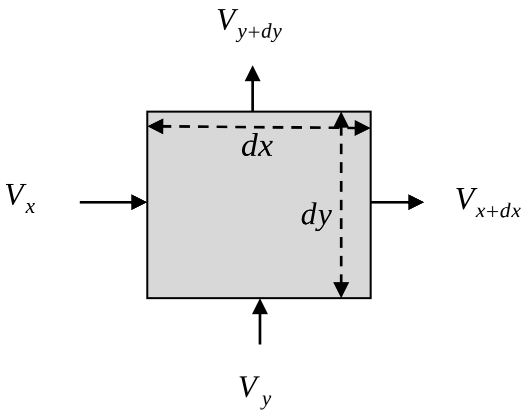
Centre universitaire Abdelhafid Boussouf, Mila
Institut des Sciences et Technologies
Département de génie mécanique
Transfert de chaleur II
Pr. S. Saouli

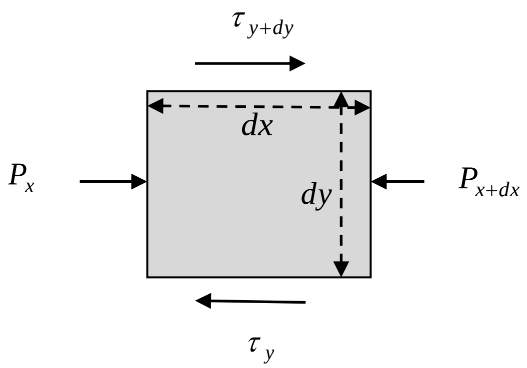
Exercice n°20

Trouver l'équation de continuité en coordonnées cartésiennes pour un fluide incompressible en écoulement bidimensionnel permanent.



Exercice n°21

Trouver l'équation du mouvement pour un fluide newtonien incompressible en écoulement bidimensionnel permanent en appliquant la deuxième loi de la dynamique.



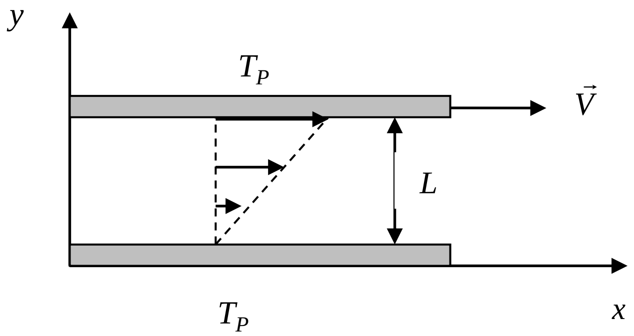
Exercice n°22

Considérons le mouvement d'une couche d'huile d'épaisseur $L = 2\ mm$ entre deux plaques solides l'une fixe et l'autre mobile. La plaque mobile se déplace avec la vitesse $V = 12\ m/s$. Les deux plaques sont maintenues à une température constante égale à $T_P = 20\ °C$.

a) Trouver le profil de la vitesse de l'huile,
b) Trouver le profil de la température en tenant compte de la dissipation visqueuse.
c) Déterminer la température maximale,

d) La quantité de chaleur échangée entre l'huile et les deux plaques.

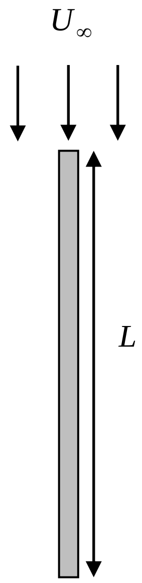
Données : $\lambda = 0{,}145\, W/m°C$, $\mu = 0{,}800\, kg/m\, s$.



Exercice n°23

Une plaque plane de dimensions $L \times l = 3\, m \times 2\, m$ est suspendue dans une chambre, et soumise à un flux d'air parallèle à sa longueur. La vitesse et la température de l'air sont respectivement $U_\infty = 7\, m/s$ et $T_P = 20\,°C$. La force de frottement totale mesurée sur la plaque est $F_f = 0{,}86\, N$. Déterminer le coefficient d'échange convectif moyen pour la plaque.

Données : $\rho = 1{,}204\, kg/m^3$, $C_P = 1007\, J/kg°C$, $\Pr = 0{,}7309$.



Exercice n°24

Soit un écoulement incompressible et bidimensionnel, on peut définir alors une fonction vectorielle $\vec{A}$ telle que $\vec{V} = rot\vec{A}$.

a) Montrer que l'équation de continuité est satisfaite,
b) Calculer les composantes de la vitesse en fonction des composantes du vecteur $\vec{A}$,
c) Si le vecteur $\vec{A}$ a pour composantes les valeurs $A_x = 0$, $A_y = 0$ et $A_z = \Psi(x,y)$, où $\Psi(x,y)$ est une fonction appelée fonction de courant, déduire les composantes du vecteur vitesse en fonction de cette nouvelle fonction,
d) En reprenant, l'équation de continuité, déduire que la fonction $\Psi(x,y)$ est une fonction d'état,
e) Monter que la fonction de courant est constante le long d'une ligne de courant,
f) Considérons à présent deux lignes de courant très voisines définies par les fonctions de courant $\Psi_1(x,y)$, $\Psi_2(x,y)$, calculer le débit du fluide à travers un élément d'arc AB.

Exercice n°25

L'équation de la quantité du mouvement pour la couche limite sur une plaque plane est

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

avec les conditions aux limites

$$x = 0, U = U_\infty, V = 0$$
$$y = 0, U = 0, V = 0$$
$$y = \infty, U = U_\infty, V = 0$$

considérer le changement variables $\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$ et la fonction $f(\eta)$ tel que

$$\Psi(x,y) = \sqrt{\nu x U_\infty}\, f(\eta)$$

a) Montrer que la fonction $f(\eta)$ obéit à l'équation différentielle

$$f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) = 0$$

b) Déduire ses conditions aux limites.

Exercice n°26

Le coefficient de frottement pariétal local et le nombre de Nusselt local pour une plaque plane sont respectivement $Cf_{P x} = \dfrac{0,664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$ et $Nu_x = 0,332\sqrt{\mathrm{Re}_x}\,\mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}$, calculer leurs valeurs moyennes sur une distance L.

Exercice n°27

De l'air à la température de 20 °C s'écoule avec la vitesse 8 m/s sur une surface plane
de dimensions 1,5 m x 6 m et de température 140 °C. Calculer la quantité de chaleur échangée entre la surface et l'air si

a) L'air s'écoule le long de la longueur,
b) L'air s'écoule le long de la largeur.

Données : $\lambda = 0,02953, \mathrm{Pr} = 0,7154, \nu = 2,548 \times 10^{-5}$S.I

Exercice n°28

Le tableau suivant contient certaines valeurs expérimentales effectuées avec un fluide de température 15,5°C sur une plaque plane de longueur L=30,5 cm portée à la température de 60 °C.

U_∞ (m/s)	0,08	0,31	0,49	1,14
h (W/m^2 °C)	64,64	130,4	196,2	391,2

Les propriétés physiques sont évaluées à la température moyenne du film et sont :
$\lambda = 0,166\ W/mK, C_P = 2552,24\ J/kg\,K, \mu = 0,00086\ Ns/m^2, \rho = 796,0\ kg/m^3$

a) Dresser un tableau donnant les valeurs de Nusselt, Prandtl et Reynolds,

b) Tracer $Ln\dfrac{Nu}{\mathrm{Pr}^{0.33}} = f(\ln \mathrm{Re}_L)$,

c) Déterminer les constantes C et n tel que $Nu_L = C\,\mathrm{Pr}^{0.33}\,\mathrm{Re}_L^n$,

d) Si on veut être plus précis qu'elle méthode faudra-il utiliser pour calculer ces coefficients.

Exercice n°29

De l'hydrogène à la température de 15 °C et à la pression de 1 atmosphère s'écoule le long d'une plaque plane à la vitesse de $1\ m/s$. Si la plaque a une largeur de $30\ cm$ et une température de $70\ °C$, calculer les grandeurs suivantes à la distance $x = 30\ cm$, sachant que la longueur de la plaque est $1\ m$.

a) L'épaisseur de la couche limite,

b) Le coefficient de frottement pariétal,

c) Le coefficient de frottement pariétal moyen,
d) L'épaisseur de la couche limite thermique,
e) Le coefficient d'échange convectif moyen,
f) La quantité de chaleur échangée.

Données : $\rho = 0{,}078,\ C_P = 14312{,}7,\ \lambda = 0{,}190,\ \mu = 0{,}416\times10^{-5}$ S.I

Exercice n°30

Calculer le coefficient de frottement moyen $\overline{Cf_P}$ sur une plaque plane de longueur L en présence d'une couche limite laminaire et d'une couche limite turbulente en utilisant la relation

$$\overline{Cf_P} = \frac{1}{L}\left[\int_0^{x_C}\left(Cf_{px}\right)_{lami}dx + \int_{x_C}^{L}\left(Cf_{px}\right)_{turb}dx\right]$$

sachant que

$$\left(Cf_{Px}\right)_{lami} = \frac{0{,}664}{\mathrm{Re}_x^{\frac{1}{2}}}, \qquad \left(Cf_{Px}\right)_{turb} = \frac{0{,}0592}{\mathrm{Re}_x^{\frac{1}{5}}}$$

le nombre de Reynolds critique est $\mathrm{Re}_C = \frac{U_\infty x_C}{\nu} = 5\times10^5$.

Exercice n°31

Ayant choisi le profil de la vitesse

$$\frac{U(y)}{U_\infty} = a_0 + a_1\left(\frac{y}{\delta_V(x)}\right) + a_2\left(\frac{y}{\delta_V(x)}\right)^2 + a_3\left(\frac{y}{\delta_V(x)}\right)^3$$

où a_0, a_1, a_2 et a_2 sont des constantes. A partir des conditions aux limites imposées sur la vitesse, déterminer ces constantes.

Exercice n°32

On choisit un profil de vitesse adimensionnel tel que $\frac{U}{U_\infty} = a\frac{y}{\delta_V(x)} + b\left(\frac{y}{\delta_V(x)}\right)^2$

a) Déterminer les constantes a et b à partir de conditions aux limites bien choisies,
b) Calculer l'épaisseur de la couche limite visqueuse $\delta_V(x)$,
c) Déduire le coefficient de frottement pariétal Cf_{Px} en fonction du nombre de Reynolds Re_x.

Exercice n°33

Un tuyau de 10 cm de diamètre a sa surface externe maintenue à la température de 110 °C est exposé au vent. Déterminer la quantité de chaleur perdue par unité de longueur du tuyau quand le vent à 10 °C lui souffle dessus perpendiculairement à la vitesse de 8 m/s. **Données :** $\lambda = 0{,}02808,\ \mathrm{Pr} = 0{,}7202,\ \nu = 1{,}896\times10^{-5}$ **S.I**

Solutions

Exercice n°20

En régime permanent, nous avons

Débit massique entrant= débit massique sortant

$$(V_x)_x dy + (V_y)_y dx = (V_x)_{x+dx} dy + (V_y)_{y+dy} dx$$

en développant, les expressions aux points $x+dx$ et $y+dy$, nous obtenons

$$(V_x)_x dy + (V_y)_y dx = \left[(V_x)_x + \frac{\partial(V_x)}{\partial x} dx\right] dy + \left[(V_y)_y + \frac{\partial(V_y)}{\partial y} dy\right] dx$$

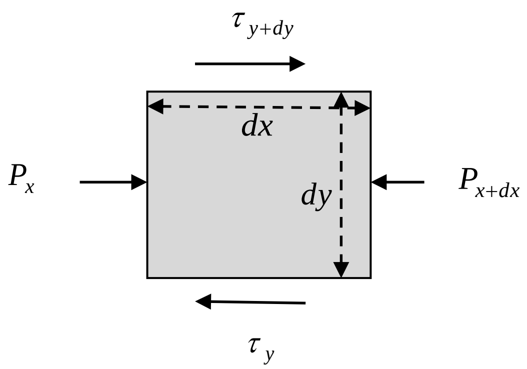
soit

$$\left[\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\right] dxdy = 0$$

comme $dx \neq 0$ et $dy \neq 0$, nous obtenons

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

Exercice n°21



En régime permanent, la somme des forces est

$$\sum F_x = m\gamma_x$$

$$\gamma_x = U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial x}$$

La projection des forces sur l'axe des abscisses, nous donne

$$\rho\gamma_x = (P)_x dy + (\tau_y)_{y+dy} dx - (P)_{x+dx} dy - (\tau_y)_y dx$$

$$\rho\gamma_x = Pdy + \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy\right) dx - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx\right) dy - (\tau_y)_y dx$$

D'où

$$Pdy + \tau dx + \frac{\partial \tau}{\partial y} dxdy = Pdy + \frac{\partial P}{\partial x} dxdy + \tau dx$$

Soit
$$\rho \gamma_x = \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}$$

Pour un fluide newtonien, nous avons $\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial y}$, l'équation du mouvement s'écrit

$$\rho\left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial x}\right) = \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial P}{\partial x}$$

Exercice n°22

a) Les équations de continuité et du mouvement sont

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0\,,\; U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

Comme $V = 0$, $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$, $U = U(y)$, de là, nous obtenons $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$, la solution de cette équation est $U(y) = C_1 y + C_2$. Les conditions aux limites sont $y = 0, U = 0$ et $y = L, U = V$ d'où $U(y) = V \frac{y}{L}$.

b) L'équation de chaleur en présence de la dissipation visqueuse est

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho C_P}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2$$

Nous avons $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ et $V = 0$, nous obtenons $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{V}{L}\right)^2 = 0$ avec les conditions aux limites $y = 0, T = T_P$ et $y = L, T = T_P$.

La solution est
$$\frac{T(y) - T_P}{\frac{\mu V^2}{2\lambda}} = \frac{y}{L} - \left(\frac{y}{L}\right)^2$$

c) La température maximale est obtenue en écrivant $\frac{dT(y)}{dy} = 0$, en dérivant la température par rapport à y, nous obtenons $y = \frac{L}{2}$ d'où

$$T_{\max} = \frac{\mu V^2}{8\lambda} + T_P = \frac{0{,}800 \times (12)^2}{8 \times 0{,}145} + 20 = 119{,}31°C$$

d) Les quantités de chaleur évacuées sont

$$q_1 = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{\mu V^2}{2L} = -28000 W/m^2 \text{ et } q_2 = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=L} = \frac{\mu V^2}{2L} = 28000 W/m^2$$

Exercice n°23

La force de frottement est $F_f = CfS\dfrac{\rho U_\infty^2}{2}$ avec $S = 2Ll$ d'où

$Cf = \dfrac{F_f}{\dfrac{\rho U_\infty^2 S}{2}} = \dfrac{0{,}86}{\dfrac{1{,}204\times 7^2 \times 12}{2}} = 2{,}43\times 10^{-3}$. Le coefficient d'échange convectif est

$$h = \frac{Cf}{2}\frac{\rho U_\infty C_P}{\Pr^{\frac{2}{3}}} = \frac{2{,}43\times 10^{-3}}{2}\frac{1{,}204\times 7\times 1007}{0{,}7309^{\frac{2}{3}}} = 12{,}7\ W/m^2\,°C$$

Exercice n°24

A partir de la relation $div\vec{V} = div\left(rot\vec{A}\right) = \vec{0}$

L'écoulement étant plan, le vecteur $\vec{A}$ doit satisfaire les égalités suivantes

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} = rot\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Les composantes du vecteur vitesse sont donc

$$V_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\ ,\ V_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0$$

Si nous posons que le vecteur $\vec{A}$ a pour composantes les valeurs $A_x = 0$, $A_y = 0$ et $A_z = \Psi(x,y)$, les équations précédentes seront alors satisfaites. Donc les composantes du vecteur vitesse en fonction de cette nouvelle fonction sont

$$V_x = \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y}\ ,\quad V_y = -\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x}$$

la fonction ainsi définie est appelée la fonction de courant. Reprenons l'équation de continuité est remplaçons les composantes du vecteur vitesse par ces relations et nous obtenons l'équation

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(-\dfrac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x}\right)}{\partial y} = 0$$

soit

$$\frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial y\partial x}$$

cette relation montre que la fonction de courant est une fonction d'état, il alors possible d'écrire la dérivée total de la fonction de courant sous la forme

$$d\Psi(x,y)=\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial y}dy$$

La fonction de courant est constante le long d'une ligne de courant, en effet, la ligne de courant est définie par l'équation

$$\frac{dx}{V_x}=\frac{dy}{V_y}$$

en remplaçons les composantes de la vitesse par leurs expressions respective en fonction de la fonction de courant, nous trouvons

$$V_y dx=V_x dy$$

$$-V_y dx+V_x dy=0$$

$$\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial y}dy=0$$

donc $d\Psi(x,y)=0$, cela veut bien dire que la fonction de courant est constante sur la ligne de courant. Considérons à présent deux lignes de courant très voisines définies par les fonctions de courant $\Psi_1(x,y)$, $\Psi_2(x,y)$ et calculons le débit du fluide à travers un élément d'arc M_1M_2, ce débit est égal à :

$$dq_v=V_x dy-V_y dx$$

Le débit qui traverse l'arc AB est donc :

$$q_v=\int_A^B\left(V_x dy-V_y dx\right)$$

Remplaçons les expressions des composantes de la vitesse par leurs expressions en fonction de la fonction de courant nous obtenons l'équation suivante pour le débit :

$$q_v=\int_A^B\left(\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial y}dy\right)=\int_A^B d\Psi(x,y)=\Psi_2(x,y)-\Psi_1(x,y)$$

Exercice n°25

Nous avons

$$V_x = \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}}\sqrt{\nu x V_\infty}\, f'(\eta) = \sqrt{\frac{V_\infty \nu x V_\infty}{\nu x}}\, f'(\eta)$$

la composante longitudinale de la vitesse V_x devient

$$V_x = V_\infty f'(\eta)$$

La composante transversale de la vitesse V_y est

$$V_y = -\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\nu x V_\infty}\, f(\eta)\right)$$

$$V_y = -f(\eta)\frac{\partial \sqrt{\nu x V_\infty}}{\partial x} - \sqrt{\nu x V_\infty}\,\frac{\partial f(\eta)}{\partial x} = -f(\eta)\frac{\partial \sqrt{\nu x V_\infty}}{\partial x} - \sqrt{\nu x V_\infty}\,\frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

qui après simplification devient

$$-V_y = f(\eta)\frac{\partial \sqrt{\nu x V_\infty}}{\partial x} + \sqrt{\nu x V_\infty}\,\frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

explicitons à présent les dérivées incluses dans cette relation, en effet, après un petit calcul nous trouvons :

$$\frac{\partial \sqrt{\nu x V_\infty}}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu V_\infty}{x}}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial\left(y\sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{y}{x}\sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}}$$

$$V_y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu V_\infty}{x}}\left(\eta f'(\eta) - f(\eta)\right) \qquad \text{(IV.63)}$$

Après avoir exprimé les vitesse longitudinale et transversale en fonction de la variable η et la fonction $f(\eta)$, calculons maintenant les dérivées de la vitesse longitudinale par rapport aux variables x et y.

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial\left(V_\infty f'(\eta)\right)}{\partial \eta}\,\frac{\partial\left(y\sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}}\right)}{\partial y}$$

nous trouvons ainsi

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = V_\infty \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}}\, f''(\eta)$$

la dernière dérivée à calculer est la dérivée seconde de la vitesse longitudinale par rapport à la variable y.

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(V_\infty \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}}\, f''(\eta)\right)}{\partial y} = V_\infty \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}}\,\frac{\partial f''(\eta)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

qui après simplification devient

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = \frac{V_\infty^2}{\nu x}\, f'''(\eta)$$

substituons les relations

$$f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) = 0$$

c'est une équation différentielle non-linéaire qui se résout par la méthode numérique dite méthode de Runge-Kutta.

Trouvons à présent les conditions aux limites aux quelles doit satisfaire l'équation différentielle. A partir des conditions aux limites suivantes aux quelles doivent satisfaire les vitesses longitudinale et transversale :

$$\eta = 0,\ f(\eta) = 0,\ f'(\eta) = 0 \qquad \text{(IV.75)}$$

$$\eta = \infty,\ f'(\eta) = 1 \qquad \text{(IV.76)}$$

<u>Exercice n°26</u>

Nous avons

$$Cf_{P\,x} = \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

le coefficient de frottement pariétal moyen est par définition

$$\overline{Cf_P} = \frac{1}{L}\int_0^L Cf_{Px}\,dx$$

en y rapportant la relation V. 172, nous obtenons

$$\overline{Cf_P} = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{0{,}664}{\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}}} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2\times 0{,}664}{L\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}}}\left[x^{\frac{1}{2}}\right]_0^L = \frac{2\times 0{,}664}{L\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}}}\sqrt{L}$$

d'où la valeur du coefficient de frottement pariétal moyen

$$\overline{Cf_P} = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}$$

$$Nu_x = 0{,}332\sqrt{\mathrm{Re}_x}\,\mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{hx}{\lambda} = 0{,}332\sqrt{\mathrm{Re}_x}\,\mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}$$

$$h = 0{,}332\frac{\lambda}{x}\sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}\,\mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}$$

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L 0{,}332\frac{\lambda}{x}\sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}\,\mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}dx$$

$$\overline{Nu} = 0{,}664\sqrt{\mathrm{Re}_L}\,\mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}$$

<u>Exercice n°27</u>

Calculons la distance critique x_C à partir de la relation $\mathrm{Re}_C = 5\times 10^5$, soit $x_C = \frac{\nu\,\mathrm{Re}_C}{U_\infty} = \frac{2{,}548\times 10^{-5}\times 5\times 10^5}{8} = 1{,}59\,m$. Par conséquent dans les deux cas, la transition vers la turbulence se fait au-delà de la surface car la distance critique est supérieure à la longueur et à la largeur de la surface. La relation utilisée pour calculer le nombre de Nusselt moyen est celle d'un écoulement laminaire, soit

$$\overline{Nu}_{lam} = 0{,}664\sqrt{\mathrm{Re}_L}\,\mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}$$

a) Quantité de chaleur le long de la longueur

$$\mathrm{Re}_L = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{8\times 1{,}5}{2{,}548\times 10^{-5}} = 4{,}71\times 10^5$$

$$\overline{Nu}_{lam} = 0{,}664\left(4{,}71\times10^5\right)^{0,5}\left(0{,}7154\right)^{\frac{1}{3}} = 408$$

$$\bar{h} = \frac{\lambda\overline{Nu}}{L} = \frac{0{,}02953\times408}{1{,}5} = 8{,}03\,W/m^2\,°C$$

$$Q = \bar{h}S\left(T_P - T_\infty\right) = 8{,}03\times1{,}5\times1\times\left(140-20\right) = 1445{,}4\,W$$

b) Quantité de chaleur le long de la largeur

$$\mathrm{Re}_L = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{8\times1}{2{,}548\times10^{-5}} = 3{,}14\times10^5$$

$$\overline{Nu}_{lam} = 0{,}664\left(3{,}14\times10^5\right)^{0,5}\left(0{,}7154\right)^{\frac{1}{3}} = 333$$

$$\bar{h} = \frac{\lambda\overline{Nu}}{L} = \frac{0{,}02953\times333}{1} = 9{,}83\,W/m^2\,°C$$

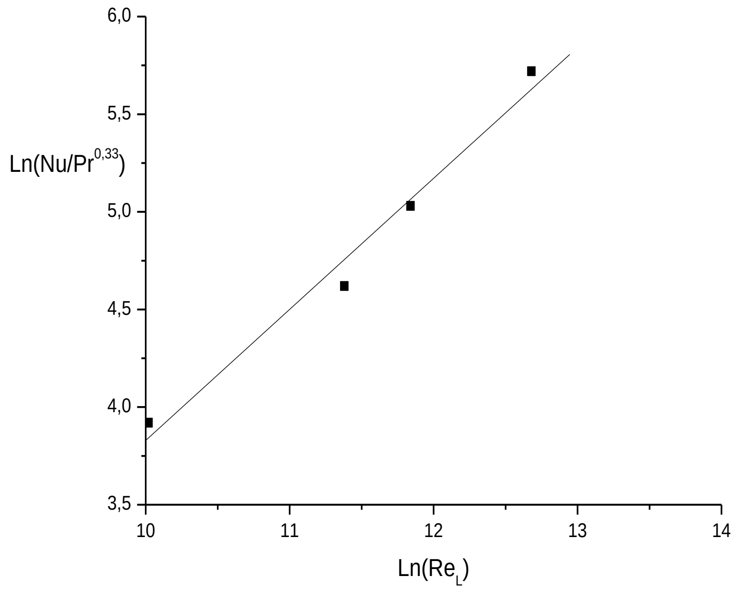
$$Q = \bar{h}S\left(T_P - T_\infty\right) = 9{,}83\times1{,}5\times1\times\left(140-20\right) = 1769{,}4\,W$$

<u>Exercice n°28</u>

a) Tableau

U_∞ (m/s)	0,08	0,31	0,49	1,14
h (W/m^2 °C)	64,64	130,4	196,2	391,2
Pr	13,22	13,22	13,22	13,22
Re_L	22584,18	87513,72	138328,14	321824,65
Nu	118,76	239,59	360,48	718,77
$\ln \mathrm{Re}_L$	10,02	11,38	11,84	12,68
$Ln\frac{Nu}{\mathrm{Pr}^{0.33}}$	3,92	4,62	5,03	5,72

b) Graphe de $Ln\frac{Nu}{\mathrm{Pr}^{0.33}} = f(Ln\,\mathrm{Re}_L)$



c) Nous utilisons la méthode des moindres carrés.

Exercice n°29

a) $\mathrm{Re}_x = \frac{\rho U x}{\mu} = \frac{0{,}078\times 1\times 0{,}3}{0{,}416\times 10^{-5}} = 5625$ Régime laminaire, $\delta = \frac{5x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} = \frac{5\times 0{,}3}{\sqrt{5625}} = 0{,}02\,m$

b) $Cf = \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} = \frac{0{,}664}{\sqrt{5625}} = 0{,}0088$

c) $\mathrm{Re}_L = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{0{,}078\times 1\times 1}{0{,}416\times 10^{-5}} = 18750$, $\overline{Cf} = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} = \frac{1{,}328}{\sqrt{18750}} = 0{,}0097$

d) $\mathrm{Pr} = \frac{\mu C_P}{\lambda} = \frac{0{,}416\times 10^{-5}\times 14312{,}7}{0{,}190} = 0{,}31$, $\delta_t = \frac{0{,}02}{0{,}31^{0{,}33}} = 0{,}029\,m$

e) $N\bar{u} = 0{,}664\sqrt{\mathrm{Re}_L}\,\mathrm{Pr}^{0{,}33} = 0{,}664\times\sqrt{18750}\times 0{,}31^{0{,}33} = 61{,}75$,

$\bar{h} = \frac{\lambda N\bar{u}}{L} = \frac{0{,}190\times 61{,}75}{1} = 11{,}73\,W/m^2\,°C$

f) $Q = \bar{h} S (T_P - T_\infty) = 11{,}73\times 1\times 0{,}3(70-15) = 193{,}54\,W$

Exercice n°30

Sachant que

$$\left(Cf_{P\,x}\right)_{lami}=\frac{0{,}664}{\mathrm{Re}_x^{\frac{1}{2}}},\qquad \left(Cf_{P\,x}\right)_{turb}=\frac{0{,}0592}{\mathrm{Re}_x^{\frac{1}{5}}}$$

Le coefficient de frottement pariétal moyen sur la plaque est

$$\overline{Cf_P}=\frac{1}{L}\left[\int_0^{x_C}\left(Cf_{px}\right)_{lami}dx+\int_{x_C}^{L}\left(Cf_{px}\right)_{turb}dx\right]$$

$$\int_0^{x_C}\left(Cf_{px}\right)_{lami}dx=\int_0^{x_C}\frac{0{,}664}{\left(\frac{U_\infty}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}dx=\frac{2\times 0{,}664}{\left(\frac{U_\infty}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(x_C\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_{x_C}^{L}\left(Cf_{px}\right)_{turb}dx=\int_{x_C}^{L}\frac{0{,}0592}{\left(\frac{U_\infty}{\nu}\right)^{\frac{1}{5}}x^{\frac{1}{5}}}dx=\frac{5\times 0{,}0592}{4\left(\frac{U_\infty}{\nu}\right)^{\frac{1}{5}}}\left[L^{\frac{4}{5}}-x_C^{\frac{4}{5}}\right]$$

d'où

$$\overline{Cf_P}=\frac{2\times 0{,}664}{L\left(\frac{U_\infty}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(x_C\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{5\times 0{,}0592}{4L\left(\frac{U_\infty}{\nu}\right)^{\frac{1}{5}}}\left[L^{\frac{4}{5}}-x_C^{\frac{4}{5}}\right]$$

comme $\mathrm{Re}_C=\frac{U_\infty x_C}{\nu}=5\times 10^5$, nous avons $x_C=\frac{5\times 10^5\nu}{U_\infty}$. En substituant cette valeur dans l'expression précédente, nous obtenons

$$\overline{Cf_P}=\frac{2\times 0{,}664}{L\left(\frac{U_\infty}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{5\times 10^5\nu}{U_\infty}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{5\times 0{,}0592}{4L\left(\frac{U_\infty}{\nu}\right)^{\frac{1}{5}}}\left[L^{\frac{4}{5}}-\left(\frac{5\times 10^5\nu}{U_\infty}\right)^{\frac{4}{5}}\right]$$

soit

$$\overline{Cf_P}=\frac{2\times 0{,}664}{L\left(\frac{U_\infty}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{5\times 10^5\nu}{U_\infty}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{5\times 0{,}0592}{4L\left(\frac{U_\infty}{\nu}\right)^{\frac{1}{5}}}\left[L^{\frac{4}{5}}-\left(\frac{5\times 10^5\nu}{U_\infty}\right)^{\frac{4}{5}}\right]$$

en réarrangeant les termes, nous trouvons

$$\overline{Cf_P} = \frac{939}{\mathrm{Re}_L} + \frac{0{,}074}{\mathrm{Re}_L^{\frac{1}{5}}} - \frac{2681{,}68}{\mathrm{Re}_L}$$

soit finalement

$$\overline{Cf_P} = \frac{0{,}074}{\mathrm{Re}_L^{\frac{1}{5}}} - \frac{1742{,}68}{\mathrm{Re}_L}$$

Exercice n°31

où a_0, a_1, a_2 et a_2 sont des constantes déterminées à partir des conditions aux limites suivantes

$$y = 0\,,\ U = 0$$

$$y = 0\,,\ U \approx y\,,\ \frac{d^2U}{dy^2} = 0$$

$$y = \delta_V(x)\,,\ u = u_\infty$$

$$y = \delta_V(x)\,,\ \frac{dU}{dy} = 0$$

après avoir calculer les constantes a_0, a_1, a_2 et a_3 qui sont $a_0 = 0$ $a_1 = \frac{3}{2}$ $a_2 = 0$ $a_3 = -\frac{1}{2}$, le profil supposé de la vitesse s'écrit alors sous la forme

$$\frac{U}{U_\infty} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta_V(x)}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_V(x)}\right)^3$$

Exercice n°32

Nous avons $\frac{U}{U_\infty} = a\left(\frac{y}{\delta_V(x)}\right) + b\left(\frac{y}{\delta_V(x)}\right)^2$, les conditions aux limites sont $y = \delta_V, U = U_\infty$, $y = \delta_V, \frac{dU}{dy} = 0$, d'où $a = 2$, $b = -1$ et de là, nous avons

$$\frac{U}{U_\infty} = 2\left(\frac{y}{\delta_V(x)}\right) - \left(\frac{y}{\delta_V(x)}\right)^2$$

Avant d'utiliser la relation $U_\infty^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_0^{\delta_V(x)} \dfrac{U}{U_\infty}\left(1-\dfrac{U}{U_\infty}\right)dy = \dfrac{\tau_P}{\rho}$, calculons

$\displaystyle\int_0^{\delta_V(x)} \dfrac{U}{U_\infty}\left(1-\dfrac{U}{U_\infty}\right)dy = \dfrac{\delta_V(x)}{15}$, $\tau_P = \dfrac{2\mu U_\infty}{\delta_V(x)}$ et nous obtenons

$$\delta = \frac{\sqrt{30}\,x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}},\ Cf_x = \frac{0{,}730}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

<u>Exercice n°33</u>

Calcul de Reynolds $\mathrm{Re}_x = \dfrac{VD}{\nu} = \dfrac{8\times 0{,}10}{1{,}896\times 10^{-5}} = 4{,}219\times 10^4$

$$Nu_D = 0{,}3 + \frac{0{,}62\sqrt{\mathrm{Re}_D}\,\mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}}{\left[1+\left(\dfrac{0{,}4}{\mathrm{Pr}}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{4}}}\left[1+\left(\frac{\mathrm{Re}_D}{282000}\right)^{\frac{5}{8}}\right]^{\frac{4}{5}}$$

$$= 0{,}3 + \frac{0{,}62\sqrt{4{,}219\times 10^4}\,(0{,}7202)^{\frac{1}{3}}}{\left[1+\left(\dfrac{0{,}4}{0{,}7202}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{4}}}\left[1+\left(\frac{4{,}219\times 10^4}{282000}\right)^{\frac{5}{8}}\right]^{\frac{4}{5}} = 124$$

a) $h = \dfrac{\lambda Nu_D}{D} = \dfrac{0{,}02808\times 124}{0{,}10} = 34{,}8 W/m^2\,°C$

b) $Q = h\pi DL(T_P - T_\infty) = 34{,}8\times\pi\times 0{,}10\times 1(110-10) = 1093 W$