Université Abdelhafid Boussouf - Mila $2024 - 2025$
Institut des Mathématiques et informatique
Département des Mathématiques **Master 1 : MMTD**

Série no 3 : Gestion des filles d'attente

Exercice 1. *Un centre d'appel dispose de $c = 4$ opérateurs pour traiter les appels entrants, qui arrivent selon un processus de Poisson avec un taux d'arrivée de $\lambda = 10$ appels par minute. Le temps de service pour chaque appel est exponentiellement distribué avec un taux de service de $\mu = 3$ appels par minute pour chaque opérateur.*

1. *Calculer le taux d'occupation ρ de chaque opérateur et du centre d'appel dans son ensemble.*
2. *Déterminer la probabilité que tous les opérateurs soient occupés, c'est-à-dire que le système soit dans un état de blocage où tous les canaux sont occupés (avec $\pi_0 = \frac{1}{32.4}$).*
3. *Calculer la probabilité de file d'attente (probabilité qu'un appel soit mis en attente).*
4. *Déterminer le nombre moyen de clients dans la file d'attente et le temps moyen d'attente d'un client avant de recevoir un service.*

Exercice 2. *a) Écrire le nombre moyen de clients ainsi que le temps moyen passé par un client dans un système décrit par le modèle $M/M/c$ pour les cas suivants : $n_0 = 1$, $n_0 = 2$, $n_0 = 3$.*
b) On considère une cabine téléphonique avec une loi d'arrivée de Poisson avec un taux d'arrivée de 3 personnes/heure. Le temps passé par un individu dans la cabine suit la loi exponentielle de moyenne 10 minutes.

1. *Quel est le temps moyen d'attente de chaque individu ?*
2. *Quel est le nombre total moyen de personnes dans le système ?*
3. *Quelle est la probabilité que le temps total passé dans le système soit plus grand ou égal à 10 minutes ? 15 minutes ? 20 minutes ? Quelle conclusion peut-on en tirer ?*
4. *On suppose maintenant que le taux d'arrivée s'élève à 10 personnes/heure. On souhaiterait limiter le nombre moyen de personnes à moins de trois (resp. le temps d'attente moyen à moins de 10 minutes). De combien de cabines faudrait-il disposer au minimum ?*

Exercice 3. *Dans un centre d'appels, il y a deux types de clients : les clients réguliers et les clients VIP. Les appels arrivent dans le centre selon un processus de Poisson avec un taux d'arrivée total de $\lambda = 8$ appels par minute. Parmi ces appels, 25% sont des clients VIP, et les autres sont des clients réguliers. Le centre dispose de $c = 2$ agents pour traiter les appels. Le temps de service pour chaque appel est exponentiellement distribué avec un taux de service de $\mu = 6$ appels par minute pour chaque agent.*

Les appels des clients VIP ont une priorité plus élevée : s'il y a des clients VIP dans la file d'attente, ils sont servis avant les clients réguliers.

1. *Calculer le taux d'arrivée pour les clients VIP (λ_{VIP}) et les clients réguliers ($\lambda_{régulier}$).*
2. *Calculer le taux d'occupation global ρ des agents.*
3. *Déterminer la probabilité que les deux agents soient occupés.*

4. *Calculer le nombre moyen de clients VIP et de clients réguliers dans la file d'attente.*

Exercice 4. *Calculer pour chacune des deux files $M(\lambda)/M(\mu)/2$ (deux serveurs offrant chacun un service d'une durée moyenne $1/\mu$) et $M(\lambda)/M(2\mu)/1$ (un serveur offrant un service d'une durée moyenne $1/(2\mu)$) en régime stationnaire ($\lambda < 2\mu$) :*

— *la longueur moyenne de la file $\mathbb{E}(Q_\infty)$;*

— *le temps d'attente moyen avant service $\mathbb{E}(W_\infty)$, le temps de séjour moyen dans le système $\mathbb{E}(W_\infty + S_\infty)$;*

— *la probabilité de trouver le système vide $P(Q_\infty = 0) = P(W_\infty = 0)$.*

Dresser un tableau comparatif des résultats obtenus puis en tirer une conclusion.

Solution Exercice 1

Taux d'occupation ρ de chaque opérateur et du centre d'appel

Le taux d'occupation pour chaque opérateur est donné par :

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}.$$

Substituons les valeurs données ($\lambda = 10$, $c = 4$, $\mu = 3$) :

$$\rho = \frac{10}{4 \cdot 3} = \frac{10}{12} = 0.8333\,(83.33\%).$$

Le centre d'appel dans son ensemble a une occupation totale de :

$$\rho \cdot c = 0.8333 \cdot 4 = 3.3333\,(\text{clients en service en moyenne}).$$

2. Probabilité que tous les opérateurs soient occupés

Pour déterminer cette probabilité (P_c), nous utilisons la distribution d'équilibre pour l'état c :

$$P_c = \frac{(c\rho)^c}{c!}\pi_0,$$

où π_0 est la probabilité que le système soit vide, donnée comme $\pi_0 = \frac{1}{32.4}$. Calculons P_c pas à pas :

0.0.0.0.1 Calcul de ρ^c :

$$(c\rho)^c = (3.33)^4 = 123.$$

0.0.0.0.2 Calcul de $c!$:

$$c! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

0.0.0.0.3 Substituons dans P_c :

$$P_c = \frac{123}{24} \cdot \frac{1}{32.4} = 0.158\,(15.8\%).$$

3. Probabilité de file d'attente

La probabilité qu'un appel soit mis en attente est équivalente à la probabilité que tous les opérateurs soient occupés, c'est-à-dire,

$$P_{\text{queue}} = P_c = 0.15$$

4. Nombre moyen de clients dans la file d'attente et temps moyen d'attente

(a) Nombre moyen de clients dans la file d'attente (L_q) :

Le nombre moyen de clients dans la file d'attente est donné par :

$$L_q = \frac{P_c \cdot \rho}{(1-\rho)^2}.$$

Substituons les valeurs :

$$L_q = \frac{0.158 \cdot 0.83}{(0.17)^2} = 4.36\,(\text{clients}).$$

(b) Temps moyen d'attente (W_q) :

Le temps moyen d'attente est donné par :

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}.$$

Substituons les valeurs :

$$W_q = \frac{4.36}{10} = 0.43\,\text{minutes}.$$

Solution Exercice 2

a) On a d'abord :

$$\pi_0 = P(Q_\infty = 0) = \begin{cases} \left[1 + \frac{\rho}{1-\rho}\right]^{-1} = 1-\rho & \text{si } n_0 = 1, \\ \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)}\right]^{-1} = \frac{2-\rho}{2+\rho} & \text{si } n_0 = 2, \\ \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{6(1-\rho^3)}\right]^{-1} = \frac{2(3-\rho)}{6+4\rho+\rho^2} & \text{si } n_0 = 3. \end{cases}$$

Puis :

$$E(Q_\infty) = \begin{cases} \rho + \pi_0 \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho} & \text{si } n_0 = 1, \\ \rho + \pi_0 \frac{\rho^3}{(2-\rho)^2} = \frac{4\rho}{4-\rho^2} & \text{si } n_0 = 2, \\ \rho + \pi_0 \frac{\rho^4}{2(3-\rho)^2} = \frac{\rho(18+6\rho-\rho^2)}{(3-\rho)(6+4\rho+\rho^2)} & \text{si } n_0 = 3. \end{cases}$$

Et :

$$E(W_\infty) = \begin{cases} \pi_0 \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} & \text{si } n_0 = 1, \\ \pi_0 \frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)} \frac{1}{2\mu-\lambda} = \frac{\rho^2}{\mu(4-\rho^2)} & \text{si } n_0 = 2, \\ \pi_0 \frac{\rho^3}{6(1-\rho^3)} \frac{1}{3\mu-\lambda} = \frac{\rho^3}{\mu(3-\rho)(6+4\rho+\rho^2)} & \text{si } n_0 = 3. \end{cases}$$

b) Le taux d'arrivée est donné par $\lambda = 3$ personnes/h $= 0.05$ personnes/mn et le temps d'appel moyen est $1/\mu = 10$ mn/personne, d'où l'intensité du trafic $\rho = \lambda/\mu = 0.5 < 1$.

Dans ces conditions :

1. Le temps moyen d'attente d'un usager est donné par :

$$E(W_\infty) = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = 10 \text{ mn}.$$

2. Le nombre moyen de personnes dans le système est donné par :

$$E(Q_\infty) = \frac{\rho}{1-\rho} = 1.$$

3. Le temps de séjour (temps d'attente + temps de communication), $W_\infty + S_\infty$, suit la loi exponentielle $E(\mu - \lambda = 0.05)$ et donc :

$$P(W_\infty + S_\infty > 10\,\text{mn}) = e^{-0.05\times 10} = 0.606,$$

$$P(W_\infty + S_\infty > 15\,\text{mn}) = e^{-0.05\times 15} = 0.470,$$

$$P(W_\infty + S_\infty > 20\,\text{mn}) = e^{-0.05\times 20} = 0.367.$$

Le temps de séjour moyen vaut :

$$E(W_\infty + S_\infty) = 20\,\text{mn}.$$

La probabilité de rester longtemps dans le système est de plus en plus faible. La probabilité de rester plus que le temps de séjour moyen est de 36.7%.

4. Maintenant $\lambda = 10$ personnes/h, $\mu = 6$ personnes/h $= 0.1$ personnes/mn et alors $\rho = \frac{5}{3} \in]1,2[$. Si l'on dispose de n_0 cabines téléphoniques :

   (a) Pour $n_0 = 1$, $\rho > 1$, il n'y a pas de régime stationnaire, la longueur de la file devient de plus en plus grande et :
   $$E(Q_\infty) = E(W_\infty) = +\infty.$$

   (b) Pour $n_0 = 2$, $\rho < 2$, il y a un régime stationnaire et :
   $$E(Q_\infty) = \frac{60}{11} = 5.45 \,\text{personnes},$$
   $$E(W_\infty) = \frac{25}{10 \times 11} = 22 \,\text{mn}\, 42 \,\text{s}.$$

   (c) Pour $n_0 = 3$, $\rho < 3$, il y a un régime stationnaire et :
   $$E(Q_\infty) = \frac{1135}{556} = 2.04 \,\text{personnes},$$
   $$E(W_\infty) = \frac{125}{10 \times 556} = 2 \,\text{mn}\, 12 \,\text{s}.$$

   Il faut donc disposer d'au moins **trois cabines** pour avoir un nombre moyen de personnes inférieur à trois ou un temps d'attente moyen inférieur à 10 mn.

Solution Exercice 3

1. **Taux d'arrivée pour chaque type de client**
   Le taux d'arrivée pour les clients VIP est :
   $$\lambda_{\text{VIP}} = 0.25 \times \lambda = 0.25 \times 8 = 2 \text{ appels/minute}$$
   Le taux d'arrivée pour les clients réguliers est :
   $$\lambda_{\text{régulier}} = 0.75 \times \lambda = 0.75 \times 8 = 6 \text{ appels/minute}$$

2. **Taux d'occupation global des agents**
   Le taux d'occupation global ρ est :
   $$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{8}{2 \times 6} = \frac{8}{12} = 0.6667$$

3. **Probabilité que les deux agents soient occupés**
   La probabilité que les deux agents soient occupés dans un système $M/M/2$ peut être calculée en utilisant la formule d'Erlang B pour $B(2, \rho)$:
   $$B(2,\rho) = \frac{\frac{(\lambda/\mu)^2}{2!}}{1 + \frac{\lambda/\mu}{1!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!}}$$

4. **Nombre moyen de clients dans la file d'attente**
   Pour calculer le nombre moyen de clients en attente, en tenant compte de la priorité des VIP, il est possible d'utiliser la formule de Pollaczek-Khinchine pour chaque type de client. Pour simplifier, on peut utiliser les formules de la file d'attente $M/M/2$ et ajuster pour les probabilités d'attente de chaque type de client.

Solution Exercice 4

Comparaison entre $M(\lambda)/M(2\mu)/1$ et $M(\lambda)/M(\mu)/2$

0.0.0.0.4 Résultats comparés :

$$\mathbb{E}(Q_\infty): \quad \frac{\lambda}{2\mu-\lambda} < \frac{4\lambda\mu}{4\mu^2-\lambda^2},$$
$$\mathbb{E}(W_\infty): \quad \frac{\lambda}{2\mu(2\mu-\lambda)} > \frac{\lambda^2}{\mu(4\mu^2-\lambda^2)},$$
$$\mathbb{E}(W_\infty+S_\infty): \quad \frac{1}{2\mu-\lambda} < \frac{4\mu}{4\mu^2-\lambda^2},$$
$$P(W_\infty=0): \quad 1-\frac{\lambda}{2\mu} < \frac{2\mu^2+\lambda\mu-\lambda^2}{\mu(2\mu+\lambda)}.$$

Vérification des comparaisons :

1. Pour la comparaison de $\mathbb{E}(Q_\infty)$:

$$\frac{4\lambda\mu}{4\mu^2-\lambda^2} - \frac{\lambda}{2\mu-\lambda} = \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} > 0.$$

2. Pour la comparaison de $\mathbb{E}(W_\infty)$:

$$\frac{\lambda^2}{\mu(4\mu^2-\lambda^2)} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu-\lambda)} = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} < 0.$$

3. Pour la comparaison de $\mathbb{E}(W_\infty+S_\infty)$:

$$\frac{4\mu}{4\mu^2-\lambda^2} - \frac{1}{2\mu-\lambda} = \frac{1}{2\mu+\lambda} > 0.$$

4. Pour la comparaison de $P(W_\infty=0)$:

$$\frac{2\mu^2+\lambda\mu-\lambda^2}{\mu(2\mu+\lambda)} - \left(1-\frac{\lambda}{2\mu}\right) = \frac{\lambda}{2\mu}\cdot\frac{2\mu-\lambda}{2\mu+\lambda}.$$

Commentaire :

Le temps d'attente pour la file $M(\lambda)/M(2\mu)/1$ est plus long que celui de la file $M(\lambda)/M(\mu)/2$. En revanche, le temps de séjour total est plus court. De même, la longueur de la file $M(\lambda)/M(2\mu)/1$ est moins longue que celle de la file $M(\lambda)/M(\mu)/2$.

En conséquence, il est préférable de remplacer deux serveurs par un seul serveur deux fois plus efficace.