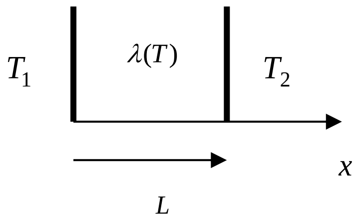
Centre universitaire Abdelhafid Boussouf, Mila
Institut des Sciences et Technologies
Département de mécanique
Transfert de chaleur I
Pr. S. Saouli

Exercice n°1

Un matériau rempli l'espace compris entre deux plaques métalliques parallèles distantes de L. La conductivité thermique λ de ce matériau est inversement proportionnelle à la température selon la loi

$$\lambda(T) = \frac{C}{T}$$



Si les températures des deux plaques sont T_1 et T_2.

1) Calculer la quantité de chaleur échangée,
2) Déduire la température $T(x)$.

Solution

1) A partir de la loi de Fourier, nous avons

$$q = -\lambda \frac{dT(x)}{dx}$$

en y substituant l'expression de la conductivité thermique, nous trouvons

$$q = -\frac{\alpha}{T(x)} \frac{dT(x)}{dx}$$

en séparant les variables et en intégrant, nous obtenons

$$q\int_0^a dx = -\alpha \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT(x)}{T(x)}$$

soit

$$q = -\frac{\alpha}{a} \ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{\alpha}{a} \ln\frac{T_1}{T_2}$$

La quantité de chaleur échangée Q est

$$Q = \frac{\alpha S}{a} \ln\frac{T_1}{T_2}$$

2) Pour trouver la distribution de température, nous utilisons la relation

$$q\int_0^x dx = -\alpha \int_{T_1}^{T(x)} \frac{dT(x)}{T(x)}$$

d'où

$$q = \frac{\alpha}{x} \ln\frac{T_1}{T(x)}$$

Si nous éliminons le flux de chaleur entre les relations $q = \frac{\alpha}{a}\ln\frac{T_1}{T_2}$ et $q = \frac{\alpha}{x}\ln\frac{T_1}{T(x)}$

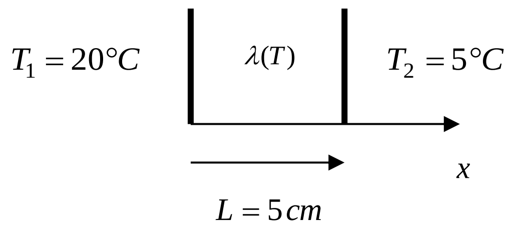
Nous obtenons la distribution de la température, soit

$$T(x) = T_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{x}{a}}$$

Exercice n°2

Un matériau rempli l'espace compris entre deux plaques métalliques parallèles distantes de L. La conductivité thermique λ de ce matériau est directement proportionnelle à la température selon la loi

$$\lambda(T) = 3T + 2$$



1) Trouver l'expression de la quantité de chaleur échangée Q,
2) Calculer la valeur numérique de Q par unité de surface.

Solution

1) A partir de la loi de Fourier, nous avons

$$Q = -\lambda S\frac{dT(x)}{dx}$$

avec l'expression de la conductivité thermique, nous avons

$$Q = -(3T + 2)S\frac{dT}{dx}$$

en séparant les variables et en intégrant, nous obtenons

$$\frac{Q}{S}\int_0^L dx = -\int_{T_1}^{T_2}(3T + 2)dT = \int_{T_2}^{T_1}(3T + 2)dT = \left[\frac{3}{2}T^2 + 2T\right]_{T_2}^{T_1}$$

soit

$$Q = \frac{S}{L}\left[\frac{3}{2}\left(T_1^2 - T_2^2\right) + 2(T_1 - T_2)\right]$$

2) La quantité de chaleur échangée Q par unité de surface est

$$Q = \frac{1}{0{,}05}\left[\frac{3}{2}\left(20^2 - 5^2\right) + 2(20 - 5)\right] = 11850W$$

Exercice n°3

Soit un mur plan d'épaisseur L constitué d'un matériau de conductivité thermique λ variable en fonction de la position x suivant la loi

$$\lambda(x) = \lambda_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}}$$

Si les faces sont aux températures T_1 et T_2, calculer la température $T(x)$.

Solution

A partir de la loi de Fourier, nous avons

$$Q = -\lambda S \frac{dT(x)}{dx}$$

en y substituant l'expression de la conductivité thermique, nous trouvons

$$Q = -\lambda_0 S \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}} \frac{dT}{dx}$$

en séparant les variables et en intégrant, nous obtenons

$$\frac{Q}{\lambda_0 S} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}}} = -\int_{T_1}^{T_2} dT = \int_{T_2}^{T1} dT$$

comme

$$\int_0^L \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}}} = \int_0^1 \frac{L du}{\sqrt{1-u^2}} = L[\arcsin(1) - \arcsin(0)] = \frac{\pi L}{2}$$

La quantité de chaleur est

$$Q = \frac{2\lambda_0 S}{\pi L}(T_1 - T_2)$$

Pour trouver la température, écrivons la relation

$$\frac{Q}{\lambda_0 S} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}}} = -\int_{T_1}^{T(x)} dT = \int_{T(x)}^{T1} dT = T_1 - T(x)$$

soit

$$T(x) = T_1 - \frac{QL}{\lambda_0 S} \arcsin\left(\frac{x}{L}\right)$$

en y substituant l'expression de la quantité de chaleur ; nous obtenons

$$T(x) = T_1 - \frac{L}{\lambda_0 S} \frac{2\lambda_0 S}{\pi L}(T_1 - T_2)\arcsin\left(\frac{x}{L}\right) = T_1 - \frac{2}{\pi}(T_1 - T_2)\arcsin\left(\frac{x}{L}\right)$$

d'où

$$T(x) = T_1 - \frac{2}{\pi}(T_1 - T_2)\arcsin\left(\frac{x}{L}\right)$$

Exercice n°4

Calculer la distribution de la température $T(x)$ dans un mur plan d'épaisseur L et de conductivité thermique $\lambda = \lambda_0 e^{-\frac{x}{L}}$ où λ_0 est une constante positive. On supposera que les parois du mur sont aux températures T_1 et T_2.

Solution

A partir de la loi de Fourier, nous avons

$$Q = -\lambda S \frac{dT(x)}{dx}$$

en y injectons l'expression de la conductivité thermique, nous trouvons

$$Q = -\lambda_0 S e^{-\frac{x}{L}} \frac{dT}{dx}$$

en séparant les variables et en intégrant, nous avons

$$\frac{Q}{\lambda_0 S} \int_0^L e^{\frac{x}{L}} dx = -\int_{T_1}^{T_2} dT = \int_{T_2}^{T1} dT$$

$$\frac{QL}{\lambda_0 S}(e-1) = T_1 - T_2$$

soit

$$Q = \frac{\lambda_0 S}{L(e-1)}(T_1 - T_2)$$

Pour trouver la température, nous écrivons

$$\frac{Q}{\lambda_0 S} \int_0^x e^{\frac{x}{L}} dx = -\int_{T_1}^{T(x)} dT$$

d'où

$$Q = \frac{\lambda_0 S}{L\left(e^{\frac{x}{L}} - 1\right)}(T_1 - T(x))$$

en y substituant l'expression de la quantité de chaleur nous obtenons

$$T(x) = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)}{(e-1)}\left(e^{\frac{x}{L}} - 1\right)$$

Exercice n°5

Considérons une sphère creuse de rayon interne R_i et de rayon externe R_o constituée d'un matériau de conductivité thermique λ fonction de la distance radiale r selon la loi

$$\lambda(r) = \frac{\alpha}{r^3}$$

où α est une constante positive.

a) Trouver les unités de la constante α .

Sachant que la température de la surface interne de la sphère est T_i et la température de la surface externe de la sphère est T_o $(T_i \succ T_o)$.

b) Calculer la quantité de chaleur Q qui traverse la sphère,

c) Quelle est la résistance thermique R_{th} ,

d) Donner les unités de la résistance thermique R_{th} ,

e) Déterminer la distribution de la température dans la sphère $T(r)$.

Solution

a) Les unités de la constante α :

$$[\alpha]=[\lambda(r)][r^3]=Wm^{-1}{}^\circ C^{-1}m^3 = Wm^2{}^\circ C^{-1}$$

b) La quantité de chaleur Q qui traverse la sphère :

A partir de la loi de Fourier, nous avons

$$Q=-\lambda(r)S(r)\frac{dT(r)}{dr}$$

la surface de la sphère est $S(r)=4\pi r^2$, en substituant cette expression et l'expression de la conductivité thermique dans la loi de Fourier, nous trouvons

$$Q=-\frac{4\pi\alpha}{r}\frac{dT(r)}{dr}$$

en séparant les variables et en intégrant, nous obtenons

$$Q\int_{R_i}^{R_o} r\,dr=-4\pi\alpha\int_{T_i}^{T_o} dT(r)$$

$$Q\left[\frac{r^2}{2}\right]_{R_i}^{R_o}=-4\pi\alpha\left[T(r)\right]_{T_i}^{T_o}$$

soit

$$Q=\frac{8\pi\alpha}{R_o^2-R_i^2}(T_i-T_o)$$

c) La résistance thermique R_{th} :

Si nous écrivons la quantité de chaleur sous la forme

$$Q=\frac{T_i-T_o}{\dfrac{R_o^2-R_i^2}{8\pi\alpha}}=\frac{T_i-T_o}{R_{th}}$$

la résistance thermique R_{th} est par conséquent

$$R_{th}=\frac{R_o^2-R_i^2}{8\pi\alpha}$$

d) Les unités de la résistance thermique R_{th} :

$$[R_{th}] = \frac{[R_o^2 - R_i^2]}{[\alpha]} = \frac{m^2}{Wm^2\,°C^{-1}} = °CW^{-1}$$

e) La distribution de la température dans la sphère $T(r)$:

A partir de la relation

$$Q\int_{R_i}^{r} r\,dr = -4\pi\alpha \int_{T_i}^{T(r)} dT(r)$$

nous trouvons

$$T(r) = T_i - \frac{Q}{8\pi\alpha}\left(r^2 - R_i^2\right)$$

en y substituant l'expression de la quantité de chaleur, nous obtenons

$$T(r) = T_i - (T_i - T_o)\left[\frac{r^2 - R_i^2}{R_o^2 - R_i^2}\right]$$

Exercice n°6

Considérons un cylindre creux de rayon interne R_i et de rayon externe R_o constitué d'un matériau de conductivité thermique λ fonction de la température T selon la loi

$$\lambda(T) = \frac{a}{T^2}$$

où a est une constante positive.

a) Trouver les unités de la constante a.
   Sachant que la température de la surface interne du cylindre est T_i et la température de la surface externe du cylindre est T_o ($T_i \succ T_o$).
b) Calculer la quantité de chaleur Q qui traverse le cylindre,
c) Déterminer la distribution de la température dans le cylindre $T(r)$.

Solution

a) Les unités de la constante α :

$$[\alpha] = [\lambda(r)][T^2] = Wm^{-1}°C^{-1}°C^2 = Wm^{-1}°C$$

b) La quantité de chaleur Q qui traverse la sphère :

A partir de la loi de Fourier, nous avons

$$Q = -\lambda(r)S(r)\frac{dT(r)}{dr}$$

la surface du cylindre est $S(r) = 2\pi rL$, en substituant cette expression et l'expression de la conductivité thermique dans la loi de Fourier, nous trouvons

$$Q = -2\pi rL\frac{a}{T^2}\frac{dT(r)}{dr}$$

en séparant les variables et en intégrant, nous obtenons

$$Q\int_{R_i}^{R_o}\frac{dr}{r} = -2\pi aL\int_{T_i}^{T_o}\frac{dT}{T^2}$$

$$Q[\ln r]_{R_i}^{R_o} = -2\pi aL\left[-\frac{1}{T}\right]_{T_i}^{T_o}$$

soit

$$Q = \frac{2\pi aL}{\ln\frac{R_o}{R_i}}\left(\frac{1}{T_o} - \frac{1}{T_i}\right)$$

c) La distribution de la température dans la sphère $T(r)$:

A partir de la relation

$$Q\int_{R_i}^{r}\frac{dr}{r} = -2\pi aL\int_{T_i}^{T(r)}\frac{dT}{T^2}$$

nous trouvons

$$Q = \frac{2\pi aL}{\ln\frac{r}{R_i}}\left(\frac{1}{T(r)} - \frac{1}{T_i}\right)$$

en y substituant l'expression de la quantité de chaleur, nous trouvons

$$\frac{1}{T(r)} - \frac{1}{T_i} = \left(\frac{1}{T_o} - \frac{1}{T_i}\right)\left[\frac{\ln\frac{r}{R_i}}{\ln\frac{R_o}{R_i}}\right]$$

<u>Exercice n°7</u>

Le mur d'un four est composé de deux couches, la première est en briques réfractaires d'épaisseur $e_1 = 20cm$ et de conductivité thermique $\lambda_1 = 1{,}38\,W/m°C$, la deuxième couche est en briques isolants d'épaisseur $e_2 = 10cm$ et de conductivité thermique $\lambda_2 = 0{,}17W/m°C$. La température à l'intérieur du four est $1650°C$ et le coefficient d'échange convectif vaut $h_1 = 70W/m^2°C$. La température ambiante est $25°C$ et le coefficient d'échange convectif est $h_2 = 10W/m^2°C$.

a) Calculer la quantité de chaleur perdue à travers la paroi du four,
b) Les températures des parois,
c) La température à l'interface des deux parois.

<u>Solution</u>

Les quantités de chaleur qui traversent la structure sont

$$Q = h_1 S(T_\infty - T_1)$$

$$Q = \frac{(T_1 - T_3)}{\frac{e_1}{\lambda_1 S}}$$

$$Q = \frac{(T_3 - T_2)}{\dfrac{e_2}{\lambda_2 S}}$$

$$Q = h_2 S(T_2 - T_{\infty'})$$

en éliminant les températures intermédiaires, nous trouvons

$$Q = \frac{(T_\infty - T_{\infty'})}{\dfrac{1}{h_1 S} + \dfrac{e_1}{\lambda_1 S} + \dfrac{e_2}{\lambda_2 S} + \dfrac{1}{h_2 S}} = \frac{1650 - 25}{\dfrac{1}{70} + \dfrac{0,2}{1,38} + \dfrac{0,1}{0,17} + \dfrac{1}{10}} = 1917,52\, W$$

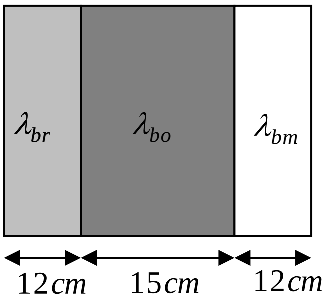
<u>Exercice n°8</u>

Le mur d'un four est constitué de trois matériaux disposés en série :
$12 cm$ de briques réfractaires, $15 cm$ de briques ordinaires et $12 cm$ de briques de magnésie.
Si la surface intérieure est à $827°C$ et la surface extérieure est à $112°C$ calculer la quantité de chaleur perdue à travers la paroi par unité de surface. On donne :

$\lambda_{br} = 0,177 kcal / hm°C$

$\lambda_{bo} = 0,223 kcal / hm°C$

$\lambda_{bm} = 3,08 kcal / hm°C$



<u>Solution</u>

Dans ce cas, il y a trois résistances par conduction en série, ces résistances sont

$$R_1 = \frac{e_1}{\lambda_1 S} = \frac{0,12}{0,177} = 0,67$$

$$R_2 = \frac{e_2}{\lambda_2 S} = \frac{0,15}{0,223} = 0,68$$

$$R_3 = \frac{e_3}{\lambda_3 S} = \frac{0,12}{3,08} = 0,038$$

$$R_{eq} = 1,388\, h°C / kcal$$

La quantité de chaleur qui traverse la structure par unité de surface ($S = 1\, m^2$) est

$$Q = \frac{(T_1 - T_3)}{R_{eq}}$$

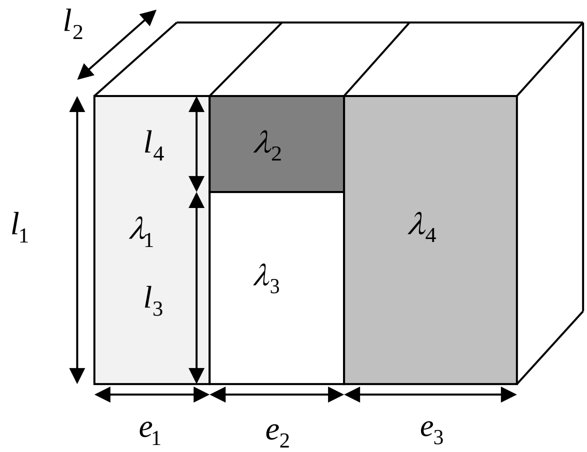
soit

$$Q = \frac{827 - 112}{1{,}388} = 515{,}12\ kcal/h$$

Exercice n°9

Soit la structure illustrée sur la figure ci-dessous:

a) Calculer la résistance thermique de chaque couche.
b) Quelle est la résistance équivalente.
c) Calculer la quantité de chaleur qui traverse la structure.



Solution

$$R_1 = \frac{e_1}{\lambda_1 l_1 l_2}$$

$$R_2 = \frac{e_2}{\lambda_1 l_2 l_4}$$

$$R_3 = \frac{e_2}{\lambda_3 l_2 l_3}$$

$$R_4 = \frac{e_3}{\lambda_4 l_1 l_2}$$

La résistance équivalente est

$$R_{eq} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_4$$

Exercice n°10

Calculer les pertes thermiques à travers une fenêtre de surface unité dans les deux cas suivants :

a) vitrage simple d'épaisseur quatre millimètres.

b) Vitrage double, composé de deux lames de verre d'épaisseur quatre millimètres et d'une épaisseur d'air intermédiaire de six millimètres. On néglige la convection dans la lame d'air.

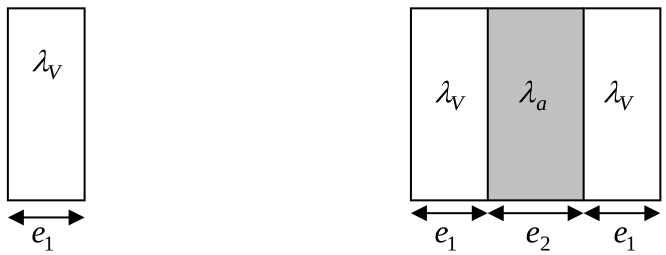
On donne :

$\lambda_V = 1{,}2\ W/m°C$

$\lambda_a = 0{,}024 W/m°C$

$h = 12\ W/m^2 °C$

$T_{\infty 1} = 20°C, T_{\infty 2} = 0°C$



Solution

Les différentes résistances thermiques sont

$$R_1 = \frac{1}{hS}$$

$$R_2 = \frac{e_V}{\lambda_V S}$$

$$R_3 = \frac{1}{hS}$$

Ainsi, la résistance thermique équivalente est

$$R_{eq} = \frac{1}{hS} + \frac{e_V}{\lambda_V S} + \frac{1}{hS} = \frac{2}{12} + \frac{0{,}004}{1{,}2} = 0{,}17°C/W$$

La quantité de chaleur évacuée à travers la vitre est

$$Q = \frac{\left(T_\infty - T_{\infty'}\right)}{R_{eq}}$$

soit

$$Q = \frac{20-0}{0{,}17} = 117{,}64\,W$$

Dans le cas de la deuxième structure, la résistance thermique équivalente est

$$R_{eq} = \frac{1}{hS} + \frac{e_V}{\lambda_V S} + \frac{e_V}{\lambda_V S} + \frac{e_a}{\lambda_a S} + \frac{1}{hS} = \frac{2}{12} + \frac{2\times 0{,}004}{1{,}2} + \frac{0{,}006}{0{,}024} = 0{,}42°C/W$$

c'est à dire

$$Q = \frac{20-0}{0{,}42} = 47{,}61 W$$

Exercice n°11

Soit un mur d'épaisseur e et de conductivité thermique λ. Les surfaces du mur sont aux températures T_1, T_2 et l'air autour est aux températures $T_\infty, T_{\infty'}$.

a) Calculer les quantités de chaleur échangées,
b) Calculer la résistance thermique équivalente,
c) Si on défini $Q = US\Delta T$ où US est le coefficient global de conductance, calculer ce coefficient,
d) Donner le schéma électrique équivalent.

Solution

Les quantités de chaleur échangées sont

$$Q = h_1 S(T_\infty - T_1)$$

$$Q = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{\lambda S}}$$

$$Q = h_2 S(T_2 - T_{\infty'})$$

en éliminant les températures intermédiaires, nous obtenons

$$Q = \frac{(T_\infty - T_{\infty'})}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{h_2 S}} = US(T_\infty - T_{\infty'})$$

d'où

$$US = \frac{1}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{h_2 S}}$$

Exercice n°12

Un cylindre de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e est constitue d'un matériau de conductivité thermique $\lambda = a + bT$. Si les températures des deux parois sont T_i et T_e, calculer la quantité de chaleur échangée.

Solution

A partir de la loi de Fourier, nous avons

$$Q = -\lambda(r)S(r)\frac{dT(r)}{dr}$$

la surface du cylindre est $S(r) = 2\pi rL$, en y substituant l'expression de la conductivité thermique, nous trouvons

$$Q = -2\pi rL(a + bT)\frac{dT(r)}{dr}$$

en séparant les variables et en intégrant, nous obtenons

$$\frac{Q}{2\pi L}\int_{R_i}^{R_e}\frac{dr}{r} = -\int_{T_i}^{T_e}(a + bT)dT$$

$$\frac{Q}{2\pi L}\ln\frac{R_e}{R_i}=a(T_i-T_e)+\frac{b}{2}\left(T_i^2-T_e^2\right)=\left(a+\frac{b}{2}(T_i+T_e)\right)(T_i-T_e)$$

soit

$$\frac{Q}{2\pi L}\ln\frac{R_e}{R_i}=\lambda_m(T_i-T_e)$$

$$Q=\frac{T_i-T_e}{\frac{1}{2\pi L\lambda_m}\ln\frac{R_e}{R_i}}$$

où λ_m est la conductivité thermique évaluée à la température moyenne $\frac{T_i+T_e}{2}$

$$\lambda_m=a+\frac{b}{2}(T_i+T_e)$$

Exercice n°13

Trouvez la distribution de la température dans un cylindre de section circulaire siège d'une génération de chaleur constante q_S par la méthode du bilan thermique.

Solution

A partir du bilan thermique, nous avons

$$Q_r=q_s dv+Q_{r+dr}$$

La quantité de chaleur au point r est

$$Q_r=-\lambda r d\varphi dz\left[\frac{dT(r)}{dr}\right]_r$$

La quantité de chaleur au point $r+dr$ est

$$Q_{r+dr}=-\lambda(r+dr)d\varphi dz\left[\frac{dT(r)}{dr}\right]_{r+dr}$$

$$-\lambda r d\varphi dz\left[\frac{dT(r)}{dr}\right]_r=q_s r dr d\varphi dz+-\lambda(r+dr)d\varphi dz\left[\frac{dT(r)}{dr}\right]_{r+dr}$$

En utilisons un développement limité de $\left[\frac{dT(r)}{dr}\right]_{r+dr}$, à savoir

$$\left[\frac{dT(r)}{dr}\right]_{r+dr}=\left[\frac{dT(r)}{dr}\right]_r+\frac{d^2T(r)}{dr^2}dr$$

nous obtenons

$$-\lambda r d\varphi dz\left[\frac{dT(r)}{dr}\right]_r=q_s r dr d\varphi dz+-\lambda(r+dr)d\varphi dz\left[\left[\frac{dT(r)}{dr}\right]_r+\frac{d^2T(r)}{dr^2}dr\right]$$

relation, qui après certaines simplifications devient

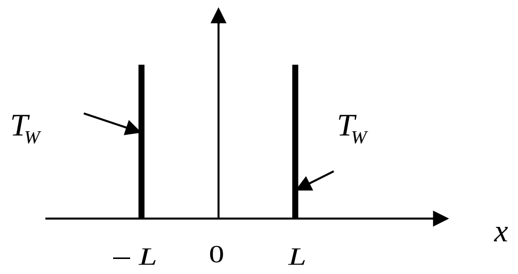
$$r\frac{d^2T(r)}{dr^2}+\frac{dT(r)}{dr}+\frac{q_s}{\lambda}r=0$$

ou encore

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT(r)}{dr}\right)+\frac{q_s}{\lambda}r=0$$

Exercice n°14

Un mur plan d'épaisseur $2L$ est le siège d'une génération de chaleur interne du type $q_S = q_0\cos(ax)$ où a est une constante positive. Si les deux côtés du mur sont maintenus à une température constante T_W, calculer la quantité de chaleur perdue par le mur.



Solution

L'équation de Poisson dans ce cas est

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{q_0}{\lambda}\cos ax=0$$

Les conditions aux limites pour cette équation sont

$$x=-L, T=T_W$$

$$x=L, T=T_W$$

La solution de l'équation de Poisson est

$$T(x)=\frac{q_0}{\lambda a^2}\cos ax+C_1x+C_2$$

En calculant les constantes d'intégration C_1 et C_2 à partir des conditions aux limites, nous obtenons la distribution de la température sous la forme

$$T(x)-T_W=\frac{q_0}{\lambda a^2}(\cos ax-\cos aL)$$

Exercice n°15

Un mur plan d'épaisseur L ayant une face isolée et l'autre face à la température T_W. Calculer la température $T(x)$ si la source de chaleur interne est :

$$q_S(x)=q_0(1-\frac{x}{L})$$

Solution

L'équation de Poisson dans ce cas est

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{q_0}{\lambda}\left(1-\frac{x}{L}\right)=0$$

Les conditions aux limites pour cette équation sont

$$x = 0, T = T_W$$

$$x = L, \frac{dT}{dx} = 0$$

La solution de l'équation de Poisson est

$$T(x) = -\frac{q_0}{\lambda}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L}\right) + C_1 x + C_2$$

En calculant les constantes d'intégration C_1 et C_2 à partir des conditions aux limites, nous obtenons la distribution de la température sous la forme

$$T(x) - T_W = -\frac{q_0}{\lambda}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L}\right) + \frac{q_0 L}{2\lambda} x$$

Exercice n°16

Trouver la distribution de température dans un mur plan siège d'une génération de chaleur $q_S = q_0(1 - \beta(T - T_w))$, si les deux faces sont à la température T_W et distantes de $2L$.

Solution

L'équation de Poisson dans ce cas est

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} + \frac{q_0}{\lambda}\left(1 - \beta\left(T(x) - T_W\right)\right) = 0$$

Les conditions aux limites pour cette équation sont

$$x = 0, T = T_W$$

$$x = 2L, T = T_W$$

Avec le changement de variables

$$\theta(x) = \frac{q_0}{\lambda}\left(1 - \beta\left(T(x) - T_W\right)\right)$$

$$T(x) = \frac{1}{\beta} - \frac{\lambda}{\beta q_0}\theta(x) + T_W$$

L'équation de Poisson devient

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} - m^2\theta(x) = 0$$

$$m^2 = \frac{\beta q_0}{\lambda}$$

Le conditions aux limites se transforment aussi et deviennent

$$x = 0, \theta = \frac{q_0}{\lambda}$$

$$x = 2L, \theta = \frac{q_0}{\lambda}$$

La solution de l'équation de Poisson s'écrit

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

En calculant les constantes d'intégration C_1 et C_2 à partir des conditions aux limites, nous obtenons la distribution de la température.

Exercice n°17

Un long cylindre plein de longueur L et de diamètre r_0 constitué d'un matériau de conductivité thermique λ constante est le siège d'une génération de chaleur interne Q_0 constante. La surface externe du cylindre est maintenue à une température T_0 constante. Sachant que l'équation de la chaleur dans ce cas est

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+\frac{Q_0 r}{\lambda}=0$$

1) Trouver la solution $T(r)$ de cette équation :
2) Ecrire les conditions aux limites appropriées,
3) Déduire la température $T(r)$,
4) Calculer la température maximale T_m,
5) Ecrire la température $T(r)$ sous une forme adimensionnelle.

Solution

1) L'équation de la chaleur s'écrit

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=-\frac{Q_0 r}{\lambda}$$

2) Les conditions aux limites sont

$$T(r_0)=T_0 \text{ (température de la surface externe)}$$

$$\frac{dT(0)}{dr}=0 \text{ (température maximale au centre)}$$

3) Une première intégration conduit à l'expression

$$r\frac{dT}{dr}=-\frac{Q_0}{2\lambda}r^2+C_1$$

en intégrant encore une fois, nous trouvons la distribution de la température, à savoir

$$T(r)=-\frac{Q_0}{4\lambda}r^2+C_1\ln r+C_2$$

les constantes d'intégration obtenues à partir des conditions aux limites sont

$$C_1=0$$

$$C_2=\frac{Q_0}{4\lambda}r_0^2+T_0$$

ainsi, la température devient

$$T(r)-T_0=\frac{Q_0 r_0^2}{4\lambda}\left(1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)$$

4) La température maximale est obtenue pour $r=0$, soit

$$T_m = \frac{Q_0 r_0^2}{4\lambda} + T_0$$

5) En reprenant l'expression de la température, nous obtenons

$$T(r) - T_0 = \frac{Q_0 r_0^2}{4\lambda}\left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right) = (T_m - T_0)\left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)$$

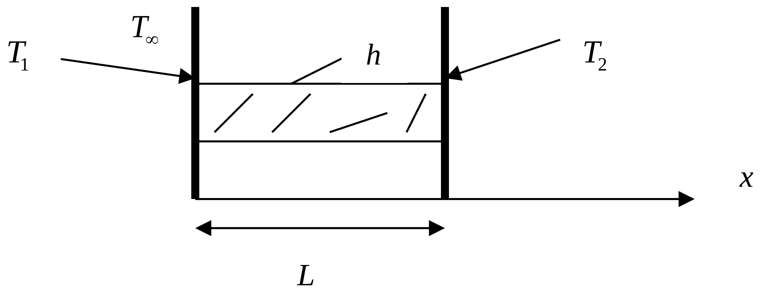
par conséquent, la température adimensionnelle s'écrit

$$\frac{T(r) - T_0}{T_m - T_0} = \left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)$$

Exercice n°18

Un barreau cylindrique de longueur L et de section S est relié à deux murs plans de températures respectives T_1 et T_2. Il perd la chaleur par convection à l'air ambiant de température T_∞.

Ecrire l'équation différentielle de la distribution de la température $T(x)$ et déterminer sa solution.



Solution

Ce pont thermique obéit à l'équation d'une ailette, à savoir

$$\frac{d^2(T(x) - T_\infty)}{dx^2} - m^2(T(x) - T_\infty) = 0$$

$$m^2 = \frac{hP}{\lambda S}$$

Avec les conditions aux limites

$$x = 0, T = T_1$$

$$x = L, T = T_2$$

La solution de l'équation de l'ailette est

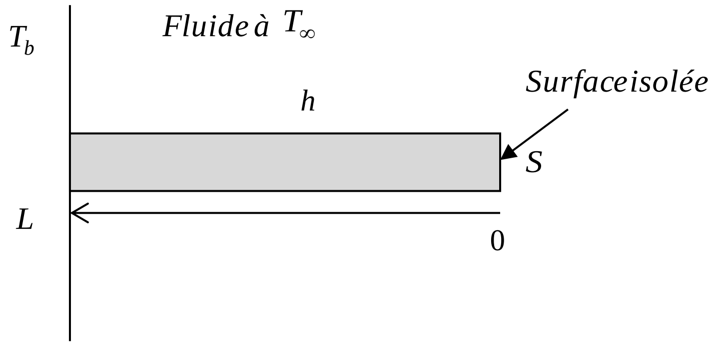
$$T(x)-T_\infty = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

En calculant les constantes d'intégration C_1 et C_2 à partir des conditions aux limites, nous obtenons la distribution de la température sous la forme

$$T(x)-T_\infty = \frac{(T_2 - T_\infty)shmx - (T_1 - T_\infty)shm(x-L)}{shmL}$$

Exercice n°19

Soit l'ailette suivante



1) Ecrire l'équation de la chaleur pour cette ailette,
2) Ecrire les conditions aux limites,
3) Trouver la température adimensionnelle $\dfrac{T(x)-T_\infty}{T_b - T_\infty}$,
4) Calculer la quantité de chaleur évacuée par l'ailette Q_a.

Solution

1) L'équation de l'ailette est

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - m^2(T(x)-T_\infty) = 0 \text{ ou bien } \frac{d^2(T(x)-T_\infty)}{dx^2} - m^2(T(x)-T_\infty) = 0$$

puisque $T_\infty = constante$, $m = \sqrt{\dfrac{hP}{\lambda S}}$ est un paramètre constant.

2) Les conditions aux limites sont

$$T(L) = T_b \text{ (température de base)}$$

$$\left.\frac{dT(x)}{dx}\right|_{x=0} = 0 \text{ (face isolée)}$$

La solution de l'équation de la chaleur de l'ailette est

$$T(x)-T_\infty = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration qui sont déterminées à partir des conditions aux limites.

3) En appliquant les conditions aux limites, nous obtenons

$$C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL} = T_b - T_\infty$$
$$C_1 - C_2 = 0$$

d'où

$$C_1 = \frac{T_b - T_\infty}{2\cosh mL},\ C_2 = \frac{T_b - T_\infty}{2\cosh mL}$$

Par conséquent, la distribution adimensionnelle de la température s'écrit

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\cosh mx}{\cosh mL}$$

4) La quantité de chaleur évacuée par l'ailette est

$$Q_a = \lambda S \left.\frac{dT(x)}{dx}\right|_{x=L} = m\lambda S(T_b - T_\infty)\frac{\sinh mL}{\cosh mL} = \sqrt{hP\lambda S}(T_b - T_\infty) thmL$$