Formule d'Itô

Formules de base

Jusqu'à présent, on a défini l'intégrale stochastique, mais il nous manque encore des règles de calcul. La première règle de calcul est la suivante.

Théorème

Soit $(B_t, t \in \mathbb{R}^+)$ un mouvement brownien standard par rapport à $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}^+)$ et $f \in C^2(\mathbb{R})$ (i.e. f, f' et f'' sont des fonctions continues). On suppose de plus que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (f'(B_s))^2 ds\right] < \infty, \quad \forall t > 0. \tag{1}$$

Alors, pour tout $t > 0$:

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s) ds \quad \text{p.s.}$$

Remarque

— Vu que $(f'(B_t), t \geq 0)$ est un processus continu et adapté à $(\mathcal{F}_t)$, et que la condition (1) est vérifiée, $\int_0^t f'(B_s)dB_s$ est bien définie (et $\int_0^t f''(B_s)dB_s$ l'est également car l'application $s \mapsto f''(B_s)$ est continue).

— Le second terme du membre de droite dans (), (absent dans les règles de calcul différentiel classique), est appelé *terme d'Itô*. Il résulte de la variation quadratique non-nulle du mouvement brownien.

Démonstration (idée principale) :

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=1}^n \left(f(B_{t_i^{(n)}}) - f(B_{t_{i-1}^{(n)}})\right),$$

où $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} = t$ est une suite de partitions de $[0, t]$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq i\leq n} |t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}| = 0.$$

Par développement de Taylor classique, on a :

$$f(y) - f(x) = f'(x)(y-x) + \frac{1}{2}f''(x)(y-x)^2 + r(y-x),$$

où $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^2} = 0$ (on note aussi $r(h) = \rho(h^2)$). Donc

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=1}^{n} \left[f'(B_{t_{i-1}^{(n)}})(B_{t_i^{(n)}} - B_{t_{i-1}^{(n)}}) + \frac{1}{2}f''(B_{t_{i-1}^{(n)}})(B_{t_i^{(n)}} - B_{t_{i-1}^{(n)}})^2 + r_i^{(n)} \right]. \tag{2}$$

En prenant la limite, on obtient :

$$\int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds,$$

ce qui permet de conclure, vu que $\langle B\rangle_s = s$.

Remarque

Cette démonstration évite un très grand nombre de détails techniques concernant la convergence des divers termes. Notamment, il faut choisir les points $B_{t_{i-1}^{(n)}}$ (et non $B_{t_i^{(n)}}$ ou autre chose) pour le développement de Taylor, ce qui n'apparaît pas clairement ci-dessus.

Remarquons d'autre part que dans le cas où $f''(x) = 1$, on a déjà vu que :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(B_{t_i^{(n)}} - B_{t_{i-1}^{(n)}})^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle B\rangle_t = \int_0^t \mathbb{1}\, d\langle B\rangle_s.$$

Exemple Soit $f(x) = x$. La formule () s'écrit alors :

$$B_t - B_0 = \int_0^t 1\, dB_s + 0,$$

autrement dit, rien de nouveau (ceci correspond au calcul différentiel classique).

Exemple Soit $f(x) = x^2$. D'après la formule (), on a :

$$B_t^2 - B_0^2 = \int_0^t 2B_s\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2\, ds = 2\int_0^t B_s\, dB_s + t.$$

Autrement dit ce qui montre que $B_t^2 - t = 2\int_0^t B_s\, dB_s$, est une martingale, ce qu'on avait déjà démontré par une autre méthode.

Notons que la condition (1) est vérifiée car :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (2B_s)^2 ds\right] = \int_0^t 4s\, ds = 2t^2 < \infty.$$

Exemple Soit $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$ et $f''(x) = e^x$, et donc :

$$e^{B_t} - 1 = \int_0^t e^{B_s}\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{B_s}\, ds.$$

Noter qu'ici aussi la condition (1) est vérifiée, car :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (e^{B_s})^2 ds\right] = \int_0^t \mathbb{E}(e^{2B_s}) ds = \int_0^t e^{2s} ds = \frac{e^{2t} - 1}{2} < \infty.$$

Si on pose $X_t = e^{B_t}$, alors la formule précédente devient :

$$X_t - 1 = \int_0^t X_s\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t X_s\, ds.$$

Autrement dit, on a trouvé une équation intégrale pour le processus (X_t).

Sous forme différentielle, cette-ci s'écrit :

$$dX_t = X_t\, dB_t + \frac{1}{2} X_t\, dt, \quad X_0 = 1.$$

Vu que $\frac{dB_t}{dt}$ n'existe pas, "on ne divise pas par dt". Noter que la forme différentielle ci-dessus n'a aucun sens en tant que telle et ne constitue qu'une notation pour la forme intégrale donnée plus haut. L'esprit humain cependant a plus de facilité à raisonner avec des différentielles, c'est pourquoi celle-ci est largement répandue.

Sous une forme ou l'autre, l'équation ci-dessus est notre premier exemple d'équation différentielle stochastique. Il se trouve que c'est aussi un cas particulier de l'équation de Black and Scholes, largement utilisée en mathématiques financières pour décrire l'évolution du prix d'un actif (noter que la solution $X_t = e^{Bt}$ suit une loi log-normale et est toujours à valeurs positives).

Voyons maintenant une version légèrement plus élaborée de la formule ().

Théorème

Soient (B_t) un mouvement brownien standard et $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, i.e., les fonctions f, $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ sont continues. On suppose de plus que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)\right)^2 ds\right] < \infty, \quad \forall t > 0.$$

Alors, pour tout $t > 0$, on a presque sûrement :

$$f(t, B_t) - f(0, B_0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) ds.$$

Preuve (idée principale)

La démonstration reprend le,schéma de celle du premier Théorème esquissée ci-dessus. Le développement de Taylor utilisé est :

$$f(u, y) - f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)(u - t) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)(y - x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)(y - x)^2 + r(u - t, y - x),$$

Ce explique l'apparition du terme supplémentaire dans la formule.

Remarque

Vu que la fonction $t \mapsto t$ est une fonction à variation bornée, il n'est pas besoin d'effectuer un développement de la fonction f à l'ordre 2 en t.

Exemple Soit $f(t, x) = x^2 - t$. Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2.$$

Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -1 + 1 = 0.$$

Et :

$$B_t^2 - t = \int_0^t 2B_s\, dB_s.$$

On retrouve ainsi la même formule que ci-dessus.

Exemple Soit $f(t,x) = e^{x-\frac{t}{2}}$. Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}f, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f.$$

Donc à nouveau :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}f = 0.$$

Par conséquent :

$$e^{B_t-\frac{t}{2}} - 1 = \int_0^t e^{B_s-\frac{s}{2}}\, dB_s.$$

Le processus ($Z_t = e^{B_t-\frac{t}{2}}$) est une martingale, appelée la **martingale exponentielle** associée au mouvement brownien standard. De plus, il satisfait l'équation différentielle stochastique :

$$Z_t - 1 = \int_0^t Z_s\, dB_s,$$

c'est-à-dire, sous forme différentielle :

$$dZ_t = Z_t\, dB_t, \quad Z_0 = 1.$$

Remarque

On sait que le processus $X_t = e^{B_t}$ est une **sous-martingale**. En utilisant l'une ou l'autre des formules d'Itô ci-dessus, on a vu qu'il y a deux manières de l'écrire :

$$X_t = 1 + \int_0^t e^{B_s}\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{B_s}\, ds,$$

ou :

$$X_t = e^{t/2} + \int_0^t e^{\frac{t-s}{2}} e^{B_s}\, dB_s.$$

Or selon le théorème de décomposition de **Doob**, toute sous-martingale X_t continue peut s'écrire de manière unique comme $M_t + A_t$, où :

- M_t est une martingale continue.
- A_t est un processus croissant continu adapté tel que $A_0 = 0$.

L'exemple ci-dessus ne contredit-il donc pas le théorème ? Non, car le processus $\int_0^t e^{\frac{t-s}{2}} e^{B_s}\, dB_s$ n'est pas une martingale (à cause de la dépendance en t de l'intégrand).

Processus d'Itô (ou semi-martingale continue)

Définition Un processus d'**Itô** est un processus (X_t) pouvant se décomposer comme :

$$X_t = M_t + V_t,$$

où :

— (M_t) est une martingale continue de carré intégrable (par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)$).

— (V_t) est un processus continu à variation bornée, adapté à $(\mathcal{F}_t)$, avec $V_0 = 0$.

Remarque
Le nom **semi-martingale** vient simplement du fait que le processus (X_t) est composé pour moitié d'une martingale.

Exemple D'après le **théorème de décomposition de Doob**, toute sous-martingale (resp. sur-martingale) continue de carré intégrable est un processus d'Itô, car un processus croissant (resp. décroissant) est à variation bornée.

Exemple Soit (X_t) défini par :

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s\, dB_s + \int_0^t K_s\, ds,$$

où :

— (H_t) est un processus continu adapté tel que $\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2\, ds\right] < \infty$ pour tout $t \geq 0$.

— (K_t) est un processus continu et adapté.

Alors, (X_t) est un processus d'Itô.

Exemple Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ vérifiant la condition (1). Alors $(f(B_t))$ est un processus d'Itô, car par la formule (),

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds,$$

i.e. $(f(B_t))$ est la somme d'une martingale continue de carré intégrable ($M_t = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s$) et d'un processus continu à variation bornée ($V_t = \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds$) tel que $V_0 = 0$.

Définition Pour $t \geq 0$, la variation quadratique du processus d'Itô ($X_t = M_t + V_t$) est définie par

$$\langle X\rangle_t = \langle M\rangle_t,$$

et pour deux processus d'Itô ($X_t = M_t + V_t$) et ($Y_t = N_t + U_t$), on pose

$$\langle X, Y\rangle_t = \langle M, N\rangle_t.$$

Remarque

- Remarquer que si (X_t) est à variation bornée, alors $X_t = M_0 + V_t$ (rappelons ici que si (M_t) est une martingale continue à variation bornée, alors $M_t = M_0$ pour tout $t > 0$) et donc, $\langle X\rangle_t = 0$ selon la définition ci-dessus. De même, $\langle X, Y\rangle_t = 0$, quel que soit (Y_t) (ceci vient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle X, Y\rangle_t| \leq \sqrt{\langle X\rangle_t \langle Y\rangle_t}$).

- Si d'autre part (X_t) et (Y_t) sont indépendants (mais pas forcément à variation bornée), alors $\langle X, Y\rangle_t = 0$.

Définition Soit ($X_t = M_t + V_t$) un processus d'Itô et (H_t) un processus continu, adapté à $(\mathcal{F}_t)$ et tel que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 d\langle X\rangle_s\right] \equiv \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s\right] < \infty.$$

On pose

$$(H \cdot X)_t \equiv \int_0^t H_s dX_s = \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t H_s dV_s.$$

Remarquer qu'une intégrale stochastique par rapport à un processus d'Itô (X_t) est la somme d'une intégrale stochastique "pure" et d'une intégrale de Riemann-Stieltjes.