MARTINGALES ET TEMPS D'ARRÊT

Martingales

Définition

Un processus stochastique : $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$martingale si :

i) X est $\mathcal{F}_t$ adapté.

ii) $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty \qquad \forall t \geq 0.$

iii) $\mathbb{E}(X_{t+s}/\mathcal{F}_s) = X_s \ \forall t \geq 0, \forall s \geq 0.$

Définition X_t est une Sous-martingale si i) et ii) sont vérifié et iii) est remplacée par :

iii) $\mathbb{E}(X_{t+s}/\mathcal{F}_s) \geq X_s \ \forall t \geq 0, \forall s \geq 0.$

Définition

X_t est une Sur-martingale si i) et ii) sont vérifié et iii) est remplacée par :

iii) $\mathbb{E}(X_{t+s}/\mathcal{F}_s) \leq X_s \ \forall t \geq 0, \forall s \geq 0.$

Remarque

Une sur martingale et sous martingale à la fois alors c'est une martingale (en abrégée).

Exemple

Soit $y_1, y_2, \cdots$ des v.a. (i.i.d) et intégrables avec $\mathbb{E}(Y_i) = 0, \forall i$ le processus $X_n = \sum_{i=1}^{n} y_i$ est une martingale par rapport à : $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ en effet :

— $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \Rightarrow y_i$ est $\mathcal{F}_i$ mesurable alors y_i sont adaptée donc X_n est $\mathcal{F}_n$ adaptée.

on a y_i sont intégrables $\Rightarrow X_n = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$ est aussi intégrable.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+m}/\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n+m} y_i/\mathcal{F}_n\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n+m} y_i/\mathcal{F}_n\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\mathcal{F}_n\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n+m} y_i/\mathcal{F}_n\right) \\
&= X_n
\end{aligned}$$

$\mathbb{E}(X_{n+m}/\mathcal{F}_n) = X_n \Rightarrow X_n$ est un martingale.

— Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et $Y \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ posons $X_t = \mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_t)$, X_t est une martingale. En effet : $X_t = \mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_t)$ alors d'après la définition d'espérance conditionnelle on X_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable.
$y \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}) \Rightarrow \mathbb{E}(|\mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_t)|) < \infty$
$\mathbb{E}(X_{t+s}/\mathcal{F}_s).\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_{t+s})/\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_s) = X_s$
$\Rightarrow X$ est martingale.

Proposition

Tout martingale et une espérance constante.

Démonstration

Soit $t \geq 0$ on a :$t \geq s$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(t) - X(s)/\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(X(t)/\mathcal{F}_s) - \mathbb{E}(X(s)/\mathcal{F}_s) \\
&= X(s) - X(s) \\
&= 0
\end{aligned}$$

- $\forall h > 0$, telle que $t - h \geq 0$ et X_t est une martingale

$$\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_{t-h}) = X_{t-h}$$

plus générale :

$$\mathbb{E}(X_m/\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_{m\wedge n}$$

Proposition

Si (X_n) est une martingale et f une fonction réelle convexe : tq : $\mathbb{E}(|f(x_n|)) < \infty$ alors $f(x_n)$ est une $\mathcal{F}_n$ sous-martingale.

Démonstration

1) X_n et $\mathcal{F}_n$ mesurable et f est continue alors $f(x_n)$ est $\mathcal{F}_n$ mesurable comme composition.

2) Par hypothèse :

$$\mathbb{E}(|f(x_n)|) < \infty$$

on a :

$$\mathbb{E}(|\phi(x)|/\mathbb{G}) \geq \phi(\mathbb{E}(X)/\mathbb{G})$$

$$\mathbb{E}(f(x_{n+s})/\mathcal{F}_s) \geq f(\mathbb{E}(X_{n+s})/\mathcal{F}_s)$$

$$\mathbb{E}(f(x_{n+s})/\mathcal{F}_s) = f(X_s)$$

$\Rightarrow f(X_n)$ est une sous-martingale.

Exemple

1) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale alors $(|X_n|)_{n\geq 0}$ est une sous martingale.

2) $(X_n^2)_{n\geq 0}$ si X_n^2 est intégrable alors : (X_n^2) est une sous martingale.

3) $(X_n)_{n\geq 0}$ une sous martingale alors $X_n^+ = sup(X_n)$ est une martingale.

Proposition

I) La somme de deux martingales est un martingale.

II) L'ensemble des martingales est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. I) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux martingales

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+s} + Y_{n+s}/\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(X_{n+s}/\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(Y_{n+s}/\mathcal{F}_s) \\
&= X_s + Y_s \\
&= (X + Y)_s
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ la somme est une martingale.

II)1) 0 $\in$martingale car $\mathbb{E}(0/\mathcal{F}_s) = 0$.

2) Martingale stable par rapport à l'addition d'après I)

3) $\lambda \in \mathbb{R}$, X_n est une martingale.

$$\mathbb{E}(\lambda X_{n+s}/\mathcal{F}_s) = \lambda \mathbb{E}(X_{n+s}/\mathcal{F}_s) = \lambda.X_s$$

alors martingale est un s-espace vectoriel.

Proposition (Décomposition de Doob)

Tout sous martingale $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit de façon unique sous la forme $X_n = M_n + A_n$ où $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus croissant et prévisible.$A_0 = 0$.

Preuve

Par hypothèse (X_n) est une sous martingale, A_n prévisible $A_0 = 0$. $A_{n+1} - A_n \geq 0$

$A_{n+1} = X_{n+1} - M_{n+1}$

$A_n = X_n - M_n$

$$\mathbb{E}(A_{n+1} - A_n/\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1} - M_{n+1} - X_n + M_n/\mathcal{F}_n)$$

$$A_{n+1} - A_n = \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n/\mathcal{F}_n) \geq 0$$

$(A_n)_{n\geq 0}$ est croissant. 2) $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

$M_{n+1} = X_{n+1} - A_{n+1}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_{n+1}/\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(X_{n+1} - A_{n+1}/\mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) - A_{n+1} \\
&= \mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n/\mathcal{F}_n) - A_n \\
&= \mathbb{E}(X_{n+1} - X_{n+1} + X_n/\mathcal{F}_n) - A_n \\
&= \mathbb{E}(X_n/\mathcal{F}) - A_n \\
&= X_n - A_n = M_n
\end{aligned}$$

L'intérêt de la décomposition de doob Reside dans le fait que l'étude d'une sous martingale peut souvent ramener à celle d'une martingale.

Unicité

Supposons que :

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux décompositions $X_n = M_n + A_n$ et $X_n = N_n + B_n$

- A_n croissant et prévisible et $A_0 = 0$.

- B_n croissant et prévisible et $B_0 = 0$.

$M_n + A_n = N_n + B_n \Rightarrow M_n - N_n = B_n - A_n$.

$\Rightarrow B_n - A_n$ est une martingale.

$\Rightarrow \mathbb{E}(B_{n+1} - A_{n+1}/\mathcal{F}_n) = B_n - A_n$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_{n+1} - A_{n+1}/\mathcal{F}_n) &= B_{n+1} - A_{n+1} \\ B_n - A_n &= B_{n+1} - A_{n+1} \\ &= B_{n-1} - A_{n-1} \\ &\vdots \\ &= B_0 - A_0 = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coiside.

alors $\Rightarrow (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

$\Rightarrow$ la décomposition est unique.

Lemme

Soient X une $\mathcal{F}_n$ martingale et $(H_n)_{n\geq 1}$ un processus prévisible on pose $M_0 = 0$, pour $n \geq 0$.

$$M_n = H_1(X_1 - X_0) + H_2(X_2 - X_1) + \cdots + H_n(X_n - X_{n-1})$$

alors M_n est une martingale.

Démontration

$\mathbb{E}(M_n/\mathcal{F}_n) = M_n$

$\mathbb{E}(M_{n+1} - M_n/\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(H_{n+1}(X_{n+1} - X_n/\mathcal{F}_n))$

(H_n) est prévisible, X_n est une martingale.

$\mathbb{E}(M_{n+1} - M_n/\mathcal{F}_n) = H_{n+1}\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n/\mathcal{F}_n) = 0$

$\Rightarrow \mathbb{E}(M_{n+1} - M_n/\mathcal{F}_n) = 0$ alors M_n est une martingale.

Temps d'arrêt

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, on a $\mathcal{F}_{infty} = \sigma(\cup_{n\geq 0}\mathcal{F}_n)$. **Définition** Une variable aléatoires $T : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{N}} \cup \infty$ est un $\mathcal{F}_n$ temps d'arrêt si pour tout entier $n \in \mathbb{N} : \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

Remarque

Notons que les deux définitions suivantes sont equivalentes à cette dernière.

1) $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

2) $\mathbb{1}_{T=n}$ est $\mathcal{F}_n$ mesurable $\forall n \in \mathbb{N}$.

Preuve

1)

$$\begin{aligned}
\{T = n\} &= \{T \leq n\} \cap \{T \geq n\} \\
&= \{T \leq n\} \cap \{T < n\}^c \\
&= \{T \leq n\} \cap \{T \geq n-1\}^c
\end{aligned}$$

$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$

$\{T = n\}$ est la même définition.

2) C'est evident car $\{T = n\}$ est $\mathcal{F}_n$ mesurable de la 1ere alors $\mathbb{1}_{T=n}$ $\mathcal{F}_n$ mesurable.

Temps d'entrée

Soit $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus stochastique et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, la variable aléatoire $T_B = inf\{n \in \mathbb{N}, X_n \in B\}$ est un temps d'arrêt adapté à la filtration naturelle i.e. $\forall n \in \mathbb{N}\ \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$.

en effet :

$$\begin{aligned}
T_B &= \{X_1 \notin B\} \cap \{X_2 \notin B\} \cap \{X_3 \notin B\} \cap \cdots \cap \{X_{n-1} \notin B\} \cap \{X_n \notin B\} \\
&= \{X_1 \in B^c\} \cap \{X_2 \in B^c\} \cap \{X_n \in B^c\}
\end{aligned}$$

$T_B \in \mathcal{F}_n$ donc T_B est un $\mathcal{F}_n$ temps d'arrêt.

- **Temps de sortie**

Le temps de sortie S_B telle que $S_B = sup\{n \in \mathbb{N}, X_n \in B\}$ n'est pas un temps d'arrêt.

$$\{S_B = n\} = \{X_1 \in B\} \cap \{X_2 \in B\} \cap \{X_3 \in B\} \cap \{X_n \in B\} \cap \{X_{n+1} \notin B^c\}$$

alors S_B n'est pas un temps d'arrêt.

Propriétés de temps d'arrêt

1) Si T et S sont deux temps d'arrêt alors : $S+T$, $S \wedge T$, $S \wedge T$ sont des temps d'arrêt.

2) Si T est un temps d'arrêt et $k \in \mathbb{N}$ constante alors : $T+k$ est un temps d'arrêt.

3) Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de temps d'arrêt alors $sup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ et $inf_{n\in\mathbb{N}} T_n$ sont des temps d'arrêt.

Définition

Si T est un $\mathcal{F}_n$ temps d'arrêt l'ensemble :

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}, \forall n \in \mathbb{N} : A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$$

est une tribu des élèments anterieur à T.

Définition

Si T est un temps d'arrêt et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus stochastique on appelle processus arrété à l'instant T la suite aléatoire $X_{T\wedge n_{n\in\mathbb{N}}}$

Définition (Processus arrêté au temps T)

Soit X un processus $\mathcal{F}_n$adapté et T un $\mathcal{F}_n$ temps d'arrêt on appelle processus arrête au temps T le processus X^T définit par :

$$X_n^T = X_{n\wedge T} \text{ i.e. } X_n^T(\omega) = X_{n\wedge T(\omega)}(\omega)$$

Lemme

L'application X_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

$$X_T : (\Omega, \mathcal{F}_T) \longmapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

$$X_T^{-1}(B) \cap \{T = n\} = \begin{cases} T = n, T \in \mathcal{F}_t \\ \emptyset, T \notin \mathcal{F}_t \end{cases}$$

$X_T^{-1}(B) \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_t$

alors X_T est $\mathcal{F}_t$ mesurable.

Proposition

Soient T un temps d'arrêt et X une martingale (resp sous martingale sur martingale) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ alors :

$$X^T = (X_{n\wedge T})_{n\geq 0}\text{est une martingale (resp sous martingale sur martingale)}$$

Démonstration

$$X_{n\wedge T} = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{k\leq T}(X_k - X_{k-1})$$

$$k \leq T \Leftrightarrow T > k-1$$

$$X_{n\wedge T} = X_0 + \sum \mathbb{1}_{T>k-1}$$

posons $H_k = \mathbb{1}_{T>k-1}$ étant prévisible, positif donc d'après le lemme précédent $X_{n\wedge T}$ est une martingale (resp sous martingale, sur martingale).

Proposition

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $\mathcal{F}_n$ martingale et un temps d'arrêt T borné par $m \in \mathbb{N}$, $T \leq m$ alors X_T est intégrable de plus $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.

Démonstration

On $T \leq m$ sur Ω, $T \leq m = \mathbb{1}_\Omega$

$$X_T = X_T\mathbf{1}_\Omega = X_T\mathbf{1}_{\bigcup_{k=0}^m T=k} = X_T\sum_{k=0}^{m}\mathbf{1}_{T=k} = \sum_{k=0}^{m} X_T\mathbf{1}_{T=k}$$

$$\Rightarrow X \in L^1(\Omega)$$

Montrons que :

$$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$$

$$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{m} X_T\mathbf{1}_{T=k}\right) = \sum_{k=0}^{m}\mathbb{E}(X_T\mathbf{1}_{T=k}) = \sum_{k=0}^{m}\mathbb{E}(\mathbf{1}_{T=k}\mathbb{E}X_m|\mathcal{F}_k) = \mathbb{E}(X_m\mathbf{1}_{T=k}) = \mathbb{E}(X_m) = \mathbb{E}(X_0)$$

$$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$$

Théorème d'arrêt de Doob

Soit (X_n) une martingale et S et T deux temps d'arrêt telle que : $S \leq T \leq m \in \mathbb{N}$ alors :

$$\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_s) = X_s$$

Démonstration

Soit $A \in \mathcal{F}_s$

$R = S.\mathbb{1}_A + T.\mathbb{1}_{A^c}$

$$R = \begin{cases} S(\omega) \; si \; \omega \in A \\ T(\omega) \; si \; \omega \in A^c \end{cases}$$

R est un temps d'arrêt car il est la somme de deux temps d'arrêt d'après la proposition précédente :

$$\mathbb{E}(X_k) = \mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$$

$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_T.\mathbb{1}_A) + \mathbb{E}(X_T.\mathbb{1}_{A^c})$

$\mathbb{E}(X_R) = \mathbb{E}(X_s.\mathbb{1}_A) + \mathbb{E}(X_s.\mathbb{1}_{A^c})$

$\mathbb{E}(X_T.\mathbb{1}_{A^c}) = \mathbb{E}(X_s) - \mathbb{E}(X_s.\mathbb{1}_{A^c})$

$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_R) \Rightarrow$

$\mathbb{E}(X_T.\mathbb{1}_{A^c}) = \mathbb{E}(X_T) - \mathbb{E}(X_s.\mathbb{1}_A)$

$\mathbb{E}(X_s.\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_T.\mathbb{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}_s$

$\int_A \mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_s) \, d\mathbb{P} = \int_A X_T \, d\mathbb{P} = \int_{X_s} \, d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X_s|\mathcal{F}_s) \, d\mathbb{P}$

$\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_s) = X_s$ p.s.

$\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_s) = X_s$

Inégalités maximales et théorème de convergence

Lorsque l'on étudie processus aléatoire une question importante en pratique est de savoir contrôler son évolution. En particulier il s'avére que pour tout les sous martingales et sur martingales positives, nous pouvons obtenir des inégalités sur son processus supremum à savoir :

$$M_n^* = sup_{0 \leq k \leq n} M_k, \; n \in \mathbb{N}$$

On les appelle inégalités maximales de Doob.

Dans cette partie, nous établisons des inégalités par les sous et les sur martingales positives qui nous serviront comme ingrédient de base dans la démonstration des théorème de convergence.

Théorème : inégalités maximales de Doob

Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous martingale positive alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\mathbb{P}(M_n^* \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(M_n.\mathbb{1}_{M_n^*\geq\lambda})}{\lambda} \leq \frac{\mathbb{E}(M_n)}{\lambda},\ \lambda > 0$$

Par ailleurs, si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a tout ses élèments dans $\mathbb{L}^p$ où $p \geq 1$ alors : pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(M_n^* \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(M_n^p)}{\lambda^p},\ \lambda > 0$$

Enfin, si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sur martingale positive on a :

$$\mathbb{P}(M_\infty^* \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(M_n^p)}{\lambda^p},\ \lambda > 0$$

Démonstration

Etablissons tout d'abord la première inégalité notons que pour une sous martingale $M_k \leq \mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}$.

Ce qui entraine que pour tout $A \in \mathcal{F}_k$ en par ailleurs, on peut écrire l'identité suivant :

$$(M_n^* \geq \lambda) = \{\tau_\lambda \leq n\}, n \in \mathbb{N}$$

où τ_λ est un temps d'arrêt.

$\tau_\lambda = inf n \in \mathbb{N}, M_n \geq \lambda$.

Si $\tau_\lambda \geq n$:

$$\lambda.\mathbb{1}_{\tau_\lambda\leq n} \leq M_{\tau_\lambda}.\mathbb{1}_{\tau_\lambda\leq n}$$

$$\mathbb{E}(\lambda.\mathbb{1}_{\tau_\lambda\leq n}) \leq \mathbb{E}(M_{\tau_\lambda}.\mathbb{1}_{\tau_\lambda\leq n})$$

$$\begin{aligned}
\lambda \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\tau_\lambda \leq n})) = \lambda \mathbb{P}(\tau_\lambda \leq n) &\leq \mathbb{E}(M_{\tau_\lambda} \textstyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\tau_\lambda = k}) \\
&\leq \textstyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(M_{\tau_\lambda} \mathbb{1}_{\tau_\lambda = k}) \\
&\leq \textstyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(M_n \mathbb{1}_{\tau_\lambda = k}) \\
&= \mathbb{E}(M_n . \mathbb{1}_{k \leq n}) \\
&\leq \mathbb{E}(M_n . \mathbb{1}_{k \leq n})
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}(M_n^* \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(M_n . \mathbb{1}_{k \leq n})}{\lambda}$