Centre Universitaire de Mila
Département de MI

2024/2025
M2-S3

Algèbre et codage
TD 01

Exercice 1. Soit A un anneau et $(I_\lambda)_{\lambda\in L}$ une famille des idéaux de A. Démontrer que $I = \bigcap\limits_{\lambda\in L} I_\lambda$ est un idéal de A.

Exercice 2. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ premier entre eux i.e. pgcd$(m,n) = 1$. Montrer qu'il existe $\overline{x} \in \mathbb{Z}/_{m \cdot n\mathbb{Z}}$ -non trivial- avec

$$\overline{x}^2 = \overline{x}.$$

Indication : Utiliser le théorème de Bezout.

Exercice 3. Soit A un anneau C.U. I,J,K des idéaux de A. Montrer que

a) $I \cdot (J + K) = I \cdot J + I \cdot K.$

b) $I + J = A$ alors $I \cdot J = I \cap J.$

Exercice 4. Soit A,B,C trois anneaux, $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$ des hom des anneaux, on a

a) $g \circ f$ est un hom de A dans C.

b) Si f est un isom de A dans B, f^{-1} est un isom de B dans A.

Exercice 5. Soit A un anneau d'intégrité de caractéristique p. Alors $p = 0$ ou p un nombre premier.

Exercice 6. Soit A un anneau principal et $a_1, \cdots, a_n \in$A. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

a) $a_1, \cdots, a_n$ premier entre eux dans A.

b) Ils existent des éléments $u_1, \cdots, u_n \in$A tels que

$$a_1u_1 + \cdots +, a_nu_n = 1.$$

Exercice 7. Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$, $n \in \mathbb{N}$ l'anneau quotient, on a

a) $\overline{a}$ est inversible ssi pgcd$(a, n) = 1$.

b) $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ est un corps ssi n est premier.

Exercice 8. Soit M un idéal de A. M est maximal ssi $A/_M$ est un corps.

Exercice 9. Soit K$\neq \{0\}$ un anneau commutatif. Pour K soit un corps, il faut et il suffit que les seuls idéaux de K sont $\{0\}$ et K.