

**Transfert de chaleur I**  
**3<sup>ème</sup> année Licence génie mécanique**  
**Énergétique**

Pr. S. Saouli  
Département des Sciences et Techniques  
Institut des Sciences et Technologies  
Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf, Mila

## Introduction

### I. Introduction des transferts thermiques et position vis-à-vis de la thermodynamique

De la thermodynamique, nous avons appris que l'énergie peut être transférée entre un système et son environnement. Ces interactions appelées travail et chaleur. Cependant, la thermodynamique ne concerne que les états finaux des processus durant les quels les interactions prennent place et ne fournit aucune information sur la nature des interactions ou leurs taux temporels durant les quels elles se passent.

Dans ce qui suit intéressons-nous à l'extension de l'analyse thermodynamique à travers l'étude des modes de transfert de chaleur et cherchons les relations nécessaires pour le calcul des taux de transfert de chaleur.

C'est quoi alors le transfert de chaleur, la réponse à une telle question est la suivante : Le transfert de chaleur est le transfert de l'énergie thermique due à la différence spatiale de la température. En d'autres termes, là où il y a une différence de températures dans un milieu ou entre des milieux, il y aura un transfert de chaleur.

Les domaines de la thermodynamique et du transfert de chaleur sont intimement liés, cela concerne le taux avec le quel la chaleur est transférée, ce qui peut être considéré comme l'extension de la thermodynamique.

Le premier principe de la thermodynamique est le principe de la conservation de l'énergie qui relie les différentes formes et interactions d'énergie entre un système et son environnement. Basé sur beaucoup de faits expérimentaux, l'énergie ne peut pas être créée ou détruite durant un processus, elle ne peut que changer de forme. Le premier principe ou la première loi de la thermodynamique exprime le fait que : Quand un système subit une transformation, la somme algébrique des diverses variations d'énergie, du flux de chaleur, du travail effectué, etc., est indépendante de cette transformation. Elle ne dépend que de l'état initial et de l'état final du système.

L'énergie totale  $E$  d'un système est la somme de l'énergie cinétique  $E_C$ , de l'énergie potentielle  $E_p$  et de l'énergie interne  $U$

$$E = E_C + E_p + U \quad (I.1)$$

Les énergies cinétique et potentielle sont communes entre la mécanique et la thermodynamique, mais, l'énergie interne est une énergie propre à la thermodynamique.

Pour un système fermé, l'énergie totale  $E$  échangée avec l'environnement est divisée en deux parties : l'apport de chaleur  $Q$  au système et le travail effectué  $W$  par le système. Dans ce cas, l'équation I.1 s'écrit

$$\Delta E = Q + W \quad (I.2)$$

Généralement, en thermodynamique, les variations de l'énergie cinétique et potentielle sont nulles, et l'équation précédente devient

$$\Delta U = Q + W \quad (I.3)$$

pour un système ouvert, le premier principe de la thermodynamique pour un volume de contrôle peut être écrit sous la forme

$$\Delta E = E_e - E_s + E_g \quad (I.4)$$

où  $E_e$ ,  $E_s$  et  $E_g$  sont respectivement l'énergie entrante, l'énergie sortante et l'énergie générée au sein du système. Si nous nous intéressons aux taux des échanges d'énergie, nous pouvons réécrire la relation I.4 sous la forme

$$\frac{dE}{dt} = \dot{E}_e - \dot{E}_s + \dot{E}_g \quad (I.5)$$

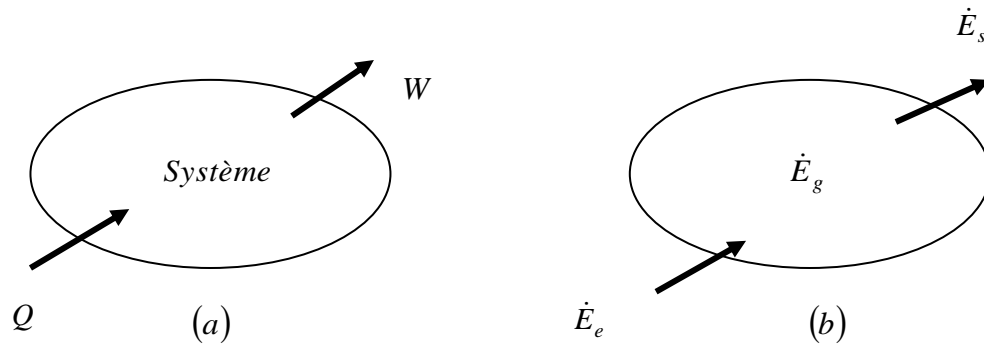


Figure I. 1. Conservation de l'énergie : (a) pour système fermé, (b) pour un système ouvert.

## II. Lois phénoménologiques du transfert de chaleur

Le transfert de chaleur s'effectue selon trois modes différents qui sont la conduction, la convection et le rayonnement thermique. Quand un gradient de température existe au sein d'un milieu immobile qui peut être un solide ou un fluide, nous utilisons le terme de conduction pour faire allusion au transfert de chaleur qui s'effectue à travers le milieu. Le terme de convection fait référence au mode de transfert de chaleur entre une surface solide et un fluide en mouvement ou entre deux fluides en mouvements quand un gradient de température existe. Le troisième mode de transfert de chaleur concerne le rayonnement thermique. Toute surface solide ou fluide émet un rayonnement thermique sous forme d'ondes électromagnétiques (lumière) qui voyage sans support matériel dans l'espace environnant.

### II.1. Conduction

La conduction est le processus par lequel la chaleur est transmise dans un système solide de sa région chaude vers sa région froide ou entre deux systèmes en contact (l'un chaud et l'autre froid). Ce transfert d'énergie se transmet par les vibrations des molécules du système autour de leurs positions d'équilibre. D'après la théorie cinétique, l'énergie ou la vitesse des molécules est proportionnelle à la température. Donc, en allant vers les régions de basses températures les molécules cèdent une partie de leurs énergies par des chocs élastiques ou par diffusion des électrons (cas des métaux).

La conduction tente à équilibrer la température au sein du système mais le processus continue si une différence de température est maintenue.

Considérons un système solide  $A$  formé par deux sous-systèmes  $A_1$  et  $A_2$ . Appelons  $S$  la surface de contact des deux sous-systèmes qui sont aux températures  $T(M,t) + dT(M,t)$  et  $T(M,t)$ .

La quantité de chaleur transférée  $dQ$  entre le sous-système  $A_1$  et le sous-système  $A_2$  à travers la surface de contact  $S$  de vecteur unitaire  $\vec{n}$  est donnée par la formule

$$dQ = \vec{q} \cdot \vec{n} dS = q \cos \theta dS \quad (\text{I.6})$$

où  $\theta$  est l'angle entre la direction du flux de chaleur  $\vec{q}$  et le vecteur unitaire  $\vec{n}$  de la surface.

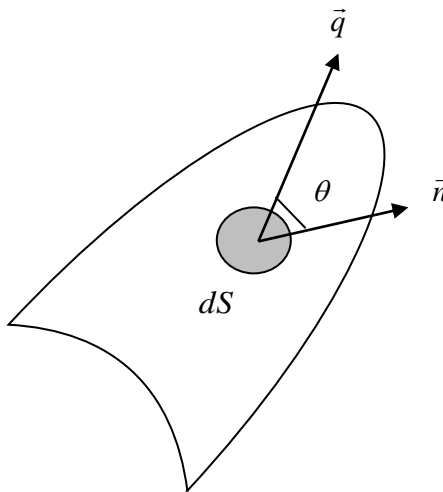


Figure I. 2. Définition du flux de chaleur.

Les points ayant une même température  $T(M,t)$  forment une surface appelée isotherme. Le flux de chaleur qui traverse la surface  $S$  au sein du système est dû au gradient de la température entre les isothermes. Comme ce flux de chaleur est causé

par le gradient de température, il est naturel de considérer une relation linéaire entre eux. Cela postule que le flux est directement proportionnel au gradient de température. Cette relation peut être écrite sous la forme

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T(M,t) \quad (I.7)$$

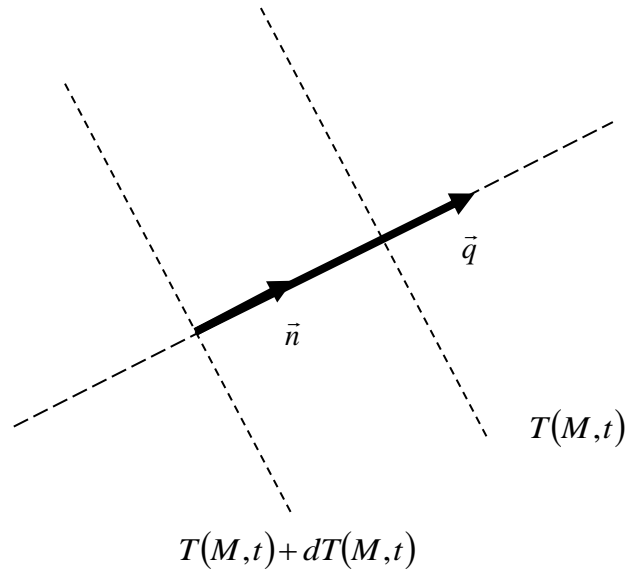


Figure I. 3. Isothermes et la loi de Fourier.

où  $\lambda$  est la conductivité thermique du milieu. La conductivité thermique est une propriété physique des milieux qui caractérise les milieux à transmettre la chaleur d'un point à un autre.

Cette équation est la loi de Fourier. Le signe moins exprime le fait que la chaleur va toujours dans le sens des températures décroissantes en vertu du deuxième principe de la thermodynamique. La constante de proportionnalité est la conductivité thermique du matériau, elle est fonction de la température et de la pression.

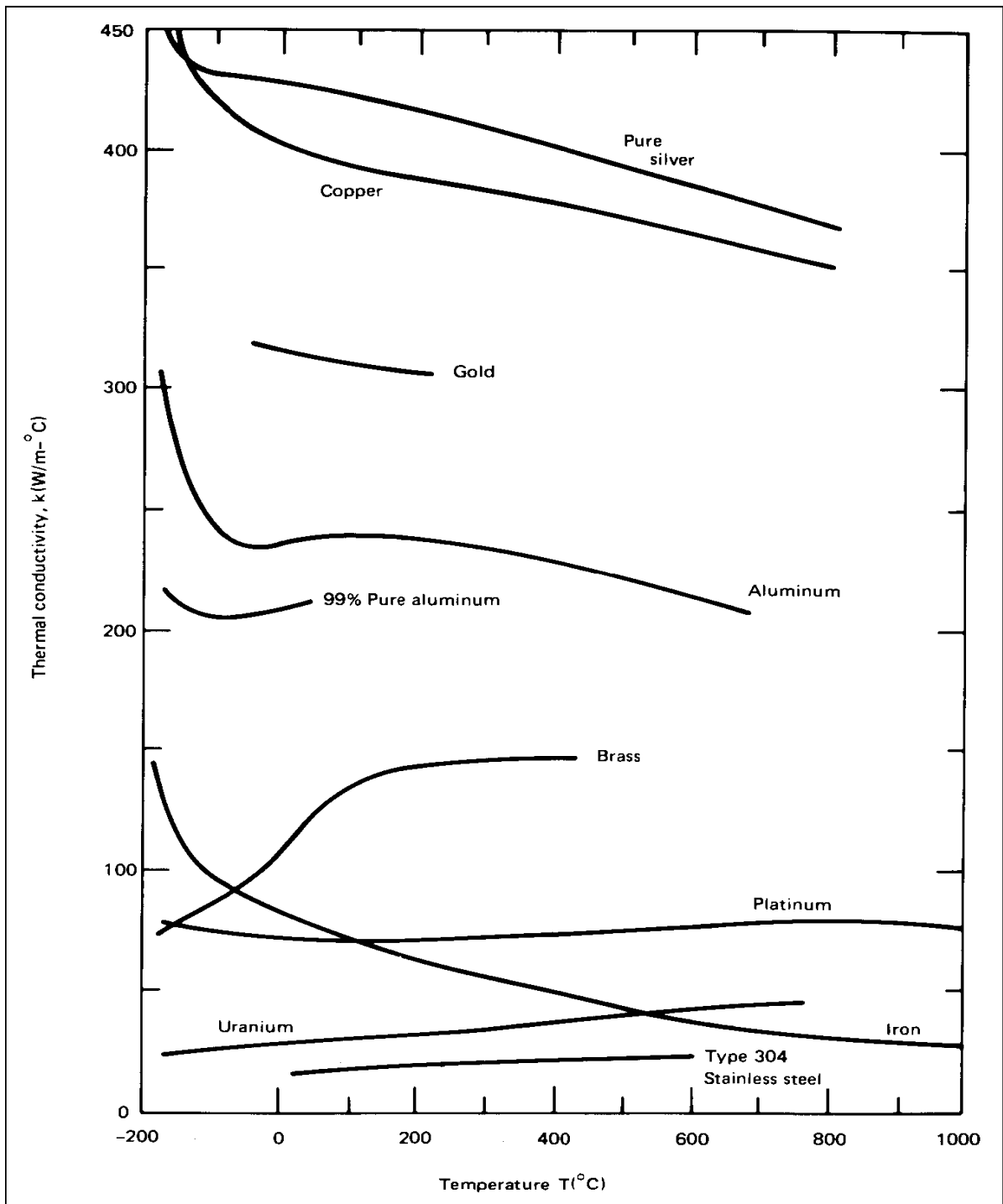


Figure I. 4. Variations de la conductivité thermique des solides en fonction de la température.

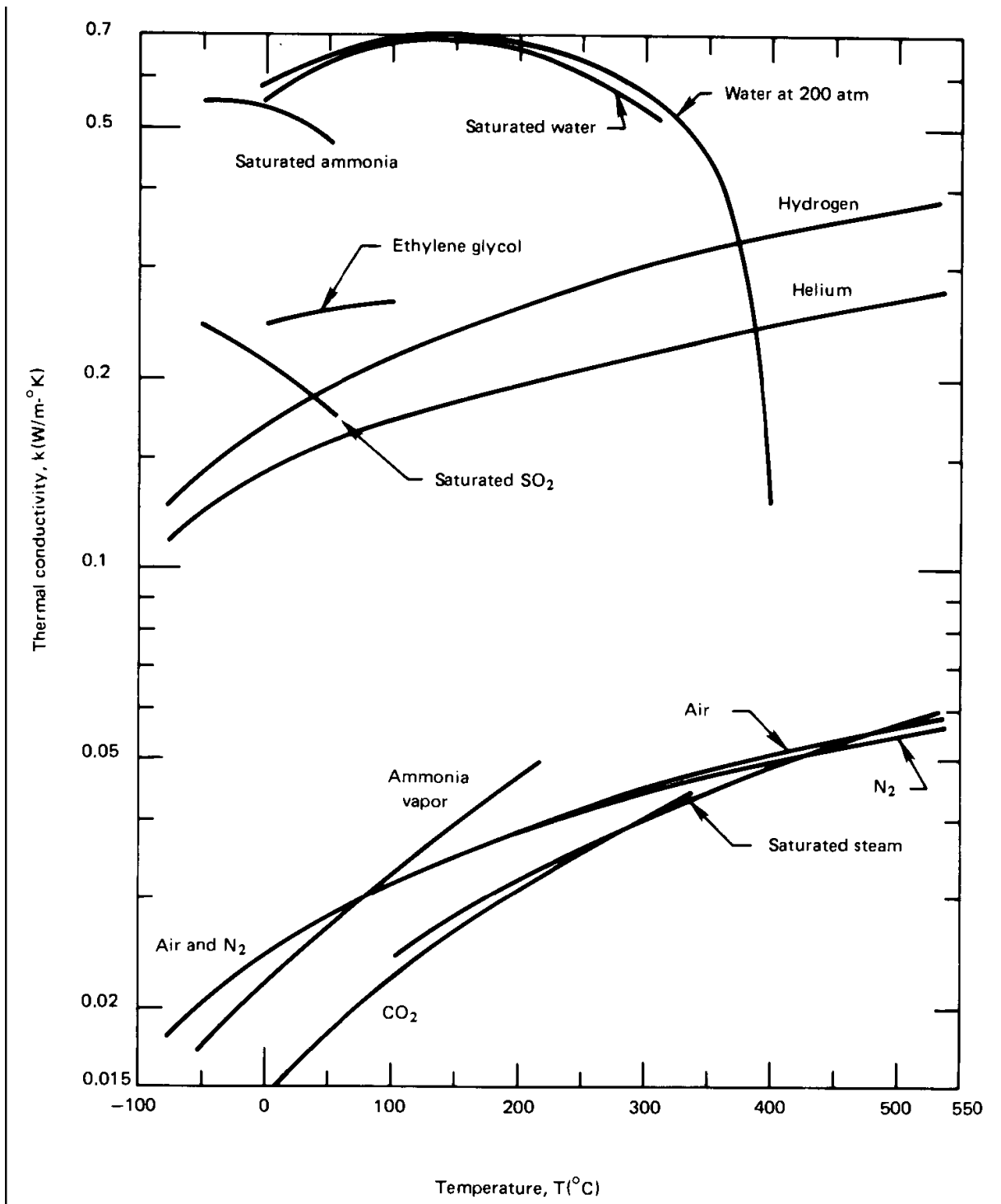


Figure I. 5. Variations de la conductivité thermique de certains gaz en fonction de la température.

## II. 2. Convection

Lors du transfert de chaleur entre un fluide et un solide ou entre deux fluides, la quantité de chaleur échangée est donnée par la formule de Newton

$$Q = hS(T_0 - T_\infty) \quad (\text{I.8})$$

où  $h$  est le coefficient de transfert convectif moyen,  $T_0$  et  $T_\infty$  sont respectivement les températures de la surface et du fluide et  $S$  est la surface d'échange.

Pour calculer ce coefficient, on suppose que la quantité de chaleur sur la surface se fait par conduction, tel que

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = h_x (T_0 - T_\infty) \quad (\text{I.9})$$

ainsi, le coefficient de transfert convectif local  $h_x$  est

$$h_x = \frac{-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{T_0 - T_\infty} \quad (\text{I.10})$$

Le coefficient de transfert convectif moyen se calcul d'après la formule suivante

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx \quad (\text{I.11})$$

Le calcul de ce coefficient de transfert convectif nécessite la résolution des équations de bilan pour le fluide.

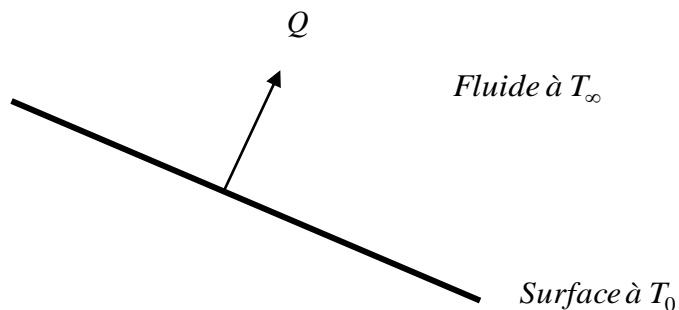


Figure I. 6. Illustration de la loi de Newton.



### II. 3. Rayonnement thermique

Toute surface émet un rayonnement qu'on appelle rayonnement thermique pourvu que sa température soit différente du zéro absolu. Cette quantité de chaleur se calcule à partir de la formule de Stefan-Boltzmann, à savoir

$$Q = \varepsilon \sigma S T^4 \quad (\text{I.12})$$

où Le coefficient  $\varepsilon$  est l'émissivité de la surface,  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^4$  est la constante de Stefan-Boltzmann et  $S$  est la surface émettrice. Si la surface est noire, ce coefficient est égal à un.

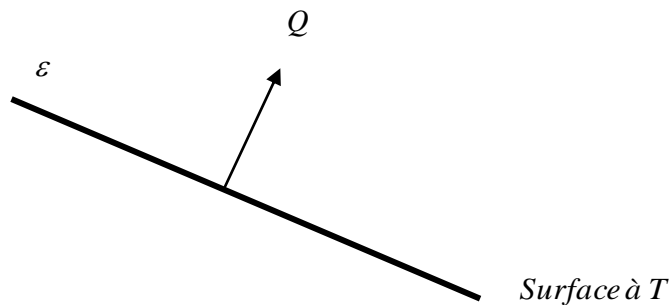


Figure I. 7. Illustration de la loi de Stefan-Boltzmann.

Si la surface est entourée d'un milieu infini de température  $T_\infty$ , la quantité de chaleur nette échangée est

$$Q = \varepsilon \sigma S (T_0^4 - T_\infty^4) \quad (\text{I.13})$$

Si le transfert de chaleur s'effectue entre deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ , la quantité de chaleur nette échangée entre ces deux surfaces sera

$$Q = Q_{12} - Q_{21} = \sigma S_1 F_{12} (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{I.14})$$

Le terme  $F_{12}$  est appelé facteur de forme, il dépend des émissivités des deux surfaces, la distance entre les surfaces et leurs orientations respective de l'une par rapport à l'autre.

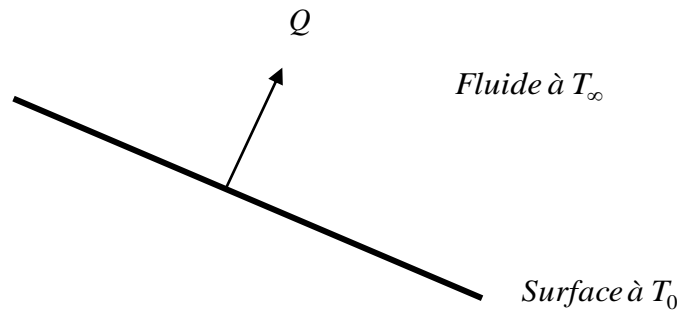


Figure I. 8. Illustration de la loi de Newton.

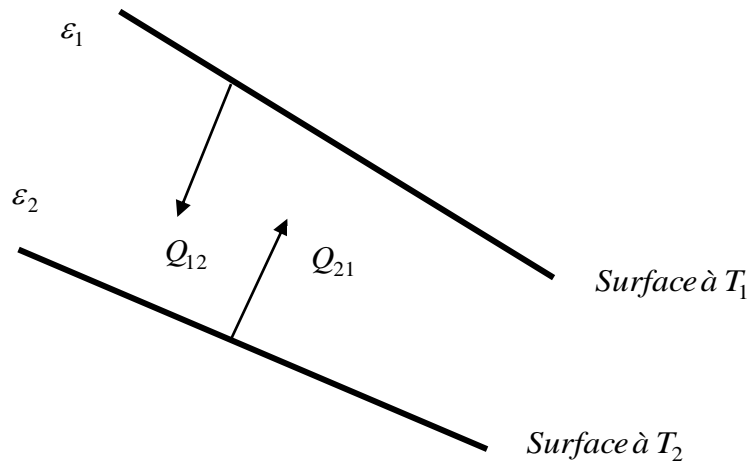


Figure I. 9. Echange de chaleur entre deux surfaces.

## Conduction

### II. Équation de la chaleur

#### II.1. Établissement de l'équation de la chaleur

Écrivons un bilan énergétique sur un élément de volume  $v$  entouré d'une surface  $s$ .

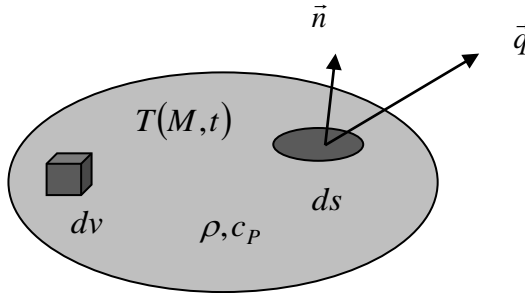


Figure II.1. Volume de contrôle dans un champ de transfert de chaleur.

La variation de l'énergie interne  $U$  est égale à la somme des puissances calorifique et de la chaleur interne générée par une source interne de densité volumique  $q_s$

$$\frac{dU}{dt} = - \int_s \vec{q} \cdot \vec{n} ds + \int_v q_s dv \quad (\text{II.1})$$

Au même temps la variation de l'énergie interne, sachant que cette dernière ne dépend que de la température, s'écrit

$$\frac{dU}{dt} = \int_v \rho C_p \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} dv \quad (\text{II.2})$$

où  $\rho$  et  $C_p$  sont respectivement la masse volumique et la capacité calorifique à pression constante du milieu.

En insérant ces termes dans le bilan énergétique on obtient

$$\int_v \rho C_P \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} dv = - \int_v \text{div} \bar{q} dv + \int_v q_s dv \quad (\text{II.3})$$

sachant à partir de la loi de Fourier que

$$\bar{q} = -\lambda \vec{\nabla} T(M,t) \quad (\text{II.4})$$

nous arrivons à

$$\int_v \rho C_P \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} dv = \int_v \text{div}(\lambda \vec{\nabla} T(M,t)) dv + \int_v q_s(M,t) dv \quad (\text{II.5})$$

en mettant tous les termes sous le signe d'intégration, nous obtenons

$$\int_v \left[ \rho C_P \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} - \text{div}(\lambda \vec{\nabla} T(M,t)) - q_s(M,t) \right] dv = 0 \quad (\text{II.6})$$

cette intégrale ne peut être nulle que si la fonction sous le signe de l'intégrale est nulle, d'où la relation

$$\rho C_P \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = \text{div}(\lambda \vec{\nabla} T(M,t)) + q_s(M,t) \quad (\text{II.7})$$

c'est l'équation de la chaleur sous sa forme générale dans un solide immobile en présence de sources de chaleur interne.

Généralement, la conductivité thermique  $\lambda$  peut être considérée comme constante et par conséquent, l'équation de la chaleur prend la forme

$$\rho C_P \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = \lambda \Delta T(M,z) + q_s(M,t) \quad (\text{II.8})$$

où  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien.

Divisons les deux membres de cette équation par le terme  $\rho C_P$ , pour obtenir

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = a \Delta T(M,z) + \frac{q_s(M,t)}{\rho C_p} \quad (\text{II.9})$$

le coefficient  $a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$  est appelé coefficient de diffusion thermique.

## II.2. Conditions aux limites

Si nous regardant attentivement l'équation de la chaleur, nous remarquons qu'elle renferme une dérivée du premier ordre par rapport au temps et des dérivées du second ordre par rapport à l'espace, cela implique impérativement trois conditions aux limites. Une première condition au limite par rapport au temps et deux conditions aux limites par rapport à l'espace, c'est ce que nous allons détailler dans ce qui suit.

### II.2.1. Condition initiale

Si la distribution de la température à l'instant  $t = t_0$  est une certaine fonction  $f(M, t_0)$ , la condition initiale est

$$T(M,t) = f(M, t_0) \quad (\text{II.10})$$

### II.2.2. Conditions aux limites

Les conditions aux limites imposées sur la température  $T(M,t)$  dépendent des situations physiques envisagées.

a) *Surface à température constante (Condition de Dirichlet)*

Si pour une position spatiale  $M_0$ , la température est constante alors, la condition aux limites dans ce cas est

$$T(M,t) = g(M_0,t) \quad (\text{II.11})$$

Cette condition s'appelle aussi condition du premier type. En pratique cette condition aux limites se rencontre dans le cas où la surface est au contact avec un solide en fusion ou un liquide en ébullition (changement de phase). Dans ces deux

cas, il y a un transfert de chaleur à travers la surface pendant que la température reste constante durant ce changement de phase.

b) *Surface soumise à un flux de chaleur (condition de Newmann)*

Si maintenant pour la position spatiale  $M_0$ , un flux de chaleur  $q$  est imposé, la condition aux limites dans ce cas devient

$$-\lambda \frac{\partial T(M_0, t)}{\partial M} = q \quad (\text{II.12})$$

Cette condition aux limites appelée aussi condition du second type se rencontre lors du chauffage de la surface par un flux de chaleur comme par exemple avec une résistance électrique.

Si la position spatiale  $M_0$  est adiabatique donc isolée, la condition aux limites est alors

$$\frac{\partial T(M_0, t)}{\partial M} = 0 \quad (\text{II.13})$$

c) *Surface au contact d'un fluide (condition du troisième type)*

Finalement, il se peut que pour la position spatiale  $M_0$  l'échange de chaleur s'effectue par convection, la condition aux limites dans ce cas s'écrit

$$-\lambda \frac{\partial T(M_0, t)}{\partial M} = h(T(M_0, t) - T_\infty) \quad (\text{II.14})$$

## II. 3. Une autre façon d'établir l'équation de la chaleur

### II. 3. 1. Coordonnées cartésiennes

Considérons un cube élémentaire de côtés  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  entourant un milieu immobile à la température  $T(x, y, z, t)$ . Les quantités de chaleur par condition perpendiculaire à chaque surface du cube aux points  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont

$$Q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dydz, \quad Q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} dx dz, \quad Q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} dx dy \quad (\text{II.15})$$

Les quantités de chaleur par conduction à travers les surfaces opposées aux surfaces précédentes sont obtenues par un développement de Taylor au premier degré, soit

$$Q_{x+dx} = Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \quad (\text{II.16})$$

$$Q_{y+dy} = Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \quad (\text{II.17})$$

$$Q_{z+dz} = Q_z + \frac{\partial Q_z}{\partial z} dz \quad (\text{II.18})$$

Si le milieu existe une source de chaleur volumique  $q_s$ , l'énergie générée  $E_g$  dans le volume du cube est alors

$$E_g = q_s dx dy dz \quad (\text{II.19})$$

L'énergie stockée  $E_{St}$  dans le volume du cube est par définition

$$E_{St} = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (\text{II.20})$$

Le bilan énergétique sur le volume du cube en vertu du principe de la conservation d'énergie est

$$E_e + E_g - E_S = E_{St} \quad (\text{II.21})$$

soit

$$Q_x + Q_y + Q_z + q_s dx dy dz - Q_{x+dx} - Q_{y+dy} - Q_{z+dz} = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$$

en utilisant les relations (II.16, 17, 18) nous arrivons à

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial Q_z}{\partial z} dz + q_s dx dy dz = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (\text{II.22})$$

En y injectant les relations (II.15), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy dz \\ + q_s dx dy dz = \rho C_p \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} dx dy dz \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

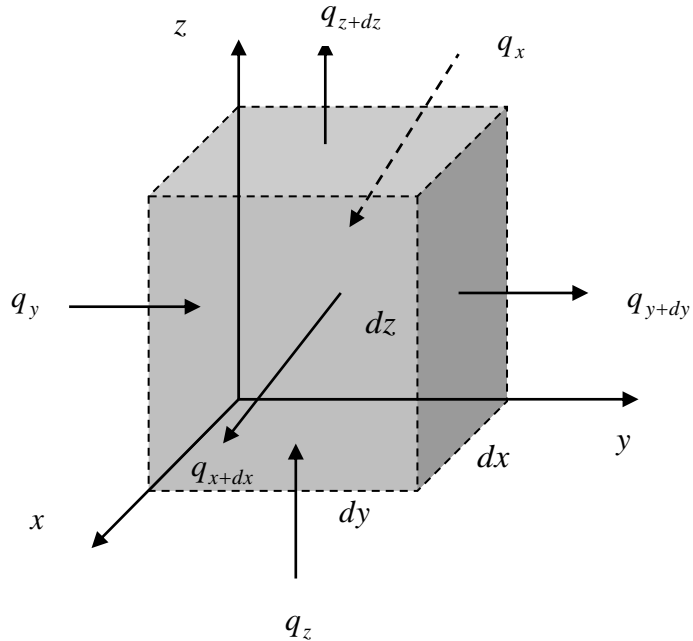


Figure II. 2. Élément de volume  $dv = dx dy dz$  en coordonnées cartésiennes.

en simplifiant par l'élément de volume  $dx dy dz$ , nous aboutissons à l'équation de la chaleur en coordonnées cartésiennes sous sa forme la plus générale



$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_s = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.24})$$

Si la conductivité thermique  $\lambda$  est constante nous retrouvons l'équation (II.9) à savoir

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{q_s}{\rho C_P} \quad (\text{II.25})$$

### II. 3. 2. Coordonnées cylindriques

Quand l'opérateur nabla  $\vec{\nabla}$  est exprimé en coordonnées cylindriques, la loi de Fourier s'écrit

$$\vec{q} = -\lambda \left( \frac{\partial T(r, \varphi, z)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, \varphi, z)}{\partial \varphi} \vec{e}_\theta + \frac{\partial T(r, \varphi, z)}{\partial z} \vec{e}_z \right) \quad (\text{II.26})$$

où

$$q_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_\varphi = -\frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{II.27})$$

sont respectivement les composantes du flux de chaleur dans les directions radiale, circonférentielle et axiale.

En appliquant le principe de conservation d'énergie sur l'élément de volume  $rdrd\varphi dz$ , l'équation de la chaleur suivante est obtenue

$$\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_s \quad (\text{II.28})$$

Si la conductivité thermique  $\lambda$  est constante, l'équation devient

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{q_s}{\rho C_P} \quad (\text{II.29})$$

### II. 2. 4. Coordonnées sphériques

Quand l'opérateur nabla  $\vec{\nabla}$  est exprimé en coordonnées sphériques, la loi de Fourier s'écrit alors

$$\vec{q} = -\lambda \left[ \frac{\partial T(r, \varphi, \theta)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, \varphi, \theta)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T(r, \varphi, \theta)}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \right] \quad (\text{II.30})$$

où

$$q_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_\theta = -\frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad q_\varphi = -\frac{\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \quad (\text{II.31})$$

sont respectivement les composantes du flux de chaleur dans les directions radiale, polaire et azimutale. En appliquant le principe de conservation d'énergie sur l'élément de volume  $r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$ , l'équation de la chaleur suivante est obtenue

$$\begin{aligned} \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) \\ & + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + q_s \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

Si la conductivité thermique  $\lambda$  est constante, l'équation devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = & \alpha \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right] \\ & + \frac{q_s}{\rho C_P} \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

## II. 4. Formes spéciales de l'équation de chaleur

Reprenons l'équation de la chaleur sous sa forme générale dans le cas où la conductivité thermique est constante, soit

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, z) + \frac{q_s(M, t)}{\rho C_p} \quad (\text{II.34})$$

et intéressons-nous aux différents cas particuliers.

### II. 4. 1. Équation de Fourier

En absence de source de chaleur internes ( $q_s(M, t) = 0$ ), l'équation de la chaleur devient

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, z) \quad (\text{II.35})$$

cette équation est appelée équation de Fourier.

### II. 4. 2. Équation de Poisson

En régime permanent, la température ne dépend pas du temps ( $\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = 0$ ), l'équation de chaleur est connue sous le nom de l'équation de Poisson et s'écrit

$$\Delta T(M) + \frac{q_s(M)}{\lambda} = 0 \quad (\text{II.36})$$

### II. 4. 3. Équation de Laplace

L'équation de Laplace est obtenue dans le cas du régime permanent et en absence de sources de chaleur internes ( $q_s(M, t) = 0$ ). Dans ce cas, nous obtenons

$$\Delta T(M) = 0 \quad (\text{II.37})$$

**II. 5. Conduction de chaleur dans le cas de géométries simples en régime permanent et sans sources de chaleur internes**

**II. 5. 1. Mur plan**

Considérons un mur plan de conductivité thermique  $\lambda$  et d'épaisseur  $L$  dans la direction  $Ox$  et infini dans les deux autres directions. Pour trouver la distribution de température dans ce mur, il faut alors résoudre l'équation de Laplace dans la direction  $Ox$  soit

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} = 0 \quad (\text{II.38})$$

les conditions aux limites dans ce cas sont

$$T(0) = T_1 \quad (\text{II.39})$$

$$T(L) = T_2 \quad (\text{II.40})$$

l'intégration de l'équation de la chaleur nous donne

$$T(x) = C_1x + C_2 \quad (\text{II.41})$$

en appliquant les conditions aux limites II. 39 et II. 40, nous obtenons les relations

$$T_1 = C_1 \times 0 + C_2 \quad (\text{II.42})$$

$$T_2 = C_1L + C_2 \quad (\text{II.43})$$

d'où

$$C_2 = T_1 \quad (\text{II.44})$$

$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} \quad (\text{II.45})$$

en introduisant ces expressions dans l'équation II. 41, nous obtenons la distribution de température dans le mur

$$T(x) = (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1 \quad (\text{II.46})$$

ou sous une forme adimensionnelle

$$\frac{T(x) - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{x}{L} \quad (\text{II.47})$$

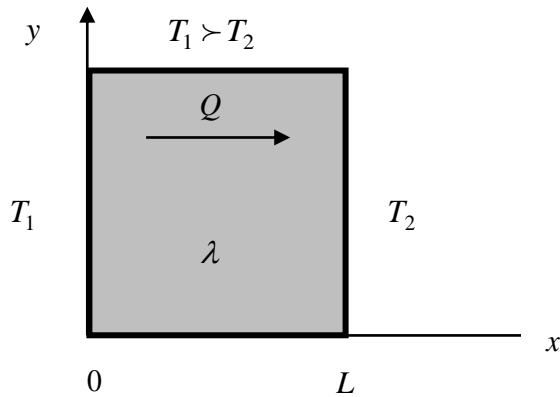


Figure II. 3. Conduction de chaleur dans un mur plan.

La quantité de chaleur traversant le mur est

$$Q = -\lambda S \frac{dT(x)}{dx} = \lambda S \frac{(T_1 - T_2)}{L} \quad (\text{II.48})$$

écrivons cette équation différemment

$$Q = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{L}{\lambda S}} \quad (\text{II.49})$$

Pour trouver la distribution de la température dans un mur plan on peut repartir de l'expression du flux de chaleur et non pas de l'équation de la chaleur. En effet, nous avons

$$Q = -\lambda S \frac{dT(x)}{dx} \quad (\text{II.50})$$

en intégrant cette équation de la façon suivante

$$Q \int_0^L dx = -\lambda S \int_{T_1}^{T_2} dT \quad (\text{II.51})$$

la quantité de chaleur est donc

$$Q = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{L}{\lambda S}} \quad (\text{II.52})$$

Pour trouver la distribution de température, il suffit d'écrire

que  $Q \int_0^x dx = -\lambda S \int_{T_1}^{T(x)} dT$ , soit

$$QL = S(T_1 - T(x)) \quad (\text{II.53})$$

en remplaçant  $Q$  par son expression (équation II.52) on trouve la distribution de la température dans le mur

$$\frac{T(x) - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{x}{L} \quad (\text{II.54})$$

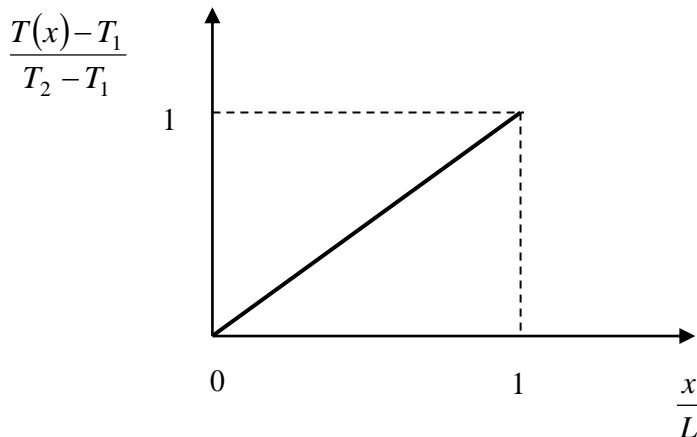


Figure II. 4. Distribution de la température dans un mur plan.

### II. 5. 2. Cylindre creux

Soit un cylindre creux de rayon interne  $r_i$ , de rayon externe  $r_e$ , de longueur  $L$  et constitué d'un matériau de conductivité thermique  $\lambda$ . Soient  $T_1$  et  $T_2$  les températures des parois interne et externe du cylindre respectivement. Par symétrie radiale, la température au sein du cylindre ne dépend que du rayon  $r$ .

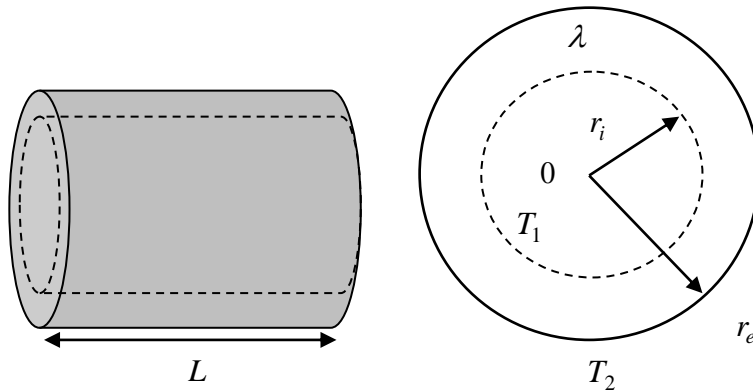


Figure II. 5. Conduction de chaleur dans un cylindre creux.

Écrivons l'équation de Laplace

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II.55})$$

comme la conduction de chaleur est radiale, donc la température n'est fonction que du rayon  $r$ , l'équation de Laplace se réduit à l'équation différentielle suivante

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT(r)}{dr} \right) = 0 \quad (\text{II.56})$$

avec les conditions aux limites

$$T(r_i) = T_1 \quad (\text{II.57})$$

$$T(r_e) = T_2 \quad (\text{II.58})$$

une première intégration de cette équation donne

$$r \frac{dT(r)}{dr} = C_1 \quad (\text{II.59})$$

d'où

$$\frac{dT(r)}{dr} = \frac{C_1}{r} \quad (\text{II.60})$$

en intégrant une deuxième fois, nous trouvons la distribution de température dans le cylindre

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2 \quad (\text{II.61})$$

en calculant les constantes d'intégration la distribution de la température dans le cylindre est

$$\frac{T(r) - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_e}{r_i}} \quad (\text{II.62})$$

Le flux de chaleur traversant le cylindre est donc

$$Q = -2\pi\lambda rL \frac{dT(r)}{dr} \quad (\text{II.63})$$

En dérivant l'expression de la température et en insérant son expression dans l'équation du flux on trouve

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r_e}{r_i}} \quad (\text{II.64})$$



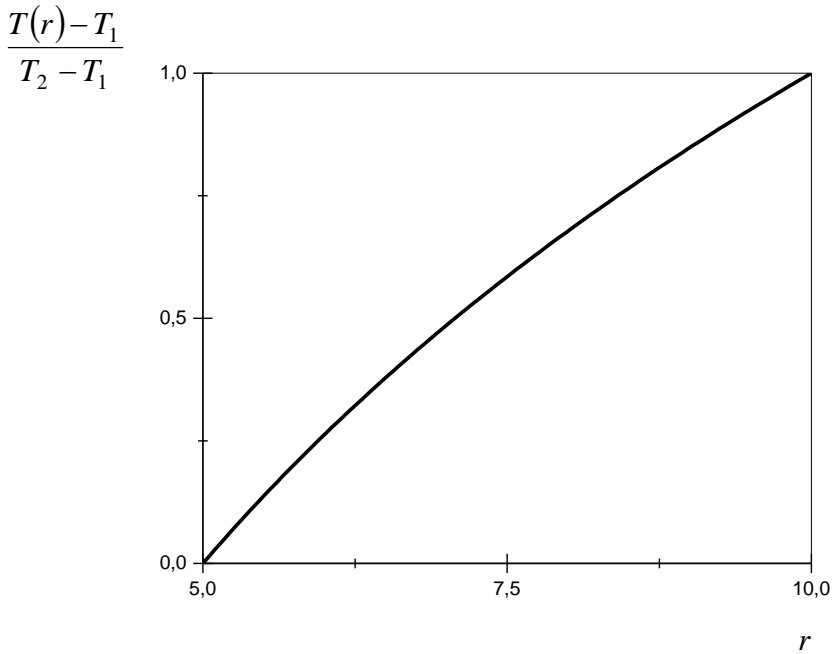


Figure II. 6. Profil de température dans un cylindre creux.

### II. 5. 3. Sphère creuse

Soit une sphère creuse de rayon interne  $r_i$ , de rayon externe  $r_e$  et constitué d'un matériau de conductivité thermique  $\lambda$ . Soient  $T_1$  et  $T_2$  les températures des parois interne et externe de la sphère respectivement.

L'équation de Laplace est

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \quad (\text{II.65})$$

Comme la conduction de chaleur est radiale, donc la température n'est fonction que du rayon  $r$ , l'équation de Laplace se réduit à l'équation différentielle suivante

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT(r)}{dr} \right) = 0 \quad (\text{II.66})$$

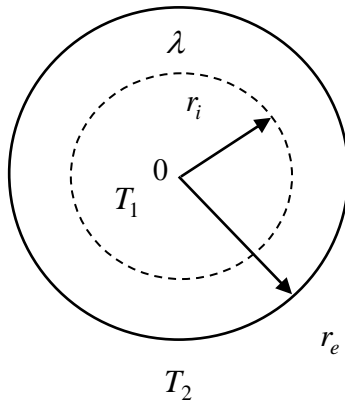


Figure II. 7. Conduction de chaleur dans une sphère creuse.

Les conditions aux limites sont

$$T(r_i) = T_1 \quad (\text{II.67})$$

$$T(r_e) = T_2 \quad (\text{II.68})$$

une première intégration nous donne

$$r^2 \frac{dT(r)}{dr} = C_1 \quad (\text{II.69})$$

d'où

$$\frac{dT(r)}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \quad (\text{II.70})$$

en intégrant une deuxième fois, nous trouvons la distribution de température

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2 \quad (\text{II.71})$$

en calculant les constantes d'intégration, la température à travers la sphère devient

$$\frac{T(r) - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_i}}{\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_i}} \quad (\text{II.72})$$

Le flux de chaleur traversant la sphère

$$Q = -4\pi\lambda r^2 \frac{dT(r)}{dr} \quad (\text{II.73})$$

en dérivant l'expression de la température et en insérant son expression dans l'équation du flux nous obtenons

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{r_e - r_i}{4\pi\lambda r_e r_i}} \quad (\text{II.74})$$

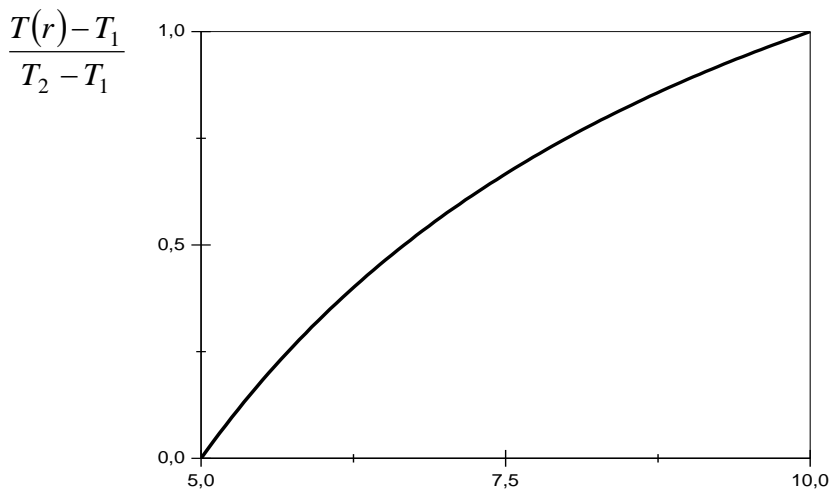


Figure II. 8. Profil de température dans une sphère creuse.

**II. 6. Conduction de chaleur dans le cas de géométries simples en régime permanent et avec sources de chaleur internes**

**II. 6. 1. Mur plan**

Considérons un mur plan de conductivité thermique  $\lambda$  et d'épaisseur  $L$  dans la direction  $Ox$  et infini dans les deux autres directions où il y a une source de chaleur interne constante  $q_s$ .

Pour trouver la distribution de température dans ce mur, il faut alors résoudre l'équation de Poisson à savoir

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} + \frac{q_s}{\lambda} = 0 \tag{II.75}$$

avec les conditions aux limites  $r$

$$T(0) = T_1 \tag{II.76}$$

$$T(L) = T_2 \tag{II.77}$$

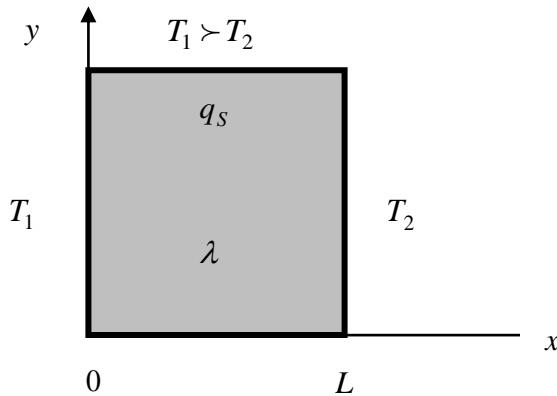


Figure II. 9. Conduction de chaleur dans un mur plan.

La solution générale de l'équation différentielle II. 75 est

$$T(x) = -\frac{q_s}{2\lambda}x^2 + C_1x + C_2 \quad (\text{II.78})$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes d'intégration à déterminer à partir des conditions aux limites.

Les conditions aux limites fournissent les relations suivantes pour  $C_1$  et  $C_2$

$$T_1 = -\frac{q_s}{2\lambda} \times 0^2 + C_1 \times 0 + C_2 \quad (\text{II.79})$$

$$T_2 = -\frac{q_s}{2\lambda}L^2 + C_1L + C_2 \quad (\text{II.80})$$

d'où

$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{q_s}{2\lambda}L \quad (\text{II.81})$$

$$C_2 = T_1 \quad (\text{II.82})$$

en remplaçant les constantes d'intégration dans l'équation II. 78, nous trouvons la distribution de la température dans le mur

$$T(x) - T_1 = \frac{q_s L^2}{2\lambda} \left( \frac{x}{L} - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right) + (T_2 - T_1) \frac{x}{L} \quad (\text{II.83})$$

Si nous supposons que les deux températures  $T_1$  et  $T_2$  sont égales à  $T_0$ , alors la distribution de la température au sein du mur devient

$$T(x) - T_0 = \frac{q_s L^2}{2\lambda} \left( \frac{x}{L} - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right) \quad (\text{II.84})$$

Cherchons la position où la température est maximale dans le mur, pour cela calculons la dérivée de l'équation II. 84, soit

$$\frac{dT(x)}{dx} = \frac{q_S L^2}{2\lambda} \left( \frac{1}{L} - \frac{2x}{L^2} \right) \quad (\text{II.85})$$

la température est maximale si

$$\frac{dT(x)}{dx} = 0 \quad (\text{II.86})$$

c'est-à-dire pour

$$x = \frac{L}{2} \quad (\text{II.87})$$

et de là, la température maximale est

$$T_{\max} = \frac{q_S L^2}{8\lambda} + T_0 \quad (\text{II.88})$$

### II. 6. 2. Cylindre plein

Soit un cylindre plein creux de rayon externe  $r_e$ , de longueur  $L$  et constitué d'un matériau de conductivité thermique  $\lambda$  et siège d'une génération de chaleur constante  $q_S$ .

Dans ce cas l'équation de Poisson s'écrit

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{q_S}{\lambda} = 0 \quad (\text{II.89})$$

en multiplions par  $r$  les deux membres de l'équation et nous obtenons

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = - \frac{q_S r}{\lambda} \quad (\text{II.90})$$

Une première intégration conduit à l'expression

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{q_s}{2\lambda} r^2 + C_1 \quad (\text{II.91})$$

en intégrant encore une fois, nous trouvons la distribution de la température, à savoir

$$T(r) = -\frac{q_s}{4\lambda} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (\text{II.92})$$

les constantes d'intégration sont obtenues à partir des conditions aux limites suivantes

$$T(r_e) = T_0 \quad (\text{II.93})$$

$$\frac{dT(0)}{dr} = 0 \quad (\text{II.94})$$

d'où

$$C_1 = 0 \quad (\text{II.95})$$

$$C_2 = \frac{q_s}{4\lambda} r_e^2 + T_0 \quad (\text{II.96})$$

à partir de ces valeurs, la température devient

$$T(r) - T_0 = \frac{q_s r_e^2}{4\lambda} \left( 1 - \left( \frac{r}{r_e} \right)^2 \right) \quad (\text{II.97})$$

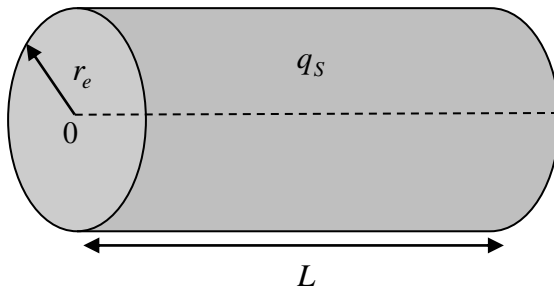


Figure II. 10. Cylindre plein siège de génération de chaleur.

### II. 7. Analogie entre le transfert de chaleur et l'électricité

En électricité la différence de potentiel  $V_2 - V_1$  aux bornes d'une résistance électrique  $R$  est proportionnelle au courant électrique  $I$  qui la traverse, c'est la loi d'Ohm

$$I = \frac{V_2 - V_1}{R} \quad (\text{II.98})$$

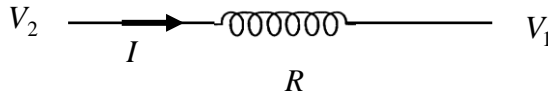


Figure II. 11. Illustration de la loi d'Ohm.

en reprenant l'équation

$$Q = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{L}{\lambda S}} \quad (\text{II.99})$$

et si nous faisons une comparaison entre cette équation et la loi d'Ohm, nous pouvons faire correspondre la quantité de chaleur  $Q$  au courant électrique  $I$  et la différence de température  $T_1 - T_2$  à la différence de potentiel  $V_1 - V_2$ . Ainsi, à partir de la relation II. 99, nous obtenons une analogie électrique du transfert de chaleur par conduction, en définissant une résistance thermique  $R$  définie par

$$Q = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{L}{\lambda S}} = \frac{(T_1 - T_2)}{R} \quad (\text{II.100})$$

soit

$$R = \frac{L}{\lambda S} \quad (\text{II.101})$$

De la même façon, nous définissons la résistance thermique pour le cylindre par la relation



$$R = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r_e}{r_i} \quad (\text{II.102})$$

et pour la sphère par la relation

$$R = \frac{r_e - r_i}{4\pi\lambda r_e r_i} \quad (\text{II.103})$$

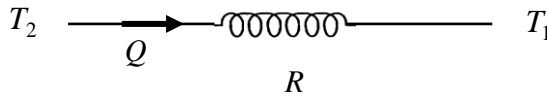


Figure II. 12. Circuit thermique analogique à la loi d'Ohm.

### II. 8. Murs plans en série

Dans beaucoup de cas pratiques, un mur plan peut être constitué de plusieurs couches différentes montées en série. Cette situation est représentée sur la figure 6.

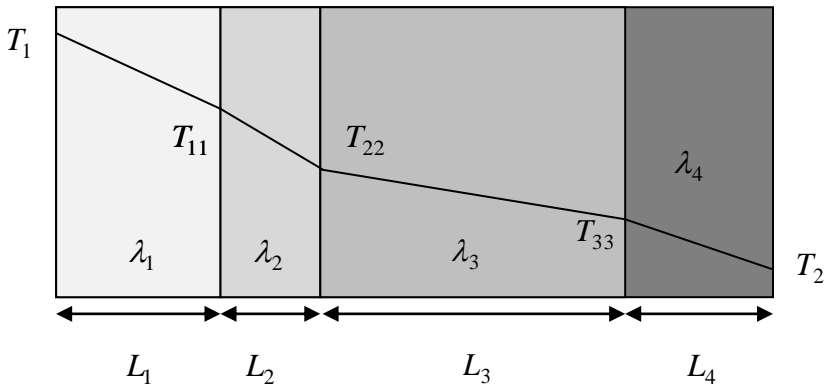


Figure II. 13. Mur plan formé de plusieurs couches en série.

La quantité de chaleur traversant la première couche est

$$Q = \frac{T_1 - T_{11}}{R_1} \quad (\text{II.104})$$

la même quantité de chaleur traverse aussi la deuxième couche, la troisième couche et ainsi de suite. Donc en réécrivant l'équation II. 104 pour les autres couches, nous trouvons

$$Q = \frac{T_1 - T_{11}}{R_1} = \frac{T_{11} - T_{22}}{R_2} = \frac{T_{22} - T_{33}}{R_3} = \frac{T_{33} - T_2}{R_4} \quad (\text{II.105})$$

cette relation peut être écrite sous la forme

$$Q = \frac{T_1 - T_{11} + T_{11} - T_{22} + T_{22} - T_{33} + T_{33} - T_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{T_1 - T_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

Par conséquent, la quantité de chaleur traversant les couches en série est

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{éq}}} \quad (\text{II.106})$$

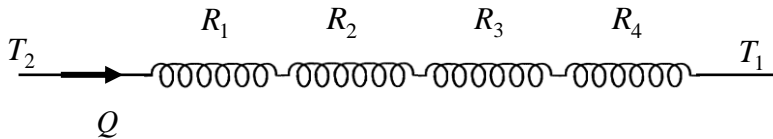


Figure II. 14. Circuit thermique analogique pour un mur composé en série.

où la résistance thermique équivalente est définie par la relation

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (\text{II.107})$$

ou bien

$$R_{eq} = \sum_{n=1}^{n=N} \frac{L_n}{\lambda_n S} \quad (\text{II.108})$$

### II. 9. Murs plans en série-parallèle

Contrairement au premier cas où le mur est constitué de plusieurs couches en série, le mur plan peut être aussi constitué de plusieurs couches mais disposés en parallèle comme le montre la figure 8.

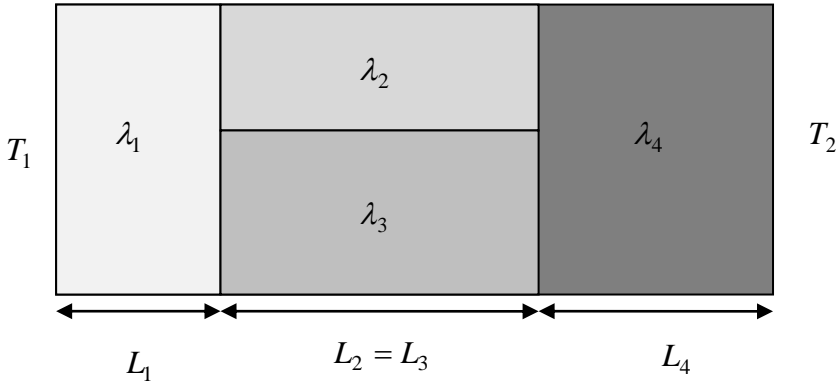


Figure II. 15. Mur plan formé de plusieurs couches en série-parallèle.

dans ce cas, la résistance thermique équivalente est donnée par l'expression

$$R_{eq} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_4 \quad (\text{II.109})$$

où

$$R_1 = \frac{L_1}{\lambda_1 S_1}, \quad R_2 = \frac{L_2}{\lambda_2 S_2}, \quad R_3 = \frac{L_2}{\lambda_3 S_3}, \quad R_4 = \frac{L_4}{\lambda_4 S_4} \quad (\text{II.110})$$

Il faut tenir compte dans le calcul des résistances individuelles de chaque couche de la surface à travers laquelle se font le transfert de chaleur, c'est-à-dire la surface qui est perpendiculaire au flux de chaleur.

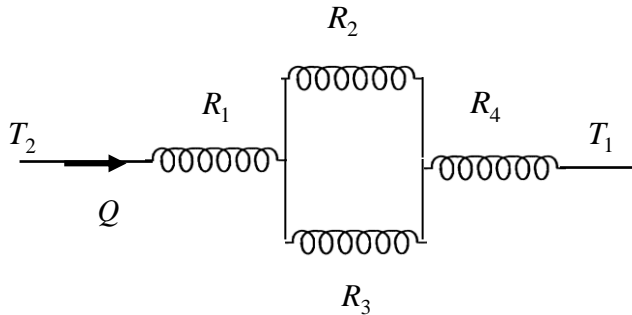


Figure II. 16. Circuit thermique analogique pour un mur composé en série-parallel.

### II. 10. Mécanismes combinés de transfert de chaleur

Dans ce cas de figure, il y a trois modes de transfert de chaleur. Un mode de transfert de chaleur par convection entre les parois et le fluide ambiant, un mode de transfert par rayonnement entre les parois et le fluide ambiant et le troisième mode par conduction à travers la couche solide. Notons par  $T_\infty$ ,  $T_\infty'$  les températures du fluide ambiant et par  $T_1$  et  $T_2$  les températures des parois de la couche solide.

Supposons que le transfert de chaleur se fait de gauche à la droite ( $T_\infty > T_\infty'$ ), la quantité de chaleur échangée par convection est

$$Q_{conv1} = h_1 S (T_\infty - T_1) \quad (\text{II.111})$$

en termes de la résistance thermique, on a

$$Q_{conv1} = \frac{T_\infty - T_1}{R_{conv1}} \quad (\text{II.112})$$

où la résistance thermique de convection est définie par la relation

$$R_{conv1} = \frac{1}{h_1 S} \quad (\text{II.113})$$

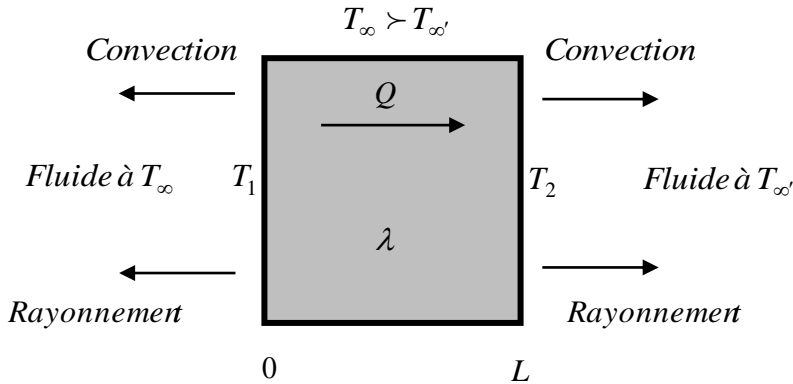


Figure II. 17. Mécanisme combiné du transfert de chaleur.

La chaleur échangée par rayonnement est

$$Q_{rayo1} = \varepsilon_1 \sigma S (T_\infty^4 - T_1^4) \quad (\text{II.114})$$

cette peut s'écrire en termes de résistance thermique de rayonnement sous la forme

$$q_{rayo1} = \frac{T_\infty - T_1}{R_{rayo1}} \quad (\text{II.115})$$

$$R_{rayo1} = \frac{T_\infty - T_1}{\varepsilon_1 \sigma S (T_\infty^4 - T_1^4)} \quad (\text{II.116})$$

la chaleur échangée par conduction est

$$Q_{cond} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{L}{\lambda S}} \quad (\text{II.117})$$

la résistance thermique de conduction est par conséquent

$$R_{cond} = \frac{L}{\lambda S} \quad (\text{II.118})$$

Comme à droite nous avons un échange de chaleur par convection et par rayonnement, nous pouvons écrire aussi que

$$Q_{conv2} = h_2 S (T_2 - T_{\infty'}) \quad (\text{II.119})$$

$$R_{conv2} = \frac{1}{h_2 S} \quad (\text{II.120})$$

de même pour la chaleur échangée par rayonnement, on a

$$q_{rayo2} = \varepsilon_2 \sigma S (T_2^4 - T_{\infty'}^4) \quad (\text{II.121})$$

où la résistance thermique par rayonnement est

$$R_{rayo2} = \frac{T_2 - T_{\infty'}}{\varepsilon_2 \sigma S (T_2^4 - T_{\infty'}^4)} \quad (\text{II.122})$$

en combinant ces formules, la chaleur échangée est

$$Q = \frac{T_{\infty} - T_{\infty'}}{R_{eq}} = \frac{T_{\infty} - T_{\infty'}}{\frac{R_{conv1} R_{rayo1}}{R_{conv1} + R_{rayo1}} + R_{cond} + \frac{R_{conv2} R_{rayo2}}{R_{conv2} + R_{rayo2}}} \quad (\text{II.123})$$

Il est souvent utile de définir le coefficient global d'échange  $U$  par l'équation

$$Q = US(T_{\infty} - T_{\infty}') \quad (\text{II.124})$$

en comparant les équations II. 123 et II. 124, le coefficient global d'échange par rapport à la surface  $S$  est donc

$$US = \frac{1}{\frac{R_{conv1}R_{rayo1}}{R_{conv1} + R_{rayo1}} + R_{cond} + \frac{R_{conv2}R_{rayo2}}{R_{conv2} + R_{rayo2}}} \quad (\text{II.125})$$

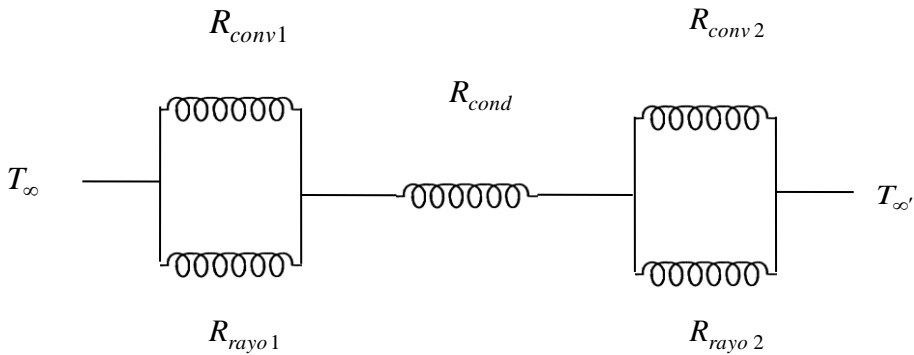


Figure II. 18. Schéma électrique équivalent.

### II. 11. Épaisseur critique d'isolation thermique d'une conduite

Nous savons que lorsque nous ajoutons à un mur nous augmentons la résistance thermique et par conséquent nous diminuons la quantité de chaleur échangée. Cela est naturel, comme la surface d'échange d'un mur est constante, l'ajout de l'isolant augmente toujours la résistance thermique du mur sans croître la résistance thermique par convection. Cependant, dans le cas d'un cylindre, les choses sont très différentes. L'ajout d'un isolant sur un cylindre augmente la résistance thermique par conduction et au même temps diminue la résistance thermique par convection. Par conséquent, la quantité de chaleur échangée peut augmenter ou diminuer selon le quel des deux effets est dominant.

Considérons une conduite de forme cylindrique de rayon interne  $r_i$  et de rayon externe  $r_e$ . On couvre cette conduite d'un isolant thermique d'épaisseur  $e$  et de conductivité thermique  $\lambda_{isol}$ .

Admettons que la température de la paroi interne de la conduite est à la température  $T_0$  et que le fluide ambiant est à la température  $T_\infty$ . Si on note par  $h$  le coefficient d'échange convectif entre la surface externe de la conduite et le fluide ambiant, la résistance thermique par convection est donc

$$R_{conv} = \frac{1}{2\pi(r_e + e)Lh} \quad (\text{II.126})$$

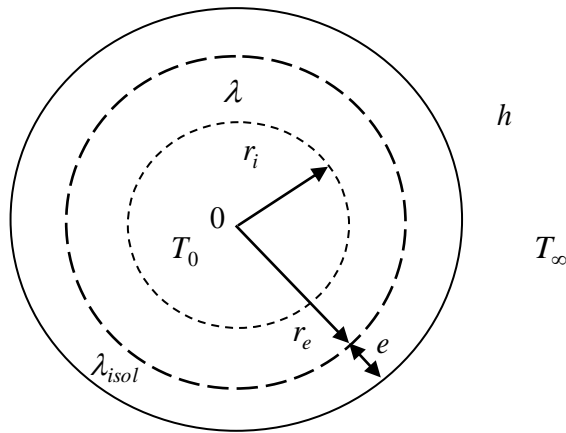


Figure II. 19. Epaisseur critique d'isolation d'une conduite cylindrique.

Les résistances thermiques par conduction de la paroi de la conduite et de la couche de l'isolant thermique sont

$$R_{cond1} = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r_e}{r_i} \quad (\text{II.127})$$



$$R_{cond2} = \frac{1}{2\pi\lambda_{isol}L} \ln \frac{r_e + e}{r_e} \quad (\text{II.128})$$

la quantité de chaleur échangée est par conséquent

$$Q = \frac{T_0 - T_\infty}{R_{conv} + R_{cond1} + R_{cond2}} \quad (\text{II.129})$$

en termes des rayons de la conduite cette quantité de chaleur est

$$Q = \frac{T_0 - T_\infty}{\frac{1}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r_e}{r_i} + \frac{1}{2\pi\lambda_{isol}L} \ln \frac{r_e + e}{r_e} + \frac{1}{2\pi(r_e + e)Lh}} \quad (\text{II.130})$$

la résistance thermique équivalente est

$$R_e = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r_e}{r_i} + \frac{1}{2\pi\lambda_{isol}L} \ln \frac{r_e + e}{r_e} + \frac{1}{2\pi(r_e + e)Lh} \quad (\text{II.131})$$

Cherchons l'extremum de cette expression, en calculant la dérivée par rapport à l'épaisseur de l'isolant thermique, cette extremum se détermine à parti de la relation

$$\frac{dR_e}{de} = 0 \quad (\text{II.132})$$

soit

$$\frac{dR_e}{de} = \frac{1}{2\pi\lambda_{isol}L} \left[ \frac{\frac{1}{r_e}}{\frac{r_e + e}{r_e}} \right] - \frac{2\pi Lh}{(2\pi(r_e + e)Lh)^2} \quad (\text{II.133})$$

ou bien

$$\frac{dR_e}{de} = \frac{1}{2\pi\lambda_{isol}L(r_e + e)} - \frac{2\pi Lh}{(2\pi(r_e + e)Lh)^2} = 0 \quad (\text{II.134})$$

c'est à dire

$$\frac{1}{2\pi\lambda_{isol}L(r_e + e)} = \frac{2\pi Lh}{4\pi^2(r_e + e)^2 L^2 h^2} \quad (\text{II.135})$$

d'où

$$r_e + e_c = \frac{\lambda_{isol}}{h} \quad (\text{II.136})$$

ici  $e_c$  est l'épaisseur critique d'isolation. Remarquons que cette épaisseur critique dépend de la conductivité thermique de l'isolant utilisé et du coefficient de transfert convectif. Nous avons représenté sur les figures II. 20 (a) et II. 20 (b) les variations de la résistance thermique équivalente et de la quantité de chaleur échangée en fonction de l'épaisseur.

Nous remarquons que pour une épaisseur  $e$  inférieure à l'épaisseur critique  $e_c$ , la résistance thermique diminue et par conséquent la quantité de chaleur échangée augmente. La résistance thermique est minimale pour  $e = e_c$  et par conséquent la quantité de chaleur atteinte sont maximum pour cette épaisseur. Au-delà de cette épaisseur critique, l'ajout de l'isolant fait croître la résistance thermique et cela entraîne une diminution inéluctable de la quantité de chaleur échangée. Ainsi, lors de l'isolation des conduites ou des réservoirs, il faut impérativement s'assurer que l'épaisseur de l'isolant utilisé est supérieure à l'épaisseur critique.

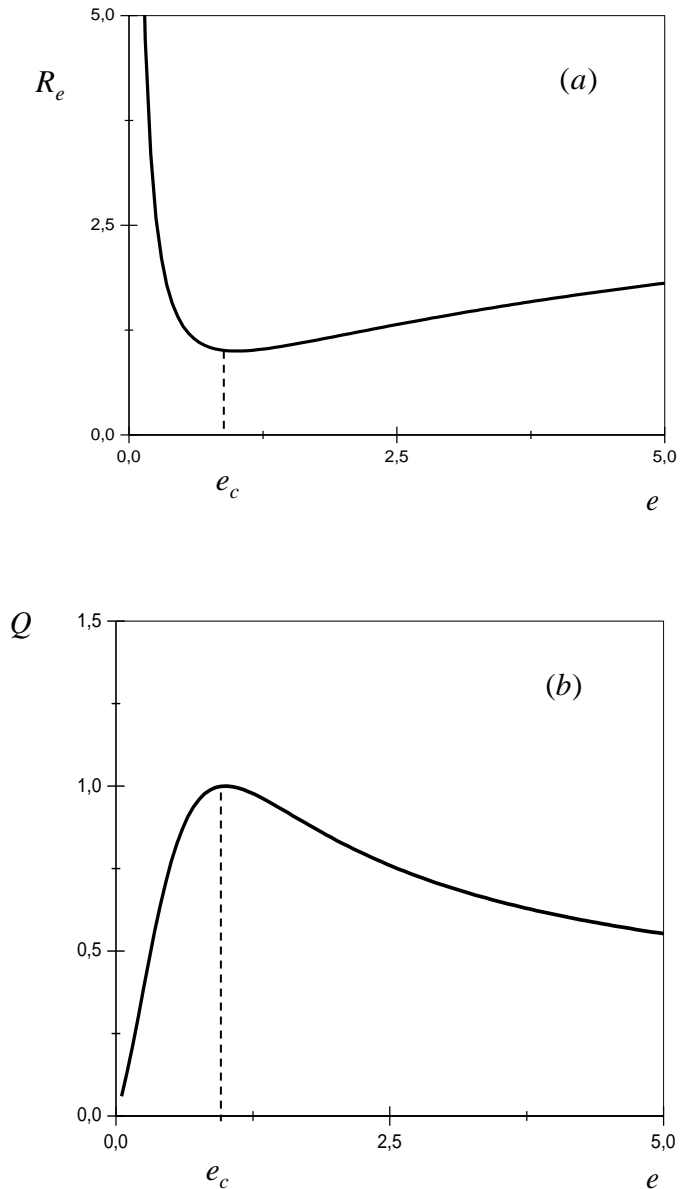


Figure II. 20. Variation de la résistance thermique et de la quantité de chaleur en fonction de l'épaisseur de l'isolant.

## II. 12. Ailettes

Les ailettes sont de petites surfaces attachées à un corps baigné par un fluide. Le but des ailettes est d'augmenter la dissipation de chaleur du corps vers le fluide.

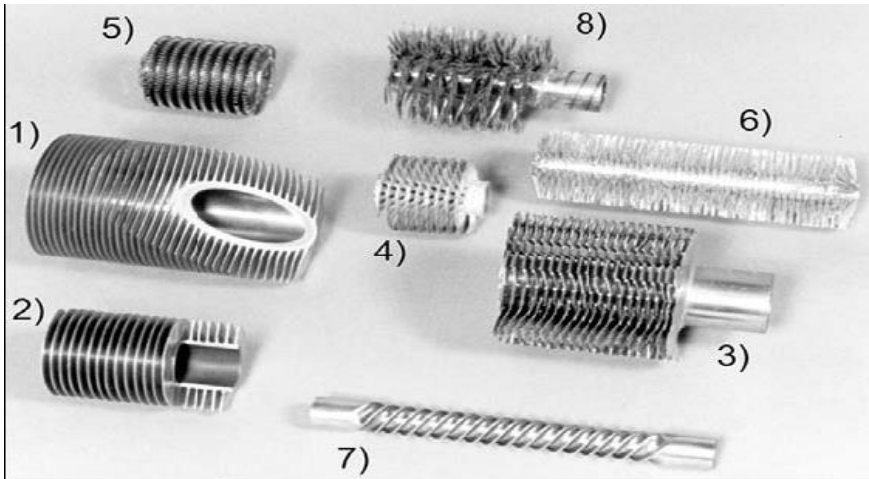


Figure II. 21. Exemples d'ailettes.

Pour cela considérons un élément infinitésimal d'une ailette de surface de section  $S_S(x)$  de d'épaisseur  $dx$  et de surface latérale  $dS_L(x)$  baignant dans fluide de température  $T_\infty$ .  
Ecrivons un bilan d'énergie pour cet élément infinitésimal

$$Q_x = Q_{x+dx} + dQ_{conv} \quad (\text{II.137})$$

à partir de la loi de Fourier, nous avons

$$Q_x = -\lambda S_S(x) \frac{dT(x)}{dx} \quad (\text{II.138})$$

la quantité de chaleur au point  $x + dx$  est

$$Q_{x+dx} = Q_x + \frac{dQ_x}{dx} dx \quad (\text{II.139})$$

en utilisons l'équation II. 137, nous trouvons

$$Q_{x+dx} = -\lambda S_S(x) \frac{dT(x)}{dx} - \lambda \frac{d}{dx} \left( S_S(x) \frac{dT(x)}{dx} \right) dx \quad (\text{II.140})$$

la quantité de chaleur échangée par convection entre l'élément de l'ailette est le fluide est

$$dQ_{conv} = h(T(x) - T_\infty) dS_L(x) \quad (\text{II.141})$$

En substituant les relations II. 140 et II. 141 dans le bilan d'énergie, nous arrivons à l'équation

$$\begin{aligned} -\lambda S_S(x) \frac{dT(x)}{dx} &= -\lambda S_S(x) \frac{dT(x)}{dx} - \lambda \frac{d}{dx} \left( S_S(x) \frac{dT(x)}{dx} \right) dx \\ &+ h(T(x) - T_\infty) dS_L(x) \end{aligned} \quad (\text{II.142})$$

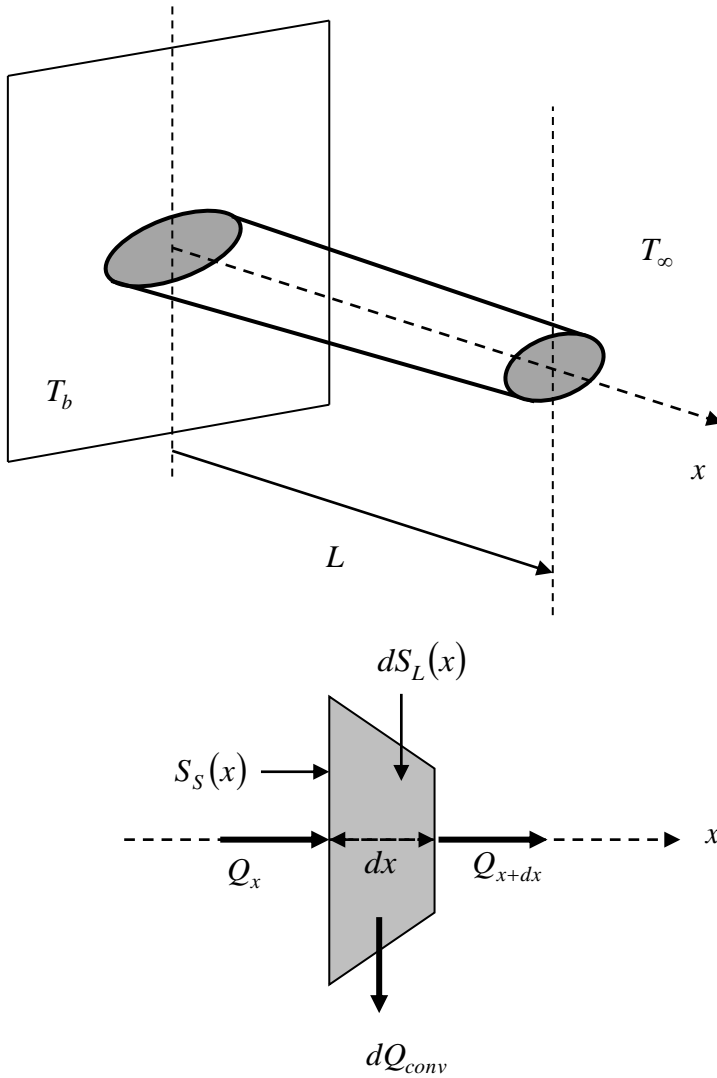


Figure II. 22. Illustration des transferts de chaleur dans une ailette.

soit

$$\frac{d}{dx} \left( S_S(x) \frac{dT(x)}{dx} \right) - \frac{h}{\lambda} (T(x) - T_\infty) \frac{dS_L(x)}{dx} = 0 \quad (\text{II.143})$$

ou bien

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} + \left( \frac{1}{S_S(x)} \frac{dS_S(x)}{dx} \right) \frac{dT(x)}{dx} - \left( \frac{1}{S_S(x)} \frac{h}{\lambda} \frac{dS_L(x)}{dx} \right) (T(x) - T_\infty) = 0 \quad (\text{II.144})$$

C'est l'équation générale d'une ailette. Sa solution pour des conditions aux limites appropriées fournit la distribution de la température dans l'ailette et par conséquent la quantité de chaleur que l'ailette échange avec le fluide qui l'entoure.

### II. 12. 1. Ailettes de section uniforme

Commençons par le cas d'une ailette droite et rectangulaire de section uniforme  $S$ . L'ailette est fixé à sa base à une surface de température constante  $T_b$  et se prolonge dans milieu fluide de température constante  $T_\infty$ .

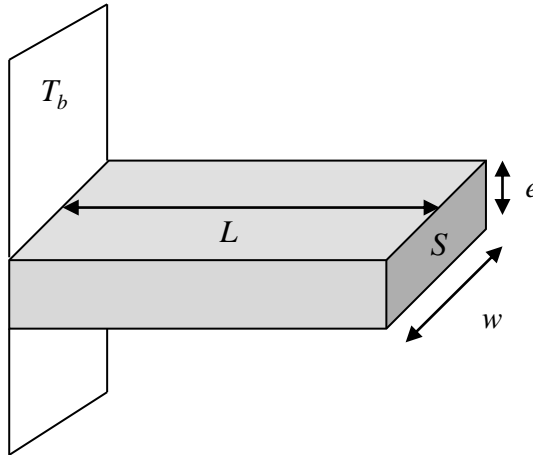


Figure II. 23. Ailette de section uniforme.

dans ce cas, les surfaces  $S_S(x)$  et  $S_L(x)$  sont

$$S_S(x) = S \quad (\text{II.145})$$

$$S_L(x) = Px \quad (\text{II.146})$$

où  $P$  est le périmètre de la section de l'ailette, par conséquent

$$\frac{dS_s(x)}{dx} = 0 \quad (\text{II.147})$$

$$\frac{dS_L(x)}{dx} = P \quad (\text{II.148})$$

en substituant ces expressions dans l'équation générale de l'ailette, nous obtenons l'équation

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - m^2(T(x) - T_\infty) = 0 \quad (\text{II.149})$$

où  $m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda S}}$  est un paramètre constant.

Physiquement, les conditions aux limites pour ce type de problème sont

- a) La température de la base de l'ailette est la température de surface du corps au quelle est attachée cette ailette, cela nous donne la première condition aux limites

$$T(0) = T_b \quad (\text{II.150})$$

- b) Pour la deuxième condition aux limites, il peut y avoir trois possibilités qui sont

- 1) L'ailette est très longue, dans ce cas, la température de l'ailette devient égale à la température du fluide

$$T(\infty) = T_\infty \quad (\text{II.151})$$

- 2) Le bout de l'ailette peut être thermiquement isolé c'est-à-dire que

$$\left. \frac{dT(x)}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (\text{II.152})$$



- 3) Si l'ailette n'est pas isolée au bout elle échange alors de la chaleur avec le fluide qui la baigne dans ce cas, on a la condition suivante sur la température

$$-\lambda \left. \frac{dT(x)}{dx} \right|_{x=L} = h(T(L) - T_\infty) \quad (\text{II.153})$$

La solution de l'équation II. 149 est

$$T(x) - T_\infty = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (\text{II.154})$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes d'intégration qui sont déterminées à partir des conditions aux limites. En utilisant les conditions aux limites pour les différentes configurations thermiques citées plus haut.

- 1) Ailette très longue

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = e^{-mx} \quad (\text{II.155})$$

- 2) Ailette isolée au bout

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\cosh m(L - x)}{\cosh mL} \quad (\text{II.156})$$

- 3) Ailette échange de la chaleur par convection avec le fluide qui la baigne

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\cosh m(L - x) + \frac{h}{m\lambda} \sinh m(L - x)}{\cosh mL + \frac{h}{m\lambda} \sinh mL} \quad (\text{II.157})$$

La quantité de chaleur échangée par l'ailette se calcule de deux façons différentes, soit à partir de la loi de Fourier appliquée à la base de l'ailette

$$Q_a = -\lambda S \left( \frac{dT(x)}{dx} \right)_{x=0} \quad (\text{II.158})$$

soit à partir de la chaleur évacuée par convection vers le fluide à travers la surface latérale de l'ailette

$$Q_a = hP \int_0^L (T(x) - T_\infty) dx \quad (\text{II.159})$$

Calculons pour chaque cas la quantité de chaleur évacuée par l'ailette en utilisant la loi de Fourier pour raison de simplicité.

Pour une ailette très longue la quantité de chaleur évacuée est

$$Q_a = \sqrt{\lambda h S P} (T_b - T_\infty) \quad (\text{II.160})$$

Pour une ailette isolée au bout, la quantité de chaleur évacuée est

$$Q_a = \sqrt{\lambda h S P} (T_b - T_\infty) \tanh mL \quad (\text{II.161})$$

Pour le cas où il y a un échange convectif entre le bout de l'ailette et le milieu ambiant, la quantité de chaleur évacuée est

$$Q_a = \sqrt{\lambda h S P} (T_b - T_\infty) \frac{\sinh mL + \frac{h}{m\lambda} \cosh mL}{\cosh mL + \frac{h}{m\lambda} \sinh mL} \quad (\text{II.162})$$

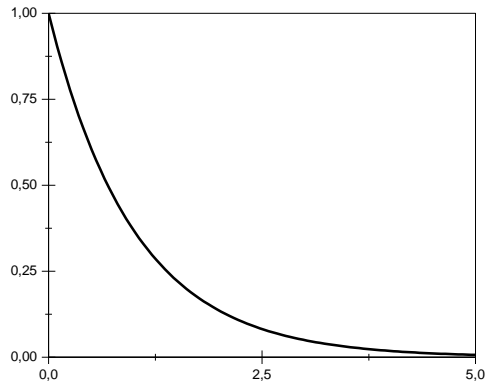


Figure II. 24. Profil de température pour une ailette très longue.

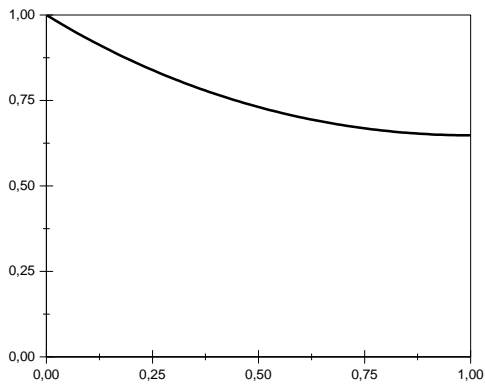


Figure II. 25. Profil de température pour une ailette isolée au bout.

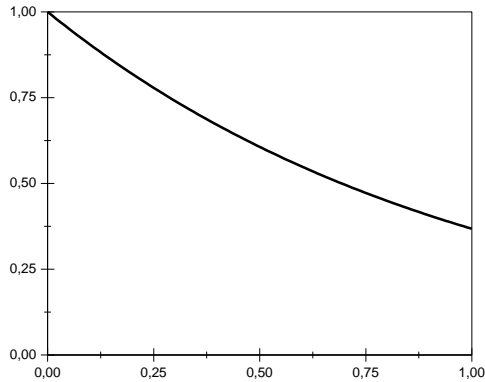


Figure II. 26. Profil de température pour une ailette échangeant de la chaleur avec le milieu ambiant par convection.

### II. 12. 2. Rendement de l'ailette

Pour caractériser les ailettes, on définit le rendement  $\eta_a$  par le rapport de la chaleur effectivement évacuée par l'ailette sur la chaleur maximale évacuée par l'ailette si sa température est égale à la température de sa base  $T_b$ . La quantité de chaleur maximale évacuée par l'ailette est donc

$$Q_{\max} = hPL(T_b - T_{\infty}) \quad (\text{II.163})$$

le rendement  $\eta_a$  de l'ailette ainsi est donné par l'expression

$$\eta_a = \frac{Q_a}{Q_{\max}} = \frac{-\lambda S \left( \frac{dT(x)}{dx} \right)_{x=0}}{hPL(T_b - T_{\infty})} \quad (\text{II.164})$$

En combinant les équations II. 160, II. 161 et II. 162 avec l'équation II. 164, nous obtenons pour les cas étudiées, les expressions suivantes pour les rendements

a) Ailette très longue

$$\eta_a = \frac{1}{mL} \quad (\text{II.165})$$

b) Ailette isolée au bout

$$\eta_a = \frac{\tanh mL}{mL} \quad (\text{II.166})$$

c) Ailette échange de la chaleur par convection avec le fluide qui la baigne

$$\eta_a = \frac{1}{mL} \frac{\sinh mL + \frac{h}{m\lambda} \cosh mL}{\cosh mL + \frac{h}{m\lambda} \sinh mL} \quad (\text{II.167})$$

### II. 12. 3. Efficacité d'une ailette

Les ailettes sont utilisées pour augmenter le transfert de chaleur, et l'ajout des ailettes sur une surface pour renforcer le transfert de chaleur doit impérativement justifier le coût et la complexité associée à cette opération. Il n' a aucune garantie que l'ajout des ailettes augmente le transfert de chaleur. L'efficacité de l'ailette est basée sur l'augmentation du transfert de chaleur par rapport à celui échangé par une surface sans ailette. L'efficacité  $\varepsilon_a$  d'une ailette est définie par la relation

$$\varepsilon_a = \frac{Q_a}{Q_{\text{sans ailette}}} = \frac{Q_a}{hS_b(T_b - T_\infty)} \quad (\text{II.168})$$

Notons que le rendement  $\eta_a$  de l'ailette et son efficacité  $\varepsilon_a$  sont intimement liées. En effet, nous avons

$$\varepsilon_a = \frac{\eta_a h S_a (T_b - T_\infty)}{h S_b (T_b - T_\infty)} \quad (\text{II.169})$$

soit

$$\varepsilon_a = \eta_a \frac{S_a}{S_b} \quad (\text{II.170})$$

ainsi l'efficacité  $\varepsilon_a$  peut être déterminée à partir du rendement  $\eta_a$  de l'ailette et vice-versa.

Pour une ailette très longue et de section uniforme, et puisque  $S = S_b$ , l'efficacité  $\varepsilon_a$  s'écrit

$$\varepsilon_a = \frac{\sqrt{\lambda h S P} (T_b - T_\infty)}{h S_b (T_b - T_\infty)} = \sqrt{\frac{\lambda P}{h S}} \quad (\text{II.171})$$

A partir de cette relation nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

- a) La conductivité thermique doit être aussi grande que possible. C'est pour cette raison que les ailettes sont constituées d'aluminium, un matériau de grande conductivité thermique et doté d'une légèreté exceptionnelle et d'une résistance à la corrosion comparé à d'autres matériaux.
- b) Le rapport  $\frac{P}{S}$  doit être aussi grand que possible. Ce critère est satisfait par des ailettes fines.
- c) L'utilisation des ailettes est d'autant plus efficace quand le coefficient d'échange convectif est faible. Cette situation est rencontrée quand le milieu extérieur est un gaz et que la convection est naturelle.

### II. 12. 3. Rendement d'une surface ailetée

Pour déterminer la quantité de chaleur échangée par une surface ailetée il faut tenir compte de la surface sans ailette  $S_{sa}$  ainsi que de la surface des ailettes  $S_a$ . Dans ce cas la quantité de chaleur échangée par la surface ailetée est

$$Q = Q_{sa} + Q_a \quad (\text{II.172})$$

soit

$$Q = hS_{sa}(T_b - T_\infty) + \eta_a hS_a(T_b - T_\infty) \quad (\text{II.173})$$

ou bien

$$Q = h(S_{sa} + \eta_a S_a)(T_b - T_\infty) \quad (\text{II.174})$$

nous pouvons définir à présent l'efficacité globale  $\eta_g$  pour une surface ailetée par la relation

$$\eta_g = \frac{Q}{Q_b} = \frac{h(S_{sa} + \eta_a S_a)(T_b - T_\infty)}{hS_b(T_b - T_\infty)} \quad (\text{II.175})$$

soit

$$\eta_g = \frac{S_{sa} + \eta_a S_a}{S_b} \quad (\text{II.176})$$