المحاضرة الثامنة: توزيع قاما ؛ توزيع بيتا

توزيع قاما (Gamma Distribution)

دالة قاما:

إذا كان $\propto > 0$ تعرف دالة قاما كما يلي:

$$\Gamma(\propto) \quad = \int_{0}^{\infty} y^{\propto-1}\, e^{-y}\ dy \quad , \qquad \propto > 0$$

خواص دالة قاما:

1) $\Gamma(\propto +1) = \propto\ \Gamma(\propto)$, إذا كان $\propto \neq 0$ عدد حقيقي موجب

2) $\Gamma(\propto +1) = \propto !$ إذا كان $\propto$ عدد موجب صحيح، فإن

3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع قاما

نقول عن متغير عشوائي X أنه يتوزع وفق توزيع قاما وسيطاه $\propto, \beta > 0$ **ونكتب** $X \sim \Gamma(\propto , \beta)$، **إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية معرفة بالشكل:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\propto)\beta^{\propto}} x^{\propto-1}\, e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

خصائص توزيع قاما

1) $M_X\ (t) = (1-\beta t)^{-\propto}, t > \frac{1}{\beta}$

2) $\mu_x\ = E(x) = \propto \beta$

3) $\sigma_x^2 = V(x) = \propto \beta^2$

توزيع بيتا Betta distribustion

دالة بيتا:

إذا كان$0 < \beta$, $0 <\propto$ ، تعرف دالة بيتا كما يلي:

$$\boldsymbol{\beta}(\propto,\boldsymbol{\beta}) \quad = \int_{0}^{1} \mathbf{x}^{\propto-1}\,(\mathbf{1}-\mathbf{x})^{\boldsymbol{\beta}-\mathbf{1}}\ \mathbf{dx} \qquad , \qquad \propto> \mathbf{0}\,, \boldsymbol{\beta} > 0$$

العلاقة بين دالة قاما وبيتا:

$$\beta(\propto,\beta) = \frac{\Gamma(\propto)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\propto+\beta)}\ ; \qquad \propto> 0, \beta > 0$$

دالة كثافة الاحتمال لتوزيع بيتا:

نقول عن متغير عشوائي X أنه يتوزع وفق توزيع بيتا ونكتب $X\sim\beta(\propto,\beta)$، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية معرفة بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{\Gamma}(\propto+\boldsymbol{\beta})}{\boldsymbol{\Gamma}(\propto)\ \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\beta})}\mathbf{x}^{\propto-1}\,(\mathbf{1}-\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{\beta}-\mathbf{1}}, & \mathbf{0} < \mathbf{x} < 1 \\ \mathbf{0} & , \quad \mathbf{o.w} \end{cases}$$

خصائص توزيع بيتا

1) $E(x) = \frac{\propto}{\propto+\beta}$

2) $V(x) = \frac{\propto\beta}{(\propto+\beta)^2\,(\propto+\beta+1)}$