المحاضرة التاسعة: توزيع كاي مربع؛ توزيع ستيودنت؛ توزيع فيشر

توزيع كاي مربع

لهذا التوزيع علاقة بالتوزيع الطبيعي وله تطبيقات عديدة في مجال الإحصاء الاستنتاجي نذكر منها على سبيل المثال:اختبارات جودة المطابقة والتجانس والاستقلالية والتباين ...

1) دالة الكثافة الاحتمالية

يقال أن المتغير العشوائي X يتوزع وفق توزيع مربع كاي بدرجة حرية v إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية لها الصيغة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{(2)^{\frac{v}{2}}\Gamma(\frac{v}{2})} x^{\frac{v}{2}-1} \quad e^{-\frac{x}{2}} \qquad ; \ x \geq 0$$

ونرمز لذلك بالرمز

$$X \sim \mathcal{X}_v^2$$

2) خصائص توزيع كاي مربع:

$$E(X) = v$$

$$V(X) = 2\,v$$

$$m_x(t) = (\frac{1}{1-2t})^{\frac{v}{2}}$$

وحيث أن دالة كثافة هذا التوزيع تعتمد على v وبالتالي لكل قيمة من قيم v سيكون لهذه الدالة شكل خاص بها، ولهذا السبب وضعت جداول خاصة بهذا التوزيع لقيم v وذلك لحساب الاحتمالات تحت منحنى هذا التوزيع وهي معطاة بجدول توزيع كاي مربع.

وبتعريف $\mathcal{X}_{\alpha,v}^2$ القيمة المؤوية للمتغير مربع كاي بدرجة حرية تساوي v، بحيث أن احتمال $\mathcal{X}_v^2$ أكبر من هذه القيمة يساوي α، أي أن:

$$P\left(\mathcal{X}_v^2 > \mathcal{X}_{\alpha,v}^2\right) = \alpha$$

توزيع ستيودنت

توزيع ستودنت له علاقة بالعينات العشوائية التي يتم اختيارها من مجتمع طبيعي ولهذا التوزيع تطبيقات عديدة في مجال الاحصاء الاستنتاجي.

ويعرف هذا التوزيع كما يلي:

إذا كان: $X \sim N(0,1)$

$$Y \sim \mathcal{X}_{\upsilon}^{2}$$

X وy مستقلين فإن:

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{\upsilon}}} \sim t_{\upsilon}$$

ويرمز لذلك بالرمز:

$$T \sim t_{\upsilon}$$

1) دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\upsilon+1}{2})}{\Gamma(\frac{\upsilon}{2})\sqrt{\upsilon\pi}}\left[1 + \frac{t^2}{\upsilon}\right]^{-\frac{\upsilon+1}{2}} \qquad ; \ -\infty < t < +\infty$$

شكل التوزيع:

دالة توزيع ستودنت هي دالة كثافة احتمالية،حيث يبلغ منحنى توزيع ستودنت نهاية عضمى عندما $t = 0$ وهو متناظر حول المستقيم $t = 0$ لأنه:

$(\forall\ t \in \mathfrak{R}: f(t(= f(-t)$ وهو يشبه التوزيع الطبيعي إلا أنه اكثر انخفاضا منه، بالإضافة *إلى أنه يتقارب إلى الصفر عندما يؤول* t *إلى* $+\infty$

ملاحظة:

إذا كان $n > 30$ *يمكن تقريب توزيع* t *من التوزيع الطبيعي*

- *نرمز بـ*$T_{\alpha\upsilon}$*لقيم* t *،حيث:*

$$P(T \geq T_{\alpha\upsilon}) = \int_{T_{\alpha\upsilon}}^{\infty} f(t)dt = \alpha$$

ملاحظة:

بسبب تماثل توزيع t *حول الصفر فإن:*

$$T_{\alpha\upsilon} = -T_{1-\alpha,\upsilon}$$

2) المميزات العددية:

$$E(t) = 0$$

$$V(t) = \frac{\upsilon}{\upsilon+2} \quad \upsilon > 2$$

توزيع فيشر F (Distribution-F)

يعد من أهم التوزيعات الإحصائية المتصلة، حيث يستخدم في العديد من التطبيقات الإحصائية كاختبار الفروض المتعلقة بتحليل التباين، اختبار المعنوية وغيرها.ويعرف هذا التوزيع كما يلي:

إذا كان X_1 , X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين لكل منهما توزيع $\mathcal{X}^2$ بـ υ_1 , υ_2 درجة حرية على الترتيب فإن المتغير العشوائي:

$$\boldsymbol{F = \frac{X_1/\upsilon_1}{X_2/\upsilon_2}}$$

له توزيع فيشر F بدرجة حرية υ_1 , υ_2 ونكتب: $F \sim F(\upsilon_1, \upsilon_2)$

ودالة كثافته الاحتمالية تعرف بالصيغة التالية:

$$g(F) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{2})}{\Gamma\left(\frac{\upsilon_1}{2}\right)\Gamma(\frac{\upsilon_2}{2})}\left(\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right)^{\frac{\upsilon_1}{2}} (\mathrm{F})^{\frac{\upsilon_1}{2}-1}\left(1+\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\,\mathrm{F}\right)^{-\frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{2}}, & \mathrm{F} > 0 \\ 0 \qquad , & \mathrm{F} \leq 0 \end{cases}$$

وهذا التوزيع يأخذ شكلا ملتويا ناحية اليمين (التواء موجب)، وتقل درجة الالتواء كلما زادت درجات حرية البسط υ_1 أو المقام υ_2 أو كليهما معا.

يرمز بـ$F_{,V_1\, V_2}$ لقيم الطرف الأعلى من توزيع فيشر ،أي:

$$p\left(F_{\upsilon_1,\upsilon_2} \geq F_{\alpha,\upsilon_1,\upsilon_2}\right) = \int_{F_{\upsilon_1,\upsilon_2}}^{\infty} g(F)\,\mathrm{dF} = \alpha$$

نظرا لأهمية هذا التوزيع أعدت له جداول خاصة تحتوي على قيم $\mathrm{F}_{,\upsilon_1\,\upsilon_2}$، عند قيم مختلفة لكل من $\alpha, \upsilon_2, \upsilon_1$

ملاحظة:

في حالة عدم توفر قيما لـ$F_{\alpha,\upsilon_1,\upsilon_2}$ نلجأ للعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{F_{1-\alpha,\upsilon_1\,\upsilon_2} = \frac{1}{F_{\alpha,\upsilon_2,\,\upsilon_1}}}$$

بعض خصائص توزيع فيشر:

1) $E(F) = \frac{v_2}{v_2-2} \quad , v_2 > 2$

2) $V(F) = \frac{2\, {v_2}^2\, (v_1+v_2-2)}{v_1\ \ (v_2-2)^2\ \ (v_2-4)}\ ,\ v_2 > 4$