# Chapitre 4 : Systèmes linéaire forcés à un degré de liberté.

## Introduction

Les vibrations (oscillations) forcées, se produisent lorsque le système est soumis le long de ses vibrations à une des forces extérieures périodiques. Souvent, ces forces s'appellent excitations extérieures. Le mouvement résultant, s'appelle la réponse du système à l'excitation extérieure. La force d'excitation peut être harmonique, périodique non harmonique, non périodique ou aléatoire. Dans le présent cours, on s'intéresse seulement aux excitations harmoniques.

L'excitation harmonique peut être donnée mathématiquement par :$f(t) = f_0\sin(\omega t+\varphi)$, $f(t) = f_0\cos(\omega t+\varphi)$, $f(t) = f_0\, e^{i(\omega t+\varphi)}$

$\varphi$ : la phase de l'excitation (dépend de la valeur la force f à t = 0

## Equation de Lagrange des systèmes forcés

Si en plus du frottement $f=-\alpha\dot{q}$, il existe une force d'excitation externe $(t)$, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_{ext}$$

## Equation du mouvement des systèmes forcés

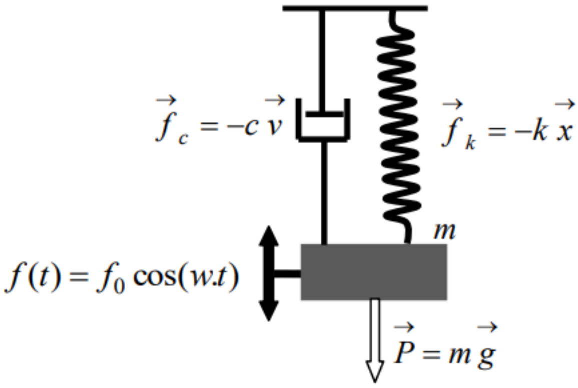
On définit l'équation du mouvement forcé en présence de la force de frottement comme suit :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = F(t)$$

où : F(t) est appelée la fonction d'excitation extérieure. Cette équation est linéaire de second ordre non homogène à coefficients constant.

## Exemple

On appliquant dans le système amorti (masse-ressort) une force extérieure sinusoïdale: $f(t) = f_0\cos(\omega t)$




- Lagrangien L=T-U
- Energie cinétique $T=\frac{1}{2}mv^2$
- Energie potentielle $U=\frac{1}{2}Kx^2$

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}Kx^2$$

- L'énergie de dissipation est $D=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$
- Equation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=F_{ext}$$

Après les dérivations nous recevons cette équation

$m\ddot{x}+kx+\alpha\dot{x}=f_0\cos(\omega t)$

$$\ddot{x}+\frac{\alpha}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{f_0\cos(\omega t)}{m}$$

**Solution de l'équation différentielle.**

L'équation du mouvement, est une équation différentielle du deuxième ordre avec seconde membre. La solution de cette équation est la somme de deux solutions :

- Solution général x(g) de l'équation homogène (sans seconde membre). Elle est dite transitoire car elle s'éteint au cours du temps.

- Solution particulière x(p) de l’équation non homogène (avec seconde membre). Elle est appelée permanente car elle dure tout au long du mouvement.

La solution de l’équation homogène $\ddot{x}+\frac{\alpha}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$ dépend de la nature des racines de l’équation caractéristique $\lambda^2+2\delta\lambda+\omega_0^2=0$

Par suite on s’intéresse seulement à la solution particulière, qu’est de la forme

$x(t)=x_p(t)=X\cos(\omega t+\varphi)$

Pour trouver les constantes X et $\varphi$ , on dérive et on remplace dans l’équation.

$\dot{x}_p=-Xw\sin(w.t+\varphi)$ et $\ddot{x}_p=-Xw^2\cos(w.t+\varphi)$

$$X\left[\left(k-mw^2\right)\cos(w.t+\varphi)-cw\sin(w.t+\varphi)\right]=f_0\cos(w.t)$$

On utilise :

$\cos(w.t+\varphi)=\cos(wt)\cos\varphi-\sin\varphi\sin wt$

$\sin(w.t+\varphi)=\cos\varphi\sin(w.t)+\sin\varphi\cos(w.t)$

On trouve

$$\left(k-mw^2\right)\cos\varphi-cw\sin\varphi=\frac{f_0}{x}$$

$$\left(k-mw^2\right)\sin\varphi+cw\cos\varphi=0$$

$$X=\frac{f_0}{\sqrt{\left(k-mw^2\right)^2+c^2w^2}}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{-cw}{k-mw2}\right)$$

Nous avons ; $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ **et** $\varepsilon=\frac{c}{Cc}=\frac{C}{2\sqrt{mk}}$ donc, on peut écrire : $\frac{c2w2}{K2}=\left(2\,\varepsilon\,\frac{W}{W_0}\right)^2$

La réponse du système à la force d’excitation peut écrite sous la forme ;

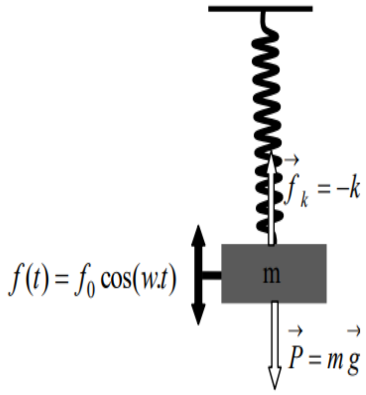
$$X = \frac{\dfrac{f_0}{k}}{\sqrt{\left(1-\left(\dfrac{w}{w_n}\right)^2\right)^2 + 4\varepsilon^2\left(\dfrac{w}{w_n}\right)^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{2\varepsilon\left(\dfrac{w}{w_n}\right)}{1-\left(\dfrac{w}{w_n}\right)^2}\right)$$

**Excitation d'un système non amortie(ε = 0).**

Equation de Lagrange du mouvement :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{f_0\cos(\omega t)}{m}$$




*Solution de l'équation différentielle :*

**$x(t) = x_H(t) + x_p(t)$**

La solution de l'équation homogène par : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

est donnée par : $x_H(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

A et $\varphi$ sont des constantes peuvent être trouvées à partir les conditions initiales

La solution particulière est donnée par: $x_p(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$

Où X est l'amplitude, $\varphi$ le déphasage de la solution totale.

$$X = \frac{\delta_{st}}{1-\left(\dfrac{w}{w_n}\right)^2}$$

Et $\varphi = 0$

Donc ;

$$x_p = \frac{\delta_{st}}{1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2}\cos(w.t)$$

**Facteur d’amplification** : Nous avons vu auparavant que le facteur d’amplification est défini par le rapport de la réponse du système à la déflection statique $\delta_{st} = \frac{f_0}{k}$

Donc,

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)^2 + 4\varepsilon^2\left(\frac{w}{w_n}\right)^2}}$$

Discussion sur le facteur d’amplification :

1- Pour un système non amorti, ε = 0, le facteur d’amplification tend vers l’infini lorsque $w = w_0$ c’est la résonnance.
2- L’augmentation dans le facteur d’amortissement entraine une diminution dans le facteur d’amplification.
3- Le facteur d’amplification égal à 1, y'a aucune amplification, lorsque la fréquence de la force d'excitation s'annule $\frac{w}{w_0} = 0$.
4- Pour les fréquences les plus élevés de la force d'excitation, le système ne répond pas à l’excitation ( X = 0 ).
5- Réponse maximale : la réponse maximal du système à la force d'excitation est donnée par :

$$M_{\max} = \left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\max} = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

A la résonance ($w = w_0$), la réponse maximale du système à la force d'excitation est devenue

$$M_r = \frac{1}{2\varepsilon}$$

## Facteur de qualité

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que, lorsque ε est faible, le maximum pour le facteur d'amplification est donné par :

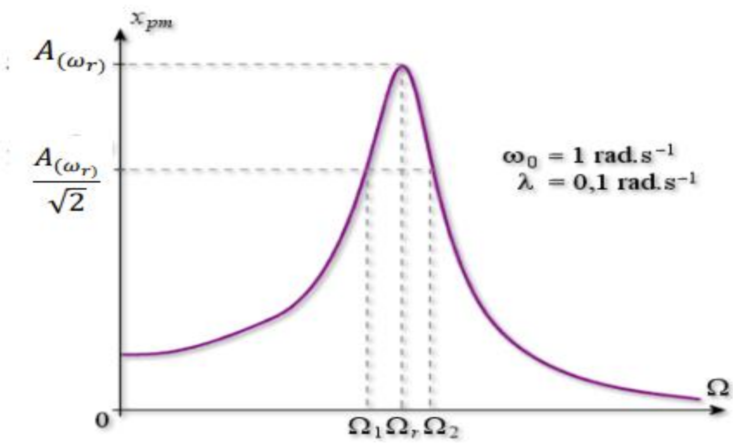
$$M_{\max} = \left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\max} = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{1}{2\varepsilon} = \left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{w=w_n}$$

le facteur d'amplification lorsque $w = w_0$ s'appelle le facteur de qualité

$$Q = \frac{1}{2\varepsilon}.$$

## Bande passante

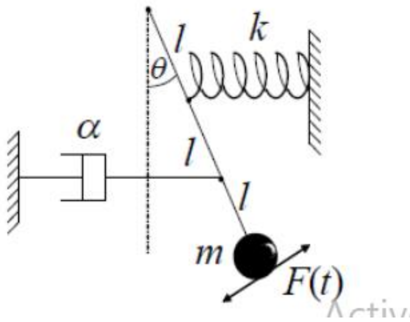
Dans le cas d'une excitation sinusoïdale de pulsation ω variable et dans le cas où $\delta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ on définit la bande passante en pulsation de l'oscillateur par l'intervalle :$\Delta\omega = \omega 2 - \omega 1$ (avec $\omega 2 > \omega 1$) où les pulsations $\omega 1$ et $\omega 2$ correspondent aux amplitudes $A(\omega 1)$ et $A(\omega 2)$ telles que $A(\omega 1) = A(\omega 2) = \frac{A(\omega r)}{\sqrt{2}}$




Alors la bande passante est donnée par : $B = \Delta\omega = \omega 2 - \omega 1 = 2\delta$

## Exercice

Dans le système ci-contre, la boule est ponctuelle et la tige est de longueur totale 3l et de masse négligeable. Avec F (t)=F0cosΩ.




1. Trouver l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle U, et la fonction de dissipation D.

2. Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement.

3. Trouver, à l'aide de la représentation complexe, la solution permanente de l'équation du mouvement. (Préciser son amplitude A et sa phase)

4. Déduire la pulsation de résonance ΩR:

5. Donner les pulsations de coupure Ω1; Ω2 et la bande passante B pour un amortissement faible ( λ<< ω0).

6. Calculer ΩR , B, et le facteur de qualité si m=1kg, k =15N/m, l=0,5m, α=0,5N.s/m, g=10m.s-2 .