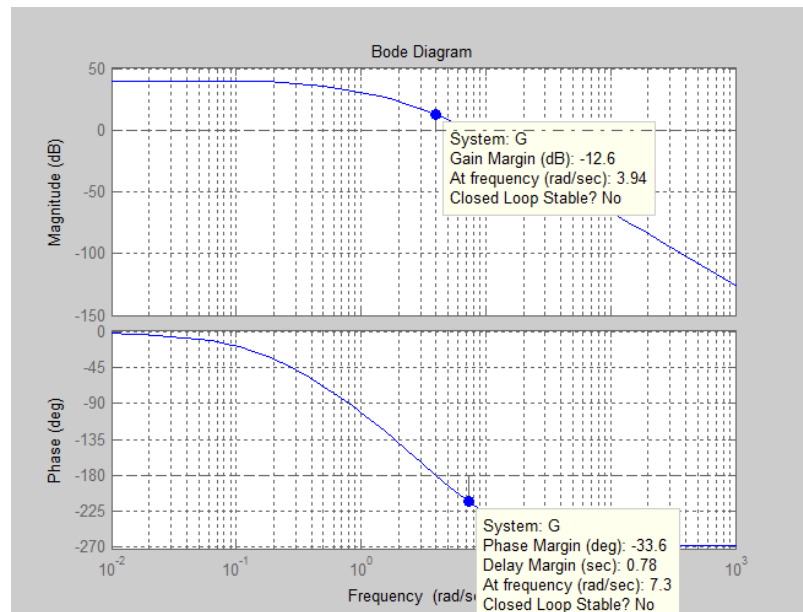


Diagramme de Bode avant correction

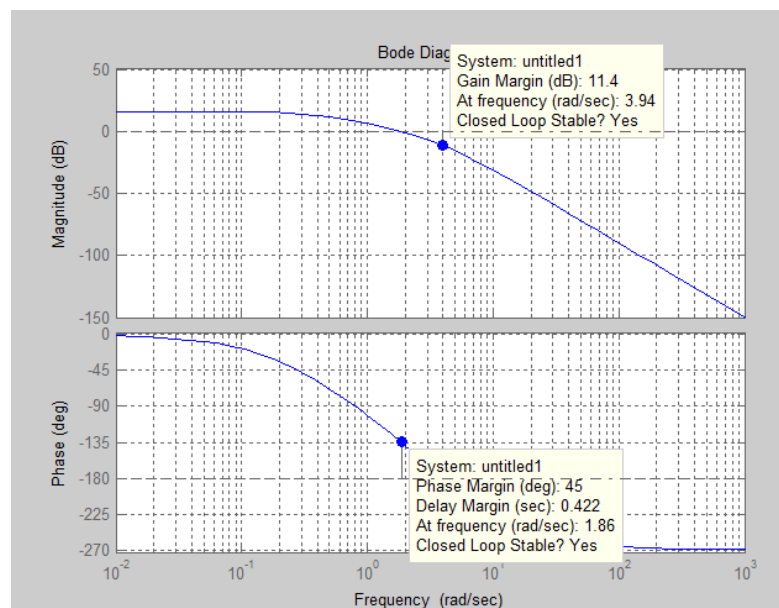
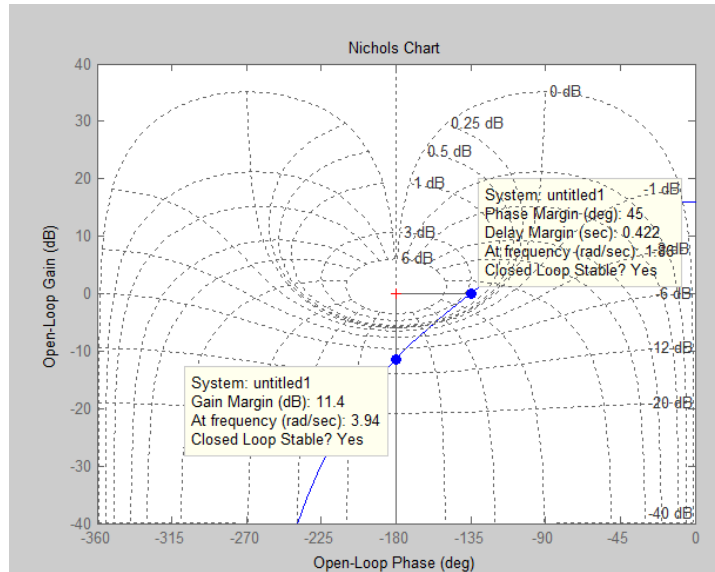
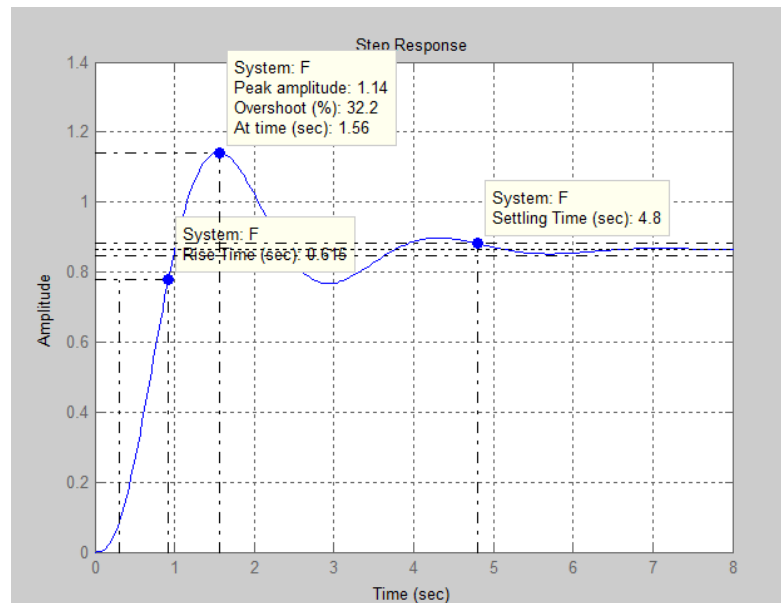


Diagramme de Bode après correction

Pour faire apparaître le réseau de Black (isophases et isograins), avec le menu contextuel sélectionner grid.

Pour cadrer dans les limites adéquates, toujours avec le menu contextuel, choisir propriétés puis limits, valider, puis close. Régler les limites verticales de gain entre -40 et 40. Pour faire apparaître les marges de stabilité, sélectionner alla margins et pointer sur les deux points qui apparaissent sur le graphe.


Tracé de Black-Nichols

Réponse indicielle $K_p = 0.0634$

3. Pour le même Exemple marge de gain fixée à 12 dB

Commande Matlab

```
>> Y=calcul_correcteur_P(G,'MG',12)
```

1-Résultats :

Caractéristiques fréquentielles :

Marge de Phase avant Correction (MG) -33.59° Après correction : 47.91°
 Marge de Gain avant Correction (MP) -12.5 dB Après correction : 12 dB
 Pulsation de Coupure avant Correction (ω_0): 7.3048 rad/s Après correction : 1.77 rad/s
 Marge de Module (MM) : 0.30 Marge de retard : 0.47 sec
 Pulsation d'inversion (ω_p): 3.94 rad/s

Valeur de K_p : $K_p : 0.059$

Valeur de K_c critique : 0.2349

Caractéristiques Temporelles :

Temps de Pic (t_p): 1.59 s

Dépassement : (dep) 29.76 %

Temps de montée à 95 % (t_r) : 1 s

Temps d'établissement (t_e): 3.54 s

2-Graphes:

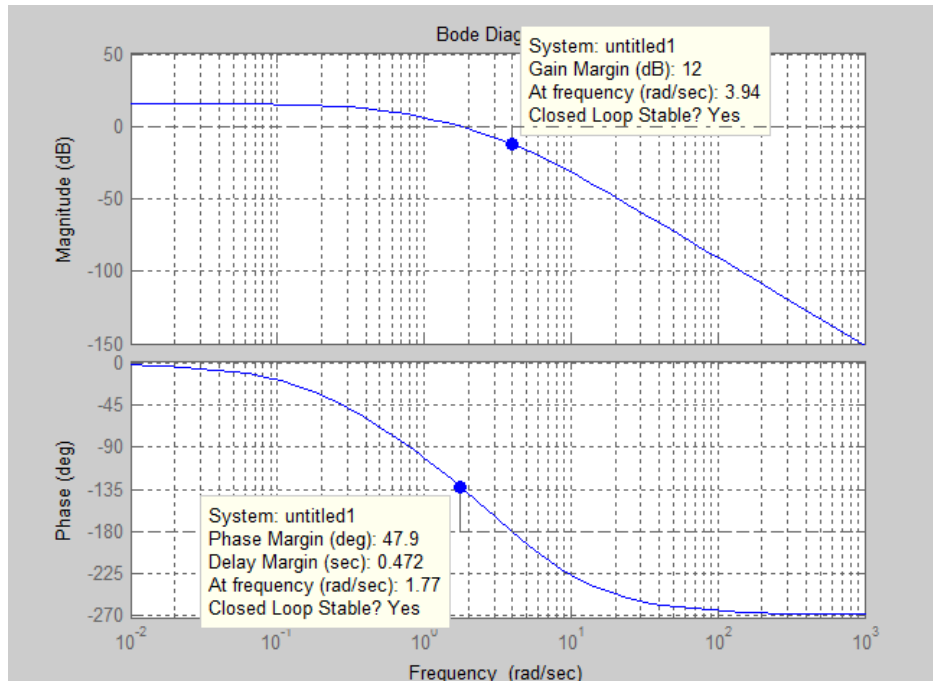


Diagramme de Bode après correction

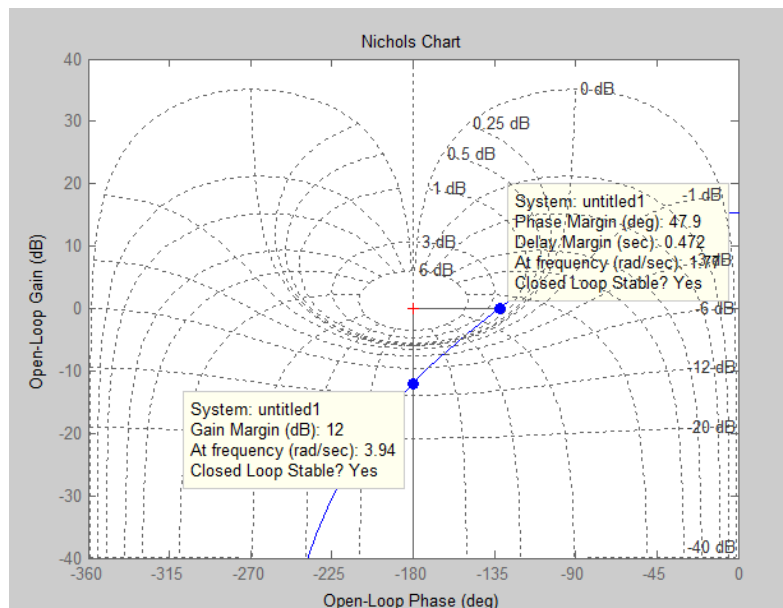
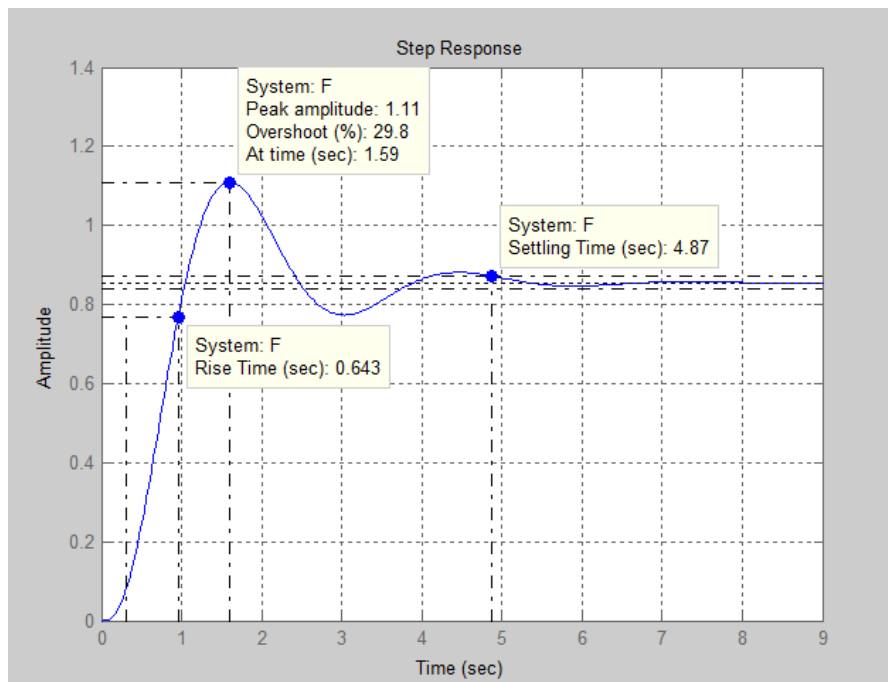


Diagramme de Black-Nichols



Réponse indicielle pour $K_p = 0.059$

Références Bibliographiques

- [1] P.Gatt. TS2 CIRA Régulation - Chap I Rappels 2009-2010 page 1-18
<http://perso.numericable.fr/cira/pdf/Cours/Regulation/1%29%20Boucles%20de%20regulation.pdf>
- [2] Mohammed-Karim FELLAH, Cours d'asservissements linéaires continus
- [4] Djaaffar rached Cours et Exercices de Régulation, USTO
- [5] François Manneville, Jacques Esquieu .. "Electronique Tome 2 : Systèmes bouclés linéaires, de communication et de filtrage : Cours et exercices", Ed. Eyrolles.
- [6] Stéphane LE METEIL. BTS2 CIRA. Résumé du cours sur la transformation de LAPLACE. 2005
- [7] Benoît Marx. Centre de Recherche en Automatique de Nancy. 2010.
http://www.cran.univlorraine.fr/perso/benoit.marx/harmo_fourier_laplace_ENSG.pdf
- [8] Eric Magarotto, Cours de Régulation. IUT Caen - Département Génie Chimique et Procédés. Université de Caen. 2004.
- [9] Bernard BAYLE, Systèmes et asservissements à temps continu Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg année 2007–2008
- [10] V.Boitier. Université Paul Sabatier Toulouse III, septembre 2005
- [11] Edouard Laroche Asservissement des systèmes linéaires à temps continu
- [12] Guy Chateigner Michel Boës Daniel Bouix Jacques Vaillant Daniel Verkindèr. MANUEL DE GÉNIE ÉLECTRIQUE. Ed : DUNOD.
- [13] J. J. Di Stefano, A.R. Stubberud, I. J. Williams. Systèmes asservies 1 cours et exercices. SERIE SCHAUM.
- [14] Correction des systèmes linéaires continus asservis (2) UV Automatique ; ASI 3
- [15] F. Milsant. Asservissements linéaires. Tome 1 et Tome 2. Editions Eyrolles. 4ème Edition. 1981.
- [16] Cours d'Asservissements linéaires Ecole Nationale d'Electricité et de Mécanique. Institut National Polytechnique de Lorraine. 1987.
- [15] P. Guyenot, T. Hans. Régulation et asservissement. Editions Eyrolles. 2ème Edition. 1989.
- [17] M. Rivoire, J-L. Ferrier. Cours d'automatique. Tome 2 (asservissement – régulation, commande analogique). Editions Eyrolles. 1990.
- [18] Technique de l'ingénieur D3 <https://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire>
- [19] Bourebia.O. Polycopié 'Cours d'Asservissement Linéaire et Régulation' /Licence Electronique
- [20] Maurice Rivoire, Jean-Louis Ferrier. "Cours d'automatique, tome 2 – Asservissement, régulation, commande analogique".
- [21] Philippe de Larminat.. "Automatique : Commande des systèmes linéaires", Ed. Dunod.
- [22] Franklin G.F., Powell J.D., Naemi-Emani A., Addison-Wesley. "Feedback Control of Dynamic Systems".
- [23] Beaucoup de liens de bonne qualité (dans tous les domaines) sur : <http://pagesperso-orange.fr/xcotton/electron/coursetdocs.htm>
- [24] J.M. Dutertre. Travaux dirigés, Automatique linéaire . Edition DUNOD, 2016.