الجمهــوريـــة الجزائـريـــة الديمقـراطيـــة الشـعـبـيـة
Democratic and Popular Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientfiic Research
et de la Recherche Scientfiique

المركز الجامعي عبد الحفيظ بوصوف ميلة
Abdelhafid Boussouf University Center, Mila

Institute of Science and Technology — **معهد العلوم والتقنية**

نشرة دروس العلوم و التقنية
مقياس

فيزياء الاهتزازات والموجات الميكانيكية

من إعداد :

- الأستاذ بن لطرش محمد الصالح

السنة الجامعية: 2024-2025

المحتويات

مقدمة

هذه الدروس مخصصة لطلبة السنة الثانية في تخصص هندسة الطرائق. يهدف هذا المقياس إلى توضيح ظاهرة الاهتزازات الميكانيكية ذات التذبذبات الصغيرة في الأنظمة ذات درجة أو درجتين من الحرية، بالإضافة إلى دراسة انتشار الموجات الميكانيكية.

المعرفة المسبقة المطلوبة: مفاهيم الرياضيات والفيزياء من السنة الأولى.

هيكل الكتاب: الكتاب مقسم إلى قسمين رئيسيين:

القسم الأول: الاهتزازات الميكانيكية

1. الفصل الأول: مقدمة في معادلات لاجرانج
2. الفصل الثاني: التذبذبات الحرة للأنظمة ذات درجة حرية واحدة
3. الفصل الثالث: التذبذبات القسرية للأنظمة ذات درجة حرية واحدة
4. الفصل الرابع: التذبذبات الحرة للأنظمة ذات درجتين من الحرية
5. الفصل الخامس: التذبذبات القسرية للأنظمة ذات درجتين من الحرية

القسم الثاني: الموجات

1. الفصل الأول: ظاهرة الانتشار أحادية البعد
2. الفصل الثاني: الأوتار المهتزة
3. الفصل الثالث: الموجات الصوتية في السوائل
4. الفصل الرابع: الموجات الكهرومغناطيسية

باب 1

الاهتزازات - عموميات :مقدمة إلى معادلات لاغرانج -

1.0.1 عموميات :مقدمة إلى معادلات لاغرانج

تعريف الحركة الدورية

نقول عن لحركة أنها دورية إذا تكررت بنفس الطريقة خلال فترات زمنية متساوية. نقدم فيما يلي بعض المفاهيم الأساسية حول الحركات الاهتزازية و الذبذبات و نقدم الوصف الرياضي لها

تعريف 1

الذبذبة هي أي حركة متكررة حول نقطة التوازن، تحدث في أنظمة مختلفة مثل الأنظمة الميكانيكية (مثل البندول)، أو الكهربائية (مثل التيار المتردد)، أو البيولوجية (مثل ضربات القلب). وعادةً ما يصف الحركة السلسة الدورية، على الرغم من أنه يمكن أن يحدث أيضًا في سياقات غير فيزيائية مثل موجات الضوء، التي تتذبذب دون اهتزاز ميكانيكي. وتشمل الأمثلة البندولات والإشارات الكهربائية والدورات الموسمية. يمكن أن تحدث التذبذبات في الأنظمة الفيزيائية أو الكيميائية أو الكهربائية أو البيولوجية.

تقسم إلى تذبذبات:

1. التذبذبات الحرة: تحدث عندما يتذبذب الجسم دون تدخل خارجي أو احتكاك.
2. التذبذبات المخمدة: يتأثر الجسم بقوى احتكاك تبدد الطاقة، ما يؤدي إلى توقف التذبذب تدريجيًا.
3. التذبذبات القسرية: تحدث عندما ينقل فعل خارجي طاقة إلى المذبذب.

4. التذبذبات القسرية المخمدة: القوة الخارجية الدورية تعوض فقدان الطاقة بسبب الاحتكاك، مما يحافظ على التذبذبات.

تعريف 2

تعريف الاهتزاز: التعريف: يشير الاهتزاز على وجه التحديد إلى التذبذبات الميكانيكية السريعة لمادة أو جسم. وهو يتضمن حركة الجسيمات أو الهياكل ذهابًا وإيابًا، غالبًا استجابة لقوة خارجية.

نوع الحركة: يرتبط الاهتزاز عمومًا بالحركات السريعة ذات السعة الصغيرة حول موضع التوازن، وغالبًا ما ينتج صوتًا أو حرارة مع تبدد الطاقة.

الأمثلة:

1. اهتزاز وتر الجيتار عند نتفها.
2. اهتزاز الهاتف المحمول أثناء إشعار.
3. الحركة الاهتزازية لمحرك أو آلة.
4. الطبيعة الميكانيكية: يتضمن الاهتزاز عادةً **أنظمة ميكانيكية ويرتبط عادةً بالأشياء المادية.

الاختلافات الرئيسية بين الاهتزازات و الذبذبات :

1. النطاق:
- التذبذب هو مصطلح أكثر عمومية ويمكن تطبيقه على أي حركة متكررة (ميكانيكية، كهربائية، بيولوجية، إلخ).
- يشير الاهتزاز على وجه التحديد إلى التذبذبات الميكانيكية لهيكل أو جسم.

2. السرعة والسعة:
- غالبًا ما يكون الاهتزاز أسرع وينطوي على حركات أصغر، في حين يمكن أن يكون التذبذب أبطأ ويغطي نطاقًا أكبر من الحركة.

3. الأنظمة:
- ينطبق التذبذب على أنظمة متنوعة مثل الدوائر الكهربائية والأشياء الميكانيكية.
- يقتصر الاهتزاز عادةً على الأنظمة الميكانيكية أو الفيزيائية.
- التذبذب هو مفهوم عام للحركة الدورية، ينطبق على أنظمة مختلفة.
- الاهتزاز هو نوع محدد من التذبذب يشير إلى الحركة الميكانيكية للأشياء.

الشكل الرياضي: - **غالباً ما يتم وصف الحركة الدورية رياضياً من خلال وظائف الجيب أو جيب التمام، والتي تعكس الطبيعة المتكررة للحركة. بالنسبة للحركات السريعة نستخدم التردد (f) المعبر عنه بالهرتز (HZ) ويرتبط بالدور بواسطة:**

$$f = \frac{1}{T} \tag{1}$$

يسمى عدد الدورات في الثانية بالنبضات ω (يُشار إليها، وتُقاس بالراديان/ثانية)

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{2}$$

1Hz = دورة في الثانية

10 = 1KHz ^3Hz

$1MHz = 10^6 Hz$

$1GHz = 10^9 Hz$

ملاحظة 1

1-يُقال إن المذبذب متناغم إذا تطور النظام وفقًا لقانون دوري للشكل الجيبي (الشكل 1-1).

2- يقال أن المذبذب غير متناغم إذا تطور النظام وفقًا لقانون دوري لأي شكل غير جيبي الشكل 1-2.

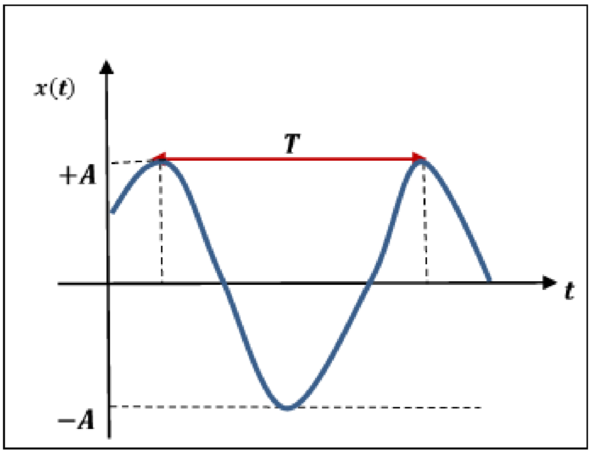
$$x(t) = A\cos(t + \varphi) \tag{3}$$

A : سعة التذبذب (القيمة القصوى للإزاحة)

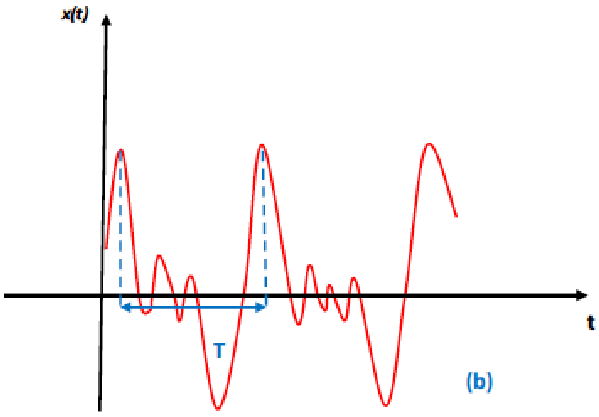
ω : نبض التذبذب

φ : الطور الأولي (t = 0)

السرعة: v سرعة النقطة المتذبذبة M هي المشتقة لإزاحتها.



شكل 1.1: الشكل الجيبي للموجة المتناغم



شكل 2.1: الشكل الغير متناغم

2.0.1 مفهوم الطاقة

يتضمن مفهوم الطاقة في الاهتزاز والتذبذب التبادل المستمر بين شكلين أساسيين للطاقة الميكانيكية: الطاقة الحركية (KE) والطاقة الكامنة (PE). في الأنظمة التي تتعرض للاهتزاز أو التذبذب، تتحرك الطاقة ذهابًا وإيابًا بين هذين الشكلين أثناء تحرك الجسم أو النظام خلال دورته.

إجمالي الطاقة الميكانيكية:

تظل الطاقة الميكانيكية الكلية في نظام مهتز أو متذبذب ثابتة (بافتراض عدم وجود فقدان للطاقة بسبب الاحتكاك أو التخميد). هذه الطاقة هي مجموع الطاقة الحركية والطاقة الكامنة في أي نقطة معينة من الحركة.

$$E_{Tot} = KE + PE = Const \tag{4}$$

طاقة الحركة :(KE)

طاقة الحركة هي طاقة الحركة. وهي تصل إلى أقصى حد لها عندما يتحرك الجسم بأسرع ما يمكن، وهو ما يحدث عادةً عندما يمر الجسم عبر موضع توازنه (مركز حركته). صيغة طاقة الحركة:

$$KE = \frac{1}{2} m v^2 \tag{5}$$

$$v = \frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x} \tag{6}$$

$$\Rightarrow KE = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \tag{7}$$

في حالة الدوران تكون المعادلة :

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \tag{8}$$

مع J هو عطالة عزم الدوران
و في حالة الانسحاب x و θالدوران :

$$T_{Tot} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \tag{9}$$

حيث m هي كتلة الجسم و v هي سرعته. - في النظام المتذبذب، تكون الطاقة الحركية في أعلى مستوياتها عندما تكون السرعة أعظمية وتساوي صفراً عند نقاط تحول الحركة.

عزم القصور الذاتي للدوران

الشكل	عزم القصور الذاتي بالنسبة لمركز الثقل
قضيب (طول L، كتلة M)	$\frac{1}{12}ML^2$
أسطوانة (نصف القطر R، الكتلة M)	$\frac{1}{2}MR^2$
كرة (نصف القطر R، الكتلة M)	$\frac{2}{5}MR^2$
كتلة نقطية m	0

جدول 1.1: عزم القصور الذاتي بالنسبة لمركز الثقل

في حالة نقطة الدوران في غير مركز الثقل فإننا نطبق نظرية (هوجنز-شتاينر)

نظرية 2

يعطى عزم القصور الذاتي لكتلة M ذات شكل عشوائي حول نقطة A مختلفة عن مركز الثقل G بالعلاقة التالية :

$$J_{/A} = J_{/G} + M(AG)^2$$

(نظرية هوجنز-شتاينر)

الطاقة الكامنة (PE)

- الطاقة الكامنة هي الطاقة المخزنة بسبب موضع الجسم أو تكوينه. في الأنظمة المهتزة، يمكن أن تكون هذه الطاقة طاقة وضع مرنة (في الينابيع) أو طاقة وضع الجاذبية (في البندولات). - في النظام المتذبذب، تبلغ طاقة الكامنة أقصاها عندما يكون الجسم عند أقصى نقاط حركته (نقاط الدوران) وتساوي صفراً عند موضع الاتزان. - معادلة طاقة الكامنة في نظام الكتلة- النابض:

$$PE = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (10)$$

حيث k هو ثابت النابض، و x هو الإزاحة من موضع الاتزان.

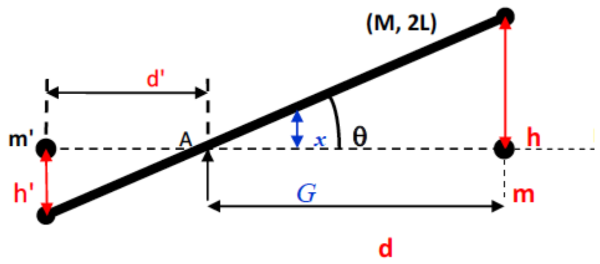
- التخميد وفقدان الطاقة: - في الأنظمة الحقيقية، يمكن أن يتسبب التخميد (بسبب الاحتكاك أو مقاومة الهواء) في فقدان الطاقة في شكل حرارة، مما يؤدي إلى انخفاض تدريجي في سعة الاهتزاز. - في النظام المخمّد، تنخفض الطاقة الميكانيكية الكلية بمرور الوقت، مما يؤدي في النهاية إلى توقف الحركة.

مثال 1

- المذبذب التوافقي البسيط: في نظام الكتلة- النابض: تتحرك الكتلة ذهاباً وإياباً، محولة طاقة الوضع المخزنة في النابض إلى طاقة حركية والعكس صحيح.

- النواس: في النواس، تتبادل طاقة وضع الجاذبية والطاقة الحركية أثناء تأرجح البندول من جانب

$h!$



شكل 3.1: نواس مركب من قضيب و كتلتين

إلى آخر.
- اهتزاز الوتر: عندما يهتز وتر القيثارة، فإن الشد في الوتر يخزن طاقة الوضع، بينما تترجم حركة الوتر إلى طاقة حركية.

مثال 2

مثال عملي افترض أن لدينا نظامًا ميكانيكيًّا بالأسفل مكوّنًا من كتلتين نقطيتين (m1 و m2) مثبتتين على الطرفين الحرين لقضيب كتلته **M**وطوله $2L$. هذا النظام حركة دورانية بالنسبة إلى النقطة A أو النقطة الثابتة A. احسب طاقة الحركة وطاقة الوضع للنظام الشكل 1.3

الحل :يتكون النظام من 3 كتل، لذلك هناك 3 طاقات حركية و3 طاقات كامنة 1- الطاقة الحركية KE

$$KE_{Tot} = KE_M + KE_m + KE_{m'}$$

$$KE_M = \frac{1}{2} J_{M/A} \theta^2$$

$$J_{M/A} = \frac{1}{12} M(2L^2) + M(AG)^2$$

$$AG = \frac{L}{2}$$

$$J_{M/A} = \frac{1}{12} M(2L^2) + M(\frac{L}{2})^2 = \frac{7}{12} ML^2$$

$$\Rightarrow KE_M = \frac{1}{2}\frac{7}{12} ML^2 \theta^2$$

$$T_m = \frac{1}{2} J_{m/A} \theta^2$$

$$J_{m/A} = [0 + md^2]$$

$$d = L + \frac{L}{2} = \frac{3L}{2}$$

$$J_{m/A} = m\left(\frac{3L}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow T_m = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{9}m\right]L^2\theta^2$$

$$T_{m'} = \frac{1}{2}J_{m'/A}\theta^2$$

$$J_{m'/A} = [0 + m'd^2]$$

$$d = \frac{L}{2}$$

$$J_{m'/A} = m'\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow T_{m'} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}m'\right]L^2\theta^2$$

$$T_{Tot} = \frac{1}{2}\frac{7}{12}ML^2\theta^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{4}{9}m\right]L^2\theta^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{4}{9}m'\right]L^2\theta^2$$

$$\Rightarrow T_{Tot} = \frac{1}{2}\left[\frac{7}{12}M + \frac{9}{4}m + \frac{1}{4}m'\right]L^2\theta^2$$

2- الطاقة الكامنة PE

$$PE_{Tot} = PE_M + PE_m + PE_{m'}$$

$$PE_M = Mgx$$

$$x = \frac{1}{2}L\sin\theta$$

$$PE_M = \frac{1}{2}MgL\sin\theta$$

$$PE_m = mghh = d\sin\theta = \frac{3}{2}L\sin\theta$$

$$PE_m = \frac{3}{2}mgL\sin\theta$$

$$PE_{m'} = -m'gh'$$

$$h' = \frac{d}{3}\sin\theta = \frac{1}{2}L\sin\theta$$

$$PE_{m'} = -\frac{1}{2}m'gL\sin\theta$$
$$PE_{Tot} = \frac{1}{2}MgL\sin\theta + \frac{3}{2}mgL\sin\theta - \frac{1}{2}m'gL\sin\theta$$
$$PE_{Tot} = \frac{1}{2}gL\sin\theta(M+3m-m')$$

3.0.1 شروط التوازن

يتم تعيين شروط التوازن إذا كان التوازن

$$F = 0$$

$$x = x_0 \Rightarrow F\,|_{x=x_0}$$

بالنسبة للقوة المشتقة من كمون :

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

يتم كتابة حالة التوازن على النحو التالي:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\,|_{x=x_0} = 0 \tag{13}$$

هناك نوعان من التوازن:

i) حالة التوازن المستقرة: بمجرد إزاحة النظام من موضع توازنه، فإنه يعود إليه. وفي هذه الحالة تكون قوة الاستعادة:

$$f = -C_x$$

with

0 ≻ C

$$C = -\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{15}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}\,|_{x=x_0} > 0 \tag{16}$$

إن حالة التوازن المستقر هذه هي حالة التذبذب.

حالة التوازن غير المستقرة:

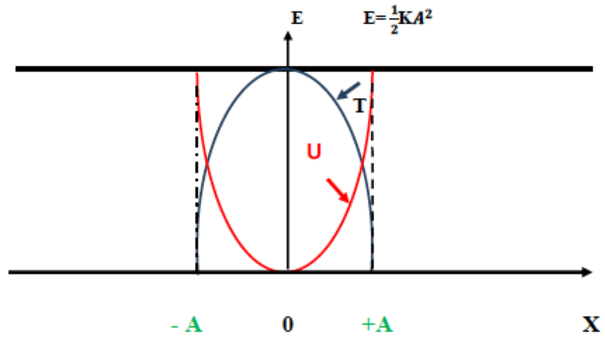
لا يعود النظام إلى حالة التوازن عند إزاحته. في هذه الحالة، تُكتب حالة التوازن غير المستقرة على النحو التالي:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=x_0} < 0 \qquad (17)$$

في حالة الدوران نستبدل:

$$x \to \theta$$

$$x_0 \to \theta_0$$



شكل 4.1: تغير الطاقة كدالة للإزاحة

من الممكن تمثيل تطور ثلاث طاقات بيانياً: الطاقة الكامنة، والطاقة الحركية، والطاقة الكلية (الميكانيكية)، الشكل 1-4.

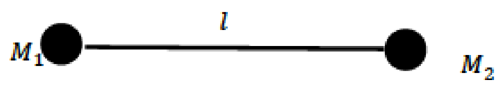
تعريف 3

عندما تنخفض الطاقة الحركية، ترتفع الطاقة الكامنة، والعكس صحيح. وتُعرف هذه الظاهرة بقانون حفظ الطاقة الكلية في النظام.

4.0.1 صياغة لاغرانج

الإحداثيات المعممة

الإحداثيات المعممة هي مجموعة من الإحداثيات الحقيقية المستقلة أو المرتبطة التي تتيح وصف وتكوين جميع عناصر النظام في أي وقت t.



شكل 5.1: مثال

مثال

يمكن تحديد موقع النقطة M في الفضاء بواسطة 3 إحداثيات على طول المحاور (x, y, z)
يمكن تعريف موضع جسم صلب في الفضاء بستة إحداثيات:

1. 03 إحداثيات تتعلق بمركز الثقل
2. 03 إحداثيات تتعلق بزوايا أويلر (θ, ϕ, ψ)

نرمز بـ $q_1(t), q_2(t), q_3(t)....q_N(t)$: الإحداثيات المعممة.
$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3.....\dot{q}_N$: السرعات المعممة.

درجة الحرية

هي عدد الإحداثيات المستقلة اللازمة لتحديد موضع كل عنصر من عناصر النظام أثناء حركته في أي وقت: نكتب:

$$d = N - r \tag{18}$$

حيث:
d : درجة الحرية
N : عدد الإحداثيات المعممة
r : عدد العلاقات بين الإحداثيات المعممة (عدد القيود)
مثال: لنعتبر نظامًا ميكانيكيًا يتكون من نقطتين M_1 و M_2 مرتبطتين بقضيب طوله L. أوجد عدد درجات الحرية.

$$\begin{cases} M_1(x_1, y_1, z_1) \\ M_2(x_2, y_2, z_2) \end{cases} \Rightarrow N = 6$$

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = Cst \Rightarrow r = 1$$

إذن:

$$d = N - r = 6 - 1 = 5 \rightarrow d = 5$$

صياغة لاغرانج

تعتمد هذه الصياغة على دالة لاغرانج

$$L = KE - PE$$

مجموعة معادلات الحركة تُكتب كالتالي:

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \right\} = 0 \tag{19}$$

حيث:

L دالة لاغرانج

KE الطاقة الحركية للنظام

PE الطاقة الكامنة للنظام

q_i الإحداثي المعمم وهو السرعة المعممة للنظام.

لنظام ذو درجة حرية واحدة ($N = 1$ أو $dof = 1$):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) = 0$$

1

[1] لنظام أحادي الأبعاد، تُكتب معادلة لاغرانج كالتالي:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0$$

لحركة دورانية θ:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = 0$$

مثال 3

المعادلات التالية هي معادلات تفاضلية

i) $y' + xy = 0$

ii) $y' + e^y = 0$

iii) $y'' + \sin(y) = e^x$

iv) $y' y + (y''')^2 = 0$

تعريف 4

رتبة معادلة تفاضلية هي رتبة أعلى مشتقة تتضمنها المعادلة.

مثال 4

نستعمل المثال 3، رتبة كل معادلة هي بالترتيب

i) 1

ii) 1

iii) 2

iv) 3

تعريف 5

ليكن $I \subset \mathbb{R}$ مجال ، نقول عن دالة $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ أنها حل للمعادلة التفاضلية $F\left(x, y(x), y'(x), .., y^{(n)}(x)\right) = 0$ إذا كان،

1) y قابلة للإشتقاق n مرة على المجال I

2) y تحقق $F\left(x, y(x), y'(x), .., y^{(n)}(x)\right) = 0$ على المجال I.

مثال 5

1) $y(x) = e^x$ حل للمعادلة $y' = y$ على أي مجال $I \subset \mathbb{R}$.

2) $y(x) = \sin(x)$ حل للمعادلة $y'' + y = 0$ على أي مجال $I \subset \mathbb{R}$.

تعريف 6

الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوي على n وسيط (ثوابت إختيارية)، أما الحل الخاص فهو حل لا يحتوي على أي وسيط.

مثال 6

1) الحل العام للمعادلة $y' = y$ هو $y(x) = ce^x$ مع $c \in \mathbb{R}$. إذا أخذنا $c = 0$ نحصل على الحل الخاص $y(x) = 0$.

2) الحل العام للمعادلة $y'' + y = 0$ هو $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$ مع $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. إذا أخذنا $c_1 = 0$ فإن الحل $y(x) = c_2 \sin(x)$ ليس خاص ولا عام.

5.0.1 الشروط الإبتدائية والشروط الحدية

لقد رأينا أن حلول المعادلات التفاضلية تتعلق بوسائط، لتحديد قيم هذه الوسائط يتم إظافة شروط على الدالة الحل، تنقسم هذه الشروط إلى نوعين نعرفهما فيما يلي:

تعريف 7: (الشرط الإبتدائي و الشرط الحدي)

1. لتكن لدينا معادلة معتبرة من أجل $x \in I$ رتبتها n، إذا حددة قيمة الدالة و مشتقاتها حتى الرتبة $n-1$ في نقطة $x_0 \in I$، نسمي هذه المعادلة مع هذا الشرط معادلة مع شرط إبتدائي أو مسألة القيمة الإبتدائية أو **مسألة كوشي** .

2. لتكن لدينا معادلة معتبرة من أجل $x \in I = [x_0, x_1]$، إذا حددنا قيمة الدالة أو مشتقاتها عند النقطتين x_0, x_1، نسمي هذه المعادلة مع هذا الشرط معادلة مع شرط حدي، أو مسألة القيمة الحدية.

مثال 7

1. المسائل التالية هي مسائل كوشي

$$(a)\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} y'' = -y+1 \\ y(1) = 1,\ y'(1) = 3. \end{cases}$$

2. المسائل التالية هي مسائل حدية

$$(a)\begin{cases} y'' = y, & x \in [0,\pi] \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} y'' = y, & x \in [0,\pi] \\ y(0) = 0, & y'(\pi) = 1. \end{cases}$$

6.0.1 طرق عامة لحل المعادلات التفاضلية

فصل المتغيرات لنعتبر المعادلة من الشكل

$$y' g(y) = f(x) \tag{20}$$

حيث f, g دالتين معرفتين و مستمرتين على مجالين I, J على الترتيب.
إذا كانت F و G الدالتين الأصليتين ل f و g (على التوالي). أي $F(x) = \int f dx$ و $G(x) = \int g dx$، فإن الحل العام للمعادلة (20) يحقق

$$G(y) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى لنعتبر المعادلة من الشكل

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{21}$$

لدينا النظرية التالية حول المعادلة (21).

نظرية 3

لتكن $b(x), a(x)$ دالتين مستمرتين على $I \subseteq \mathbb{R}$، فإن

1. الحل العام للمعادلة (21) هو

$$y(x) = e^{\int a(x)dx}\left(c + \int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx\right), \quad c \in \mathbb{R}$$

2. إذا أضفنا الشرط $y(x_0) = y_0$ ، فإن الحل وحيد يحقق

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(s)e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)dt}ds\right).$$

برهان.

1. بضرب طرفي المعادلة $y' = a(x)y + b(x)$ ب $\alpha(x)$ ($\alpha(x)$ نحددها فيما يلي)، نجد

$$\alpha y' - \alpha a y = b\alpha \qquad (22)$$

نبحث عن $\alpha(x)$ تحقق

$$(\alpha y)' = \alpha y' - \alpha a y \qquad (23)$$

و هذا يعني أن $\alpha' y = -a y \alpha$ (عامتا $y \neq 0$، ينتج $\alpha' = -a\alpha$)، و منه

$$\alpha(x) = e^{-\int a(x)dx}$$

يسمى $\alpha(x)$ عامل المكاملة، بالتعويض في (22) و (23)، نجد

$$(\alpha y)' = b\alpha = \alpha y' - \alpha a y$$

و عليه

$$\alpha y = \int b\alpha \; dx + c, \;\; c \in \mathbb{R}$$

بالتعويض نجد

$$y(x) = e^{\int a(x)dx}\left(c + \int b(x) e^{-\int a(x)dx} dx\right).$$

2. يكفي تعويض الشرط الإبتدائي، أما وحدانية الحل، فنبرهن عليها فيما يأتي من الدرس.

■

مثال 8

1. لنعتبر المعادلة $y y' = (1+y^2)\frac{x}{2}$، بكتابة المعادلة على الشكل

$$\underbrace{y' \frac{2y}{(1+y^2)}}_{g(y)} = \underbrace{x}_{f(x)}$$

نلاحظ أن المتغيرين منفصلين، و هذا يعني أن أي حل يحقق:

$$\underbrace{\ln(1+y^2)}_{G(y)} = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{F(x)} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

2. لتكن المعادلة $y' = ky + h$، مع $y(0) = y_0$، حيث h, k ثابتين، فإن الحل حسب النظرية

3 هو

$$y(x)=e^{kx}\left(y_0+\frac{h}{k}\right)-\frac{h}{k}$$

1.1 الوجود و الوحدانية

سنعتبر من الآن فصاعدا مسألة كوشي التالية

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0. \end{cases} \tag{24}$$

نبدأ بالتوطئة التالية التي تعبر عن حل المعادلة التفاضلية بتكامل (أو بمعادلة التكاملية)،

ملاحظة 4

لتكن $f(\cdot,\cdot)$ و $y(\cdot)$ دالتين مستمرتين ، $y(\cdot)$ حل للمعادلة (24) إذا وفقط إذا

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\big(s,y(s)\big)ds, \quad \forall x. \tag{25}$$

برهان.

($\Leftarrow$) تكفي المكاملة.

($\Rightarrow$) نرى أنه إذا كان $y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\big(s,y(s)\big)ds$، فإن $y(x_0)=y_0$، و بما أن f,y مستمرين فإن $f(s,y(s))$ مستمر أيضا، نطبق النظرية الأساسية في التحليل فنجد. $y'=f(x,y)$ ■

1.1.1 طريقة التقريبات المتعاقبة (بيكارد-Picard)

طريقة بيكارد للتقريبات المتعاقبة هي طريقة تمكننا من إيجاد (تحت بعض الشروط) حلول مقربة لمسألة كوشي (24) بإستعمال الكتابة التكاملية في التوطئة السابقة بإعتبار متتالية التوابع

$$\begin{cases} y^{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\big(s,y^n(s)\big)ds, \quad n\geq 0 \\ y^0(x)=y_0. \end{cases} \quad)26($$

نستطيع أن نرى أنه إذا تقاربت هذه المتتالية نحو دالة y، فإن y ستحقق المعادلة التكاملية (25)، سنبين تحت أي شروط تتقارب هذه المتتالية فيما يأتي، نعطي الأن مثالا على الطريقة.

6

نقول أن الدالة $f(x,y): D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تحقق شرط ليبشيتز (بالنسبة ل y) في المنطقة D إذا وجد $k\geq 0$ يحقق

$$\forall (x,y_1),(x,y_2)\in D,\quad \left|f(x,y_2)-f(x,y_1)\right|\leq k\left|y_2-y_1\right|$$

يسمى k ثابت ليبشيتز للتابع f.

نقدم النظرية التالية حول تقارب متتالية التقريبات المتعاقبة للمسألة (24)،

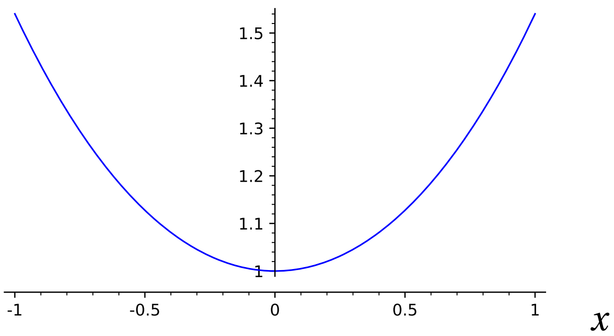
5

لتكن f مستمرة على $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, |x-x_0|\leq a, |y-y_0|\leq b\}$ و

1. $M>0$ يحقق $\sup\limits_{(x,y)\in D}|f(x,y)|\leq M$
2. f تحقق شرط ليبشيتز بالنسبة ل y بثابت k.

<u>فإن</u>

1. عناصر متتالية التقريبات المتعاقبة معرفة على المجال $I=[x_0-h,x_0+h]$ تبقى داخل D، حيث $h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$.
2. متتالية التقريبات المتعاقبة تتقارب نحو تابع مستمر.



شكل 6.1: بيان الدالة $f(x)$.

باب 2

الاهتزازات - النظم الخطية ذات الدرجة الواحدة من الحرية -

1.2 النظم الخطية ذات الدرجة الواحدة من الحرية

1.1.2 المقدمة: دراسة التذبذبات الحرة غير المخمدة

تعريف 1

النظام الذي يتذبذب بدون تأثير أي قوة خارجية يعرف باسم المذبذب الحر. تُعتبر هذه الأنظمة محافظة (conservative)، أي أن الطاقة فيها تُحفظ أثناء الحركة ولا تُفقد بسبب الاحتكاك أو أي قوة مقاومة أخرى.

التمثيل العقدي وتعريف سلسلة فوريه

لتسهيل العمليات الحسابية، نحول الكميات الجيبية إلى شكل أسي باستخدام صيغة أويلر (Euler):

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

وهذه المعادلة تعني أن الدالة الجيبية والجيب التمام يمكن تمثيلهما كجزء من تعبير أسي، حيث تساعد هذه الطريقة في تسهيل الحسابات المتعلقة بالدوال التوافقية في الأنظمة الفيزيائية.

ملاحظة 1

يمكن التعبير عن الكمية الدورية بواسطة مجموع دوال الجيب والجيب التمام، من أجل التعامل معها رياضياً وفيزيائياً. هذا المجموع يسمى سلسلة فوريه $(Fourier-series)$ ، وهي أداة رياضية قوية لتحليل الدوال الدورية.

سلسلة فوريه لدالة دورية $f(t)$ ذات فترة T تُعرّف على النحو التالي:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

- حيث أن a_0، a_n و b_n هي معاملات فوريه.

المعاملات تُحسب كالتالي: - المعامل الثابت a_0:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

- معامل الجيب التمام a_n:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

- معامل الجيب b_n:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

التردد الزاوي ω يُسمى التردد الأساسي (fundamental frequency):

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

أما الترددات التي تكون مضاعفات للتردد الأساسي $n\omega$، فتسمى التوافقيات (harmonics). هذه التوافقيات مهمة لأنها تمثل الترددات الإضافية التي تظهر في التحليل الرياضي للتذبذبات، وتؤدي دورًا مهمًا في دراسة الأنظمة الميكانيكية والكهربائية الدورية.

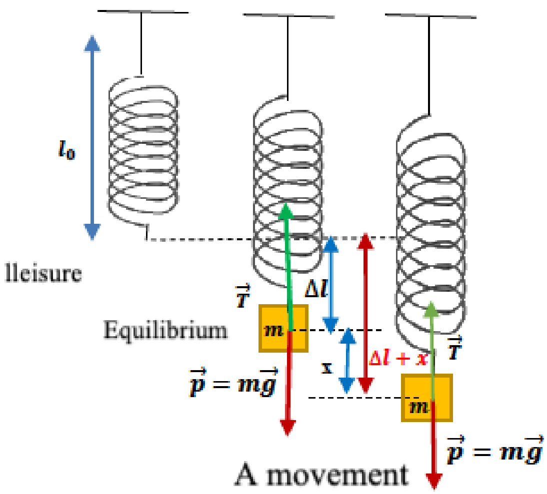
دراسة النظام الميكانيكي

يمكن الحصول على المعادلة التفاضلية باستخدام:

1. قانون نيوتن الثاني
2. قانون حفظ الطاقة
3. طريقة لاغرانج

مثال 1

مثال: كتلة m متصلة بطرف زنبرك تتحرك بدون احتكاك في الاتجاه العمودي.



شكل 1.2: نواس بنابض

أ- مبدأ نيوتن الديناميكي المطبق على الكتلة: وفقًا لقانون نيوتن الثاني:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

الإسقاط على المحور x:

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$$

ومن هنا نحصل على المعادلة:

$$m\ddot{x} = mg - T$$

وبإدخال القوة المؤثرة من الزنبرك $T = k(x + \Delta l)$، يصبح:

$$m\ddot{x} = mg - k(x + \Delta l)$$

وبالتبسيط:

$$m\ddot{x} = mg - kx - k\Delta l$$

في حالة التوازن:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

وهذا يعني:

$$mg - k(\Delta l) = 0$$

أي أن:

$$m\ddot{x} = -kx + \underbrace{mg - k\Delta l}_{0}$$

وهذا يؤدي إلى:

$$m\ddot{x} = -kx$$

وبالتالي:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

وأخيرًا:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

هذه هي المعادلة التفاضلية للحركة.

ب- قانون حفظ الطاقة: في النظام الحر، يتم حفظ الطاقة الميكانيكية (أو الكلية)، أي أن:

$$E_{Tot} = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

وبما أن الطاقة محفوظة:

$$\frac{\mathrm{d}E_{Tot}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow m\ddot{x}\dot{x} + k\dot{x}x = 0$$

وهذا يعطينا:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

ج- طريقة لاغرانج: تُعرّف دالة لاغرانج للنظام على النحو التالي:

$$L = T - U$$

حيث T هي الطاقة الحركية وU هي الطاقة الكامنة. وبالتالي:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

الصيغة العامة للاغرانج:

تعريف 2

الصيغة العامة للاغرانج هي أداة رياضية تستخدم لتحليل الحركة الديناميكية في الأنظمة الفيزيائية، خاصة في الميكانيكا الكلاسيكية. تعتمد على مبدأ الفعل الأدنى، وتربط بين الطاقة الحركية والطاقة الكامنة للجسم.

تُعطى صيغة لاغرانج بالمعادلة التالية:

$$L = T - U$$

حيث: - L هي دالة لاغرانج. - T هي الطاقة الحركية. - U هي الطاقة الكامنة.

ثم يُستخدم **معادلة لاغرانج** لحساب معادلات الحركة على النحو التالي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

حيث q هي الإحداثيات العامة و $\dot{q}$ هي السرعات العامة.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)=0$$

وبإدخال التعبيرات:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=m\ddot{x}$$

و:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-kx$$

لذا نحصل على:

$$m\ddot{x}+kx=0$$

هذه المعادلة تعبر عن الحركة الديناميكية للنظام الميكانيكي باستخدام طريقة لاغرانج.

حل المعادلة التفاضلية

حل المعادلة:

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0 \Leftrightarrow \ddot{x}+\omega_0^2 x=0$$

يكون على الشكل:

$$x(t)=Ae^{rt}$$

حيث r هو عدد حقيقي و A هو ثابت موجب.

$$\dot{x}=Are^{rt} \quad \ddot{x}=Ar^2e^{rt} \Leftrightarrow (r^2-\omega_0^2)Ae^{rt}=0$$

ومنها:

$$\begin{Bmatrix} r_1= & i\omega_0 \\ r_2= & -i\omega_0 \end{Bmatrix}$$

لدينا حلان:

$$x_1(t)=A_1e^{r_1}=A_1e^{i\omega_0 t} \quad /// \quad x_2(t)=A_2e^{r_2}=A_2e^{-i\omega_0 t}$$

$$x(t)=A\left(e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}\right)$$

الحل العام للمعادلة الحركية هو:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right)$$

وفقًا لعلاقة أويلر:

$$e^{\pm i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) \pm i\sin(\omega_0 t)$$

إذًا:

$$x(t) = A_1\left(\cos(\omega_0 t) + i\sin(\omega_0 t)\right) + A_2\left(\cos(\omega_0 t) - i\sin(\omega_0 t)\right)$$

$$x(t) = (A_1 + A_2)\cos(\omega_0 t) + (A_1 - A_2)\, i\sin(\omega_0 t)$$

$$x(t) = B\cos(\omega_0 t) + C\sin(\omega_0 t)$$

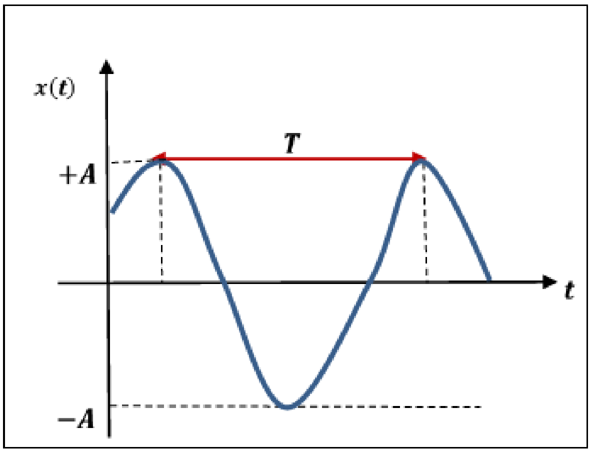
حيث:

$$\begin{cases} B = & \cos\theta \\ C = & \sin\theta \end{cases}$$

لذلك:

$$x(t) = D\cos\theta\cos(\omega_0 t) + D\sin\theta\sin(\omega_0 t) = D\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

حيث أن D و φ هما ثابتان يتم تحديدهما من الشروط الابتدائية.



شكل 2.2: الحركة التوافقية الجيبية

التذبذبات تكون جيبية في السعة والفترة الطبيعية:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

إليك الترجمة إلى اللغة العربية:

دراسة النظام الكهربائي

مثال 2

لنأخذ في الاعتبار دائرة كهربائية من نوع :**LC**

$$\sum_i V_i = 0$$
$$V_C + V_L = 0$$
$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

حيث:

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0 \Leftrightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

وبالتالي:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

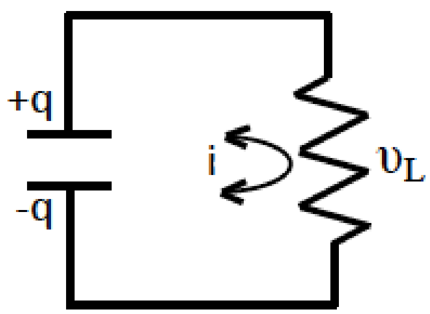
الحل:

$$q(t) = Q\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

حيث:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

الجوانب الطاقية



شكل 3.2: دارة مكثفة ووشعة

$$E_m = T + U$$
$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ U = \frac{1}{2}kx^2 \end{cases}$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad // \quad \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}m(-A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi))^2 \\ U = \frac{1}{2}k(A\cos(\omega_0 t + \varphi))^2 \end{cases}$$

من الناحية الطاقية، يقوم هذا المذبذب بتحويل الطاقة المرنة إلى طاقة حركية والعكس صحيح.

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) \Leftrightarrow E_m = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

الطاقة الميكانيكية للمذبذب تتناسب مع مربع السعة (راجع الفصل 1: عرض الطاقة الميكانيكية).

التشابه الكهروميكانيكي

من خلال مقارنة المعادلات التفاضلية للبندول المرن ودائرة "LC" الكهربائية، يمكن إنشاء التشابه الكهروميكانيكي التالي:

النظام الكهربائي	النظام الميكانيكي
$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$	$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$
الشحنة: q	الإزاحة: x
الحث: L	الكتلة: m
مقلوب السعة $\frac{1}{C}$	الزنبرك: k
طاقة الملف: $\frac{1}{2}L\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)^2$	الطاقة الحركية: $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$
طاقة المكثف: $\frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{C}\right)$	الطاقة الكامنة: $\frac{1}{2}kx^2$

جدول 1.2: التشابه الكهروميكانيكي

باب 3

أنظمة خطية حرة مخمدة ذات درجة واحدة من الحرية

1.3 مقدمة إلى التذبذب الحر المخمد وأنواع الاحتكاك

"يتم نقل جزء من طاقة المذبذب إلى البيئة الخارجية (يتم فقدانها بسبب الاحتكاك أو الإشعاع). تتناقص سعة التذبذبات مع مرور الوقت، ويتوقف المذبذب في النهاية."

2.3 أنواع الاحتكاك

تعتمد معادلات الحركة على طبيعة الاحتكاك. يمكن حل معادلة الحركة فقط مع بعض أنواع الاحتكاك.

1.2.3 الاحتكاك الصلب

تتناسب قوة الاحتكاك ~ مع رد الفعل العمودي للدعم.

$$F_f = -sgn(v)\mu R \tag{1}$$

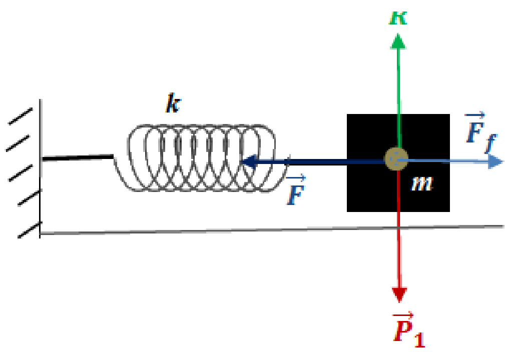
حيث:
F : القوة المستعادة $F = -kx$
μ : معامل الاحتكاك الديناميكي $\neq$ الاحتكاك الساكن.

2.2.3 الاحتكاك السائل أو اللزج

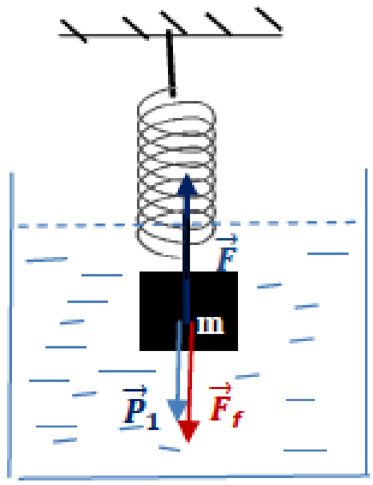
قوة الاحتكاك السائل تتناسب $\neq$ ومعاكسة للسرعة.

$$F_f = -\alpha v \tag{2}$$

حيث $\alpha > 0$



شكل 1.3: الاحتكاك الصلب



شكل 2.3: الاحتكاك السائل أو اللزج

3.2.3 الاحتكاك في الوسائط شديدة اللزوجة

الاحتكاك في الوسائط شديدة اللزوجة يتناسب ≠ مع مربع السرعة. معادلة الحركة غير خطية وعادة لا تحتوي على حل تحليلي.

4.2.3 أنواع أخرى معقدة من الاحتكاك

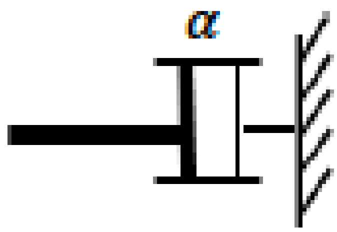
في هذه الدورة، سنقتصر على قوى الاحتكاك اللزج التي تتناسب مع السرعة. يعبر عن قوة الاحتكاك اللزج كما يلي:

$$F_q = -\alpha \dot{q} \qquad (3)$$

حيث: α معامل الاحتكاك اللزج $\alpha:[N.\frac{s}{m}]$: q : الإحداثية المعممة للنظام $\dot{q}$: السرعة المعممة للنظام. في حركة أحادية البعد x، يتم التعبير عن القوة كما يلي:

$$\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v} = -\alpha\dot{x}\overrightarrow{u}$$

في الميكانيكا، يمثل المثبط كما هو مبين في الشكل 3.3.



شكل 3.3: تمثيل المثبط

3.3 معادلة لاغرانج في نظام مخمد

"إذا كان هناك احتكاك $f = -\alpha\dot{q}$، فإن معادلة لاغرانج تصبح:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_q$$

تحت تأثير قوى الاحتكاك، يفقد النظام الطاقة الميكانيكية في صورة حرارة، لذا توجد علاقة بين القوة F_q ودالة الفقد D من جهة، ومعامل الاحتكاك اللزج من جهة أخرى α.

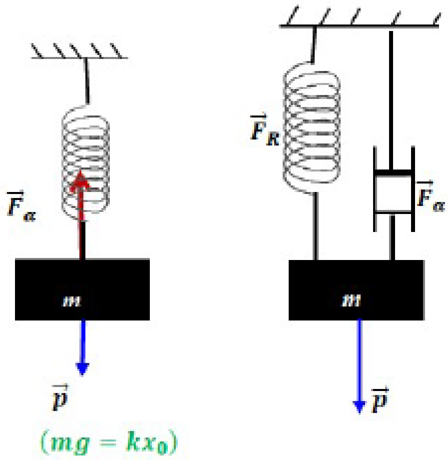
$$F_q = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \qquad (4)$$

حيث:

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{q}^2$$

تصبح معادلة لاغرانج للنظام المخمد كما يلي:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$$



شكل 4.3: نظام الكتلة-الزنبرك-المثبط في التوازن والحركة

4.3 معادلة النظام الكتلة-الزنبرك-المثبط

1.4.3 معادلة الحركة

لدراسة حركة مثل هذا النظام، يمكننا استخدام العلاقة الأساسية للديناميكا (FRD) وعلاقات لاغرانج.

أ- العلاقة الأساسية للديناميكا :FRD

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = m\overrightarrow{\gamma}$$

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}_R + \overrightarrow{F}_\alpha = m\overrightarrow{\gamma}$$

إسقاط على ox:

$$mg - k(x + x_0) - \alpha\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\underbrace{mg - kx_0}_{=0} + kx - \alpha\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

هذه معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية متجانسة.

ب- طريقة لاغرانج

الطاقة الحركية:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

الطاقة الكامنة:

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

دالة الفقد:

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

دالة لاغرانج:

$$L = T - U$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

الأسلوب اللاغرانجي:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) & = m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} & = -kx \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} & = \alpha\ddot{x} \end{cases}$$

من خلال الاستبدال في المعادلة (III.1) سيكون لدينا:

$$m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

هذه هي معادلة الحركة في حالة النظام المخمد الحر.
كما هو الحال في حالة المذبذب التوافقي غير المخمد، فإن التردد الطبيعي للنظام هو $\omega_0 = \frac{k}{m}$. ومع ذلك، تظهر مصطلح جديد مرتبط بمعامل المخمد $(\frac{\alpha}{m})$. هذا المعامل يساوي $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$، حيث λ هو معامل المخمد. لذلك، تكتب معادلة الحركة كما يلي:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{5}$$

2.4.3 حل معادلة الحركة

المعادلة (5.3) هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بدون حد خارجي. تشكل مجموعة الحلول لهذه المعادلة فضاءً متجهًا ثنائي الأبعاد. يمكن التعبير عن الحل العام لهذه المعادلة كتركيبة خطية من حلين يشكلان أساسًا. يمكن العثور على هذا الأساس من خلال التركيز على الحلول الزمنية الأسية.

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{rt} \\ \dot{x(t)} = Are^{rt} \\ \ddot{x(t)} = Ar^2e^{rt} \end{cases}$$

نستبدل الحدود الثلاثة في المعادلة (5.3)، مما يعطي:

$$Ar^2e^{-i\omega t} + 2\lambda Are^{-i\omega t} + \omega_0^2 Ae^{-i\omega t} = 0$$

من خلال تحليل $Ae^{-i\omega t}$ ، نحصل على:

$$Ae^{-i\omega t}(r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2) = 0 \qquad (6)$$

تُعرف المعادلة (6.3) بمعادلة الخصائص. إنها معادلة من الدرجة الثانية ويمكن أن تعطي إما جذرين حقيقيين مميزين، جذر مزدوج (ضمن الأعداد الحقيقية)، أو جذرين معقدين. يتم حساب التمييز المختصر على النحو التالي:

$$\Delta = \lambda^2 - \omega_0^2$$

يجب دراسة ثلاثة أنظمة:

نظام مخمد بشدة (غير دوري)

تعريف 1: (نظام مخمد)

في هذا النظام، يكون التمييز لمعادلة الخصائص إيجابيًا، مما يؤدي إلى جذرين حقيقيين متميزين. يشير ذلك إلى أن النظام يعود إلى التوازن دون تذبذب، مما يعني أنه غير دوري. لذلك، يكون الحل لمعادلة الحركة عبارة عن مجموعتين من الحدود الأسية المتناقصة، كل منهما مرتبطة بأحد الجذرين الحقيقيين.

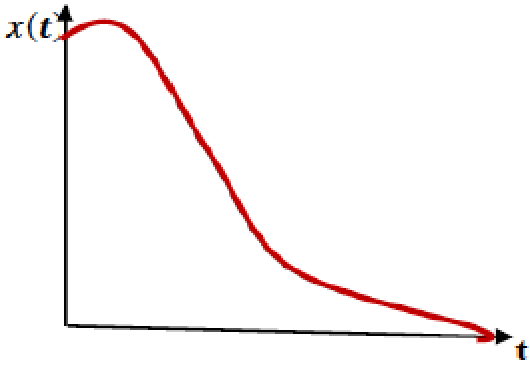
$$\Delta > 0 \Rightarrow \lambda > \omega_0$$

$$\begin{cases} r_1 = & \frac{-2\lambda+\sqrt{\Delta}}{2} = & -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \\ r_2 = & \frac{-2\lambda-\sqrt{\Delta}}{2} = & -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \Rightarrow x(t) = A_1 e^{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t}$$

$$x(t) = e^{-i\omega t} \left[A_1 e^{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} \right]$$

تُحدد المعاملات A_1 و A_2 بواسطة شروط الإزاحة الأولية والسرعة.



شكل 5.3: النظام غير الدوري

من خلال إزاحة النظام من موضع توازنه، فإنه لم يعد يتذبذب ويتوقف تمامًا بعد فترة معينة من الزمن، والتي تعتمد على معامل المخمد. كلما كان معامل المخمد أكبر، كان وقت التوقف أقصر. يُطلق على هذا النظام اسم غير دوري، والمخمد ثقيل.

لا يُعتبر المصطلح $\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ ترددًا زاويًا لأنه في حالة النظام المخمد بشدة، لا يوجد تذبذب حول موضع التوازن.

النظام غير الدوري الحرج

يتوافق هذا مع الحالة التي يكون فيها التمييز المختصر صفراً.

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = \omega_0$$

لدى معادلة الخصائص جذر حقيقي مزدوج.

$$r_1 = r_2 = -\lambda$$

لذلك، فإن الدالة $e^{-\lambda t}$ هي حل للمعادلة التفاضلية.

يمكن الحصول على الحل الثاني من خلال ملاحظة أن $te^{-\lambda t}$ هو أيضًا حل. وبالتالي، يتم كتابة الحل العام على النحو التالي:

$$x(t) = Ate^{-\lambda t} + Be^{-\lambda t} \Rightarrow x(t) = (At + B)e^{-\lambda t}$$

في حالة "النظام غير الدوري الحرج"، حيث يكون التمييز لمعادلة الخصائص صفراً، لدينا جذر حقيقي مزدوج. بالنسبة لمعادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بالشكل:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

تكون معادلة الخصائص:

$$r^2 + 2\zeta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

حيث:

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ هو التردد الطبيعي غير المخمد، - $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$ هو نسبة المخمد.

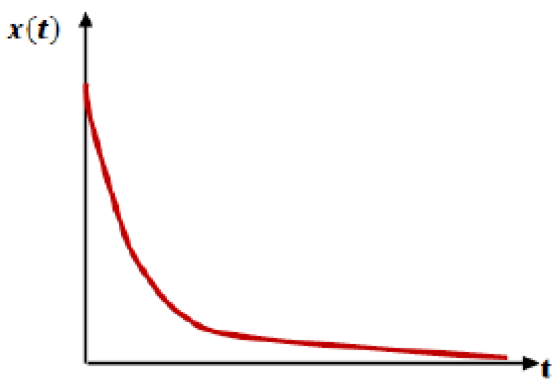
في حالة المخمد الحرج، $\zeta = 1$، لذا فإن التمييز يكون صفراً، وتكون معادلة الخصائص لها جذر مزدوج $r = -\omega_0$. الحل العام هو:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$$

حيث A وB هما ثوابت تحددها الشروط الأولية.

$$\begin{cases} \lambda = & \frac{\alpha}{m} \\ \omega_0 = & \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \Rightarrow \lambda = \omega_0 \Rightarrow \frac{\alpha^2}{4m^2} = \frac{k}{m}$$

حيث C: حرج $\alpha_C = 2\sqrt{km}$. يُعتبر النظام غير الدوري الحرج هو النظام الذي يعود إلى موضع توازنه بسرعة أكبر من أي نظام غير دوري آخر.



شكل 6.3: النظام غير الدوري الحرج

يُعرف المخمد بأنه مخمد حرج. تلعب الحالة الحرجة دورًا مهمًا في بعض التطبيقات العملية وتصميم أدوات القياس، حيث يعود النظام بعد الاضطراب إلى موضع راحته بأسرع ما يمكن دون تجاوز ذلك.

ملاحظة 1

بالنسبة للمخمد القوي $(\lambda \geq \omega_0)$، يعود النظام إلى موضع توازنه دون أن يتذبذب، وبالتالي، فإن الأوسيلور غير المخمد لا يتذبذب دائمًا.

النظام شبه الدوري

تعريف 2: (عامل الجودة)

النظام شبه الدوري هو مصطلح يُستخدم غالبًا في سياق الأنظمة الديناميكية، خاصة في الفيزياء والهندسة والرياضيات. ويصف سلوكًا يبدو أنه يحتوي على هيكل دوري منتظم ولكنه لا يتكرر بدقة بنفس الطريقة مثل السلوك الدوري الحقيقي. بمعنى آخر، على الرغم من أن النظام قد يبدو أنه يظهر نمطًا متكررًا، إلا أن الفواصل الزمنية أو السعات قد تختلف قليلاً أو تنحرف بمرور الوقت، مما يمنع التكرار الدقيق.

يتوافق مع الحالة التي يكون فيها التمييز المختصر سالبًا:

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda < \omega_0$$

$$\Delta = (-1)(\omega_0^2 - \lambda^2) = i^2(\omega_0^2 - \lambda^2)$$

حيث:ω_α هو التردد المخمد أو التردد شبه الدوري : $\omega_\alpha = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ لذا، فإن الحلول للمعادلة التفاضلية هي:

$$x(t) = A_1 e^{(-\lambda - i\sqrt{\Delta})t} + A_2 e^{(-\lambda + i\sqrt{\Delta})t}$$

$$x(t) = e^{-\lambda t}(A_1 e^{-i\sqrt{\Delta}t} + A_2 e^{+i\sqrt{\Delta}t})$$

الحل للمعادلة هو:

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}(A\cos\omega_\alpha t + B\sin\omega_\alpha t)$$

$$x(t) = A\cos(\omega_\alpha t - \varphi)$$

تُحدد الثوابت A و φ بواسطة الشروط الأولية. يقوم النظام بأداء تذبذبات ذات سعات متناقصة ويعطى "النظام شبه الدوري" بواسطة:

$$T_\alpha = \frac{2\pi}{\omega_\alpha}$$

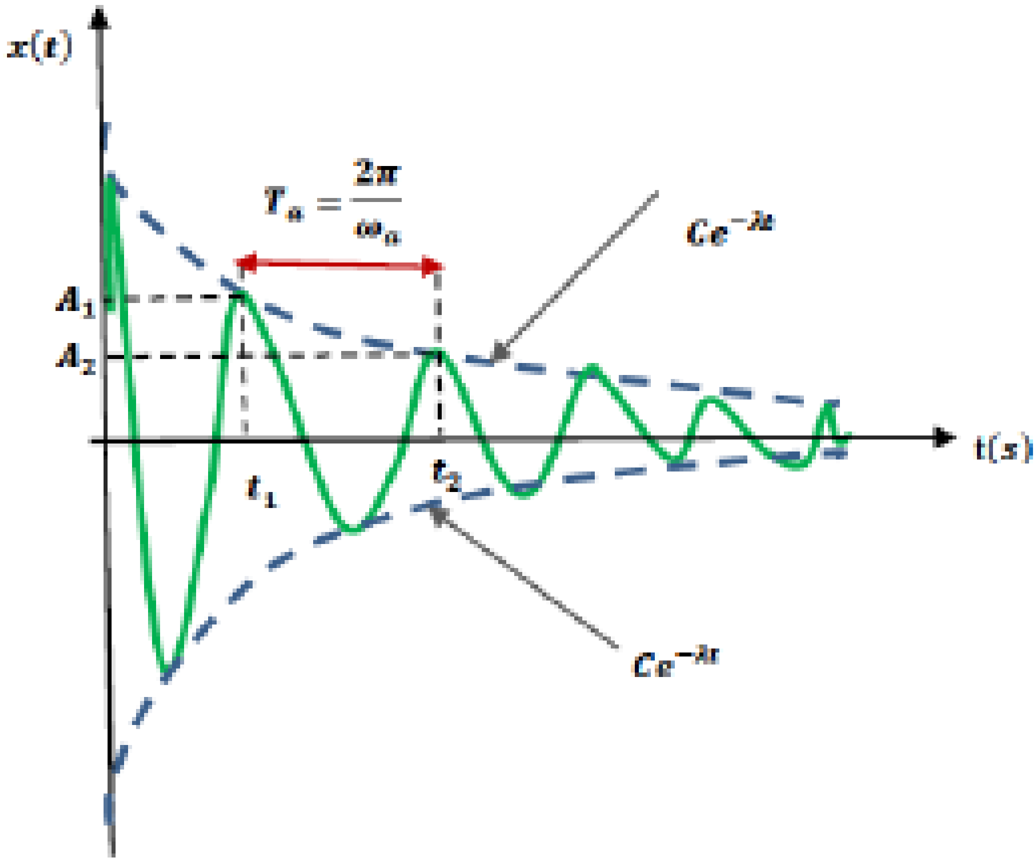
$$T_\alpha = \frac{2\pi}{\omega_\alpha} \Rightarrow T_\alpha = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

$$\omega_\alpha^2 = \omega_0^2\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$T_\alpha = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$T_\alpha = \frac{T_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow T_0 < T_\alpha$$

إذا كان $\lambda \ll \omega_0 \Rightarrow \zeta^2 = 1$ لذا فإن $T-\alpha \simeq T_0$ تكون المنحنى $x(t)$ محاطة بواسطة اثنين من الأسس $Ae^{-\lambda t}$ و $-Ae^{-\lambda t}$ لأنه، من حيث القيمة المطلقة، لا يمكن أن يتجاوز $\cos(\omega_\alpha t - \varphi)$ الواحد. نرى أن x يصبح صفراً عندما يقترب t من موضع توازنه (انظر الشكل 7.3). هناك تردد شبه دوري، ويُوصف الحركة بأنها شبه دورية. المخمد ضعيف.



شكل 7.3: تذبذبات (شبه دورة)

يجب ملاحظة أن التردد شبه الدوري ω_α أقل من التردد الطبيعي ω_0، وأن الفترة شبه الدوري T_α أكبر من الفترة T_0 للمهتز غير المخمد المقابل.

في اهتزازات ميكانيكية، يتم تمثيل *النظام شبه الدوري* بشكل عام بواسطة نماذج رياضية تجمع بين الحدود الدورية والنصف دورية أو تشمل تأثيرات غير خطية. وغالبًا ما تستخدم هذه النماذج معادلات تفاضلية مترابطة أو تُدخل حدود بطيئة التغير لالتقاط الانحرافات عن الدوران الحقيقي. فيما يلي بعض المعادلات والصيغ المستخدمة بشكل شائع لوصف السلوك شبه الدوري في الأنظمة الميكانيكية.

الاهتزاز التوافقي بتردد أو سعة تتغير ببطء

يمكن أن يبدأ نموذج أساسي للاهتزاز شبه الدوري من الاهتزاز التوافقي مع معلمات تتغير ببطء:

$$x(t) = A(t)\cos(\omega(t)\,t + \phi)$$

حيث: - $A(t)$ هو دالة سعة تتغير ببطء، - $\omega(t)$ هو تردد زاوي يعتمد على الزمن، - ϕ هو ثابت الطور.

في النظام شبه الدوري، تتغير $A(t)$ و $\omega(t)$ ببطء مع مرور الوقت، مما يقدم تغييرات صغيرة في الحركة الدورية بخلاف ذلك.

الاهتزاز المخمد المدفوع بترددين متنافسين

يمكن أن يظهر الاهتزاز المخمد المدفوع بترددين أو أكثر غير متناسقين أيضًا سلوكًا شبه دوري:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F_1\cos(\omega_1 t) + F_2\cos(\omega_2 t)$$

حيث: - m هو الكتلة، - c هو معامل المخمد، - k هو الصلابة، - F_1 و F_2 هما قوتان مطبقتان عند ترددين مختلفين ω_1 و ω_2.

عندما تكون ω_1 و ω_2 ليست مضاعفات صحيحة لبعضها البعض، فإن النظام سيظهر حالة شبه دورية بسبب الدفع شبه الدوري.

المذبذب غير الخطي مع عدم خطية ضعيفة

يمكن أن يظهر المذبذب غير الخطي قليلاً سلوكًا شبه دوري، خاصة إذا كانت هناك رنين أو قرب رنين بين أوضاع الاهتزاز المختلفة:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = 0$$

حيث α هو حد غير خطي صغير. تُعرف هذه المعادلة باسم *معادلة دوفينج*.

في الحالة شبه الدورية، تؤدي التأثيرات غير الخطية (هنا من خلال αx^3) إلى تقديم irregularities طفيفة في أنماط الاهتزاز، مما يتسبب في انحراف عن الدورية البسيطة.

3.4.3 التناقص اللوغاريتمي

(أو الانخفاض اللوغاريتمي)

تعريف 3: (عامل الجودة)

لنظام شبه دوري هو مقياس لمعدل انخفاض سعة الاهتزازات في نظام اهتزازي مخمد. ي quantfiies معدل فقدان الطاقة خلال كل دورة، مما يساعد في وصف المخمد في الأنظمة التي لا تهتز بدورية حقيقية.

في النظام شبه الدوري، حيث تكون الاهتزازات مخمدة ولكن ليست دورية تمامًا، لا يزال يمكن تطبيق التناقص اللوغاريتمي لتقريب سلوك الانخفاض. يُعرف بأنه اللوغاريتم الطبيعي لنسبة سعات القمم المتعاقبة في الاهتزاز المخمد.

تعريف التناقص اللوغاريتمي

يتم تعريف التناقص اللوغاريتمي δ كالتالي:

$$\delta = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T_\alpha)}\right)$$

حيث: - $x(t)$ هو السعة في زمن معين t، - $x(t+T_\alpha)$ هي السعة بعد فترة شبه دورة واحدة T_α.

-معادلة التناقص اللوغاريتمي في الأنظمة المخمدة

بالنسبة لنظام مخمد قليل في حالة شبه دورية، يمكن تقريب التناقص اللوغاريتمي كالتالي:

$$\delta = \frac{2\pi\lambda}{\omega_\alpha}$$

حيث: - λ هو معامل المخمد (مرتبط بمعدل الانخفاض للغلاف $Ae^{-\lambda t}$), - ω_α هو التردد شبه الدوري (تردد الزاوي المخمد).

-انخفاض السعة في الحركة شبه الدورية

تنخفض السعة $A(t)$ للحركة شبه الدورية مع مرور الوقت وفقًا للغلاف الأسي:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

تُعطى الحركة $x(t)$ في الحالة شبه الدورية بـ:

$$x(t) = A_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega_\alpha t + \phi)$$

في هذه المعادلة: - A_0 هو السعة الابتدائية، - ϕ هو الانزياح الطوري، - $\cos(\omega_\alpha t + \phi)$ يمثل المكون الاهتزازي مع التردد شبه الدوري ω_α.

يوفر التناقص اللوغاريتمي δ وسيلة لقياس مدى سرعة انخفاض الاهتزازات مع مرور الوقت ويكون مفيدًا بشكل خاص في تحديد خصائص المخمد في الأنظمة المخمدة قليلاً. بالنسبة لنظام مخمد:

$$x(t) = Ce^{-\lambda t}\sin(\omega_\alpha t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \delta = \ln \frac{Ce^{-\lambda t}\sin(\omega_\alpha t + \varphi)}{Ce^{-\lambda(t_1+T_\alpha)}\sin(\omega_\alpha(t_1 + T_\alpha) + \varphi)}$$

$$\Rightarrow \delta = \ln e^{\lambda T_\alpha} = \lambda T_\alpha$$

$$\lambda T_\alpha = \lambda \frac{T_\alpha}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \zeta\omega_0 \frac{T_\alpha}{1-\zeta^2} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

مع:

$$\delta = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = 2\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \lambda T_\alpha$$

ملاحظة 2

بالنسبة لعدة دورات:

$$T = T_\alpha(t_1 = t_2 + nT_\alpha) \Rightarrow \delta \ln(\frac{x(t_1)}{x(t_1+nT_\alpha)}) = 2\pi \frac{n\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

التردد شبه الدوري والتناقص اللوغاريتمي لهما معنى فقط إذا كان النظام شبه دوري.

4.4.3 الطاقة الكلية لمذبذب توافقي مخمد

نعتبر أن:

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x(t)} = Ae^{-\lambda t}\omega\cos(\omega t + \varphi) - A\lambda e^{-\lambda t}\sin(\omega t + \varphi)$$

في حالة المخمد الضعيف جدًا $\lambda \to 0$ ، فإن التردد شبه الدوري يساوي تقريبًا التردد الطبيعي للنظام، مما يعني:

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

تُكتب الطاقة الكلية على النحو التالي:

$$E_T(T) = U + T \Rightarrow$$

$$E_T(t) = \frac{1}{2}kA^2e^{-2\lambda t}\sin^2(\omega t+\varphi)+\frac{1}{2}mA^2\left[e^{-2\lambda t}\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi)+e^{-2\lambda t}\sin^2(\omega t+\varphi)\right]$$
$$-2\lambda\omega\sin(\omega t+\varphi)\cos(\omega t+\varphi)$$

إذا جعلنا المصطلحين الثاني والثالث من الطاقة الحركية يميلان نحو 0، نحصل على الطاقة الكلية بالتعبيرات الثلاث التالية:

$$E_T(t) = \frac{1}{2}kA^2e^{-2\lambda t}$$

حيث:

$$E_T(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2e^{-2\lambda t}$$

5.4.3 عامل الجودة

في مذبذب توافقي مخمد، يحدث فقدان للطاقة الميكانيكية. يتميز هذا الفقدان بمعامل أو عامل الجودة، Q، الذي يعكس كفاءة أو جودة المذبذب. يُعد عامل الجودة، المُشار إليه بـ Q، مقياسًا لكفاءة المذبذب في الاحتفاظ بالطاقة.

تعريف 4: (عامل الجودة)

يُشير عامل الجودة العالي إلى أن المذبذب يحافظ على طاقته بشكل فعال، مع تعرضه لفقدان طاقة ضئيل لكل دورة. في مذبذبات توافقي مخمدة (مثل البندول أو دائرة كهربائية مهتزة)، يتسبب المخمد في فقدان تدريجي للطاقة الميكانيكية بسبب الاحتكاك أو المقاومة. يكون عامل الجودة Q مرتبطًا عكسيًا بهذا الفقدان في الطاقة: كلما زادت قيمة Q، كان بإمكان المذبذب الاستمرار في الاهتزاز لفترة أطول دون فقدان كبير للطاقة.

$$Q = 2\pi\frac{E_m}{\Delta E}$$

$$Q = 2\pi\frac{E_T(t)}{\left[\frac{1}{2}kA^2e^{-i\omega t}-\frac{1}{2}kA^2e^{-2\lambda(t+T)}\right]}$$

$$\Rightarrow Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}kA^2 e^{-2\lambda t}}{\left[\frac{1}{2}kA^2 e^{-i\omega t} - \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\lambda(t+T)}\right]}$$

$$\Leftrightarrow Q = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2\lambda t}}$$

من المفترض أن يكون المخمد ضعيفًا جدًا.

$\lambda \to 0$ و $e^{-2\lambda t} = 1 - 2\lambda T$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda T}$$

أيضًا:

$$Q = \frac{\omega}{2\lambda}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$$

$$\Delta \geq \Rightarrow \lambda \geq \omega_0$$

$$Q \leq \frac{1}{2}$$

لا توجد اهتزازات، والنظام غير دوري، يُكتب النظام شبه الدوري كالتالي:

$$T = \frac{2\lambda}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

$$T_0 = \frac{T_a}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

6.4.3 المذبذب التوافقي الكهربائي

يتضمن الدائرة المتذبذبة، بالإضافة إلى وجود الحث L والسعة C، أيضًا مقاومة أومية R. في هذا النوع من الدوائر، يسمح الحث L والسعة C باهتزاز الشحنة الكهربائية أو التيار، بينما تقدم المقاومة R تخميدًا. يتسبب هذا التخميد في انخفاض تدريجي في سعة الاهتزازات بمرور الوقت، مما يؤدي إلى فقدان الطاقة من خلال المقاومة.

$$U_R + U_c + U_L = 0$$

$$Ri(t) + \frac{1}{C}q + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q + L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

$$R\dot{q}+\frac{1}{C}q+L\ddot{q}=0$$
$$\ddot{q}+\frac{R}{L}\dot{q}+\frac{1}{LC}q=0$$
$$\Rightarrow \ddot{q}+2\lambda\dot{q}+\omega_0^2q=0$$

مع:

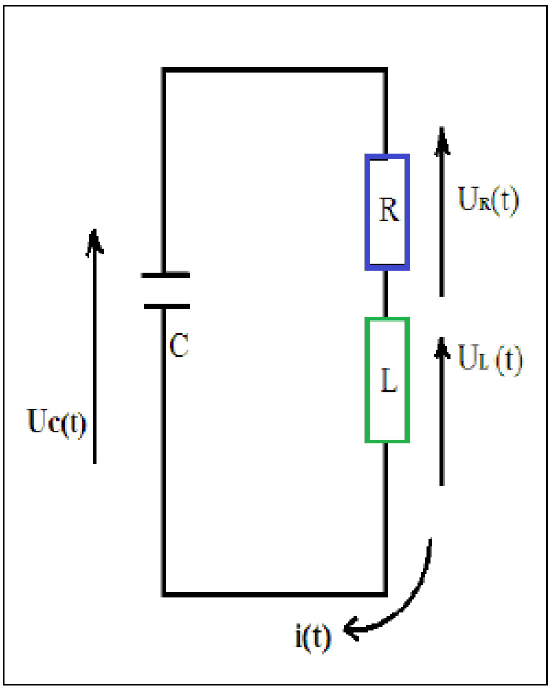
$$\begin{cases}\lambda = & \frac{R}{2L}\\ \omega_0^2 = & \frac{1}{LC}\end{cases}$$

لذا:

$$\ddot{q}+2\lambda\dot{q}+\omega_0^2q=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda = & \frac{R}{2L}\\ \omega_0 = & \sqrt{\frac{1}{LC}}\end{cases}$$

ملاحظة 3

بالنسبة للتخميد الحرج $\sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{R}{2L} \Leftarrow \lambda = \omega_0$ لذا: $R = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$



شكل 8.3: المذبذب التوافقي الكهربائي

الخاصية	اهتزازات ميكانيكية	اهتزازات كهربائية
معادلة الحركة	$m\ddot{x}+\lambda\dot{x}+kx=0$	$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{1}{C}q=0$
النبضة الذاتية	$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}(rds^{-1})$	$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$
معامل الاحتكاك اللزج	$\lambda(N.s.m^{-1})$	$R(\Omega)$
معامل التخميد	$\alpha=\frac{\lambda}{2m}(s^{-1})$	$\alpha=\frac{R}{2L}$
النبضة المتخمّدة	$\omega_\alpha=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{2\lambda}{4m^2}}(rd.s^{-1})$	$\omega_\alpha=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$
عامل الجودة	$Q=\sqrt{\frac{mk}{\lambda}}$	$Q=\frac{L}{R}\sqrt{\frac{L}{R}}$
الطاقة الحركية	$T=E_K=\frac{1}{2}m\dot{x}^2(J)$	$E_{BO}=\frac{1}{2}Li^2$
الطاقة الكامنة	$E_p=\frac{1}{2}k\dot{x}^2(J)$	$E_{co}=\frac{q^2}{C}$
دالة الفقدان	$D=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$	$E_D=\frac{1}{2}Ri^2$

جدول 1.3: التشابه بين الاهتزازات الميكانيكية والكهربائية

باب 4

نظام خطي مجبر بدرجة حرية واحدة

1.4 مقدمة

الرنين هو ظاهرة تحدث عندما يهتز النظام بشكل طبيعي عند تردد معين يُسمى **التردد الطبيعي**. عندما تقوم قوة خارجية أو مصدر طاقة بدفع النظام عند هذا التردد بالضبط، تزداد اهتزازات النظام بشكل كبير.

تخيل أنك تدفع شخصًا على أرجوحة. إذا دفعتهم في اللحظات المناسبة، متزامنًا مع إيقاع الأرجوحة الطبيعي، فإن كل دفعة تضيف طاقة أكثر، ويزداد ارتفاعهم مع كل مرة. هذا هو الرنين: حيث تكون دفعاتك (القوة الخارجية) متزامنة تمامًا مع التردد الطبيعي للأرجوحة، مما يجعل الحركة أكبر بكثير.

في سياقات أخرى، مثل الجسور أو المباني، يمكن أن يكون الرنين خطيرًا. إذا تزامنت الاهتزازات الناتجة عن الرياح أو حركة المرور أو مصادر أخرى مع التردد الطبيعي للهيكل، يمكن أن تتسبب في اهتزازات كبيرة بل وقد تؤدي إلى فشل هيكلي. لهذا السبب، يصمم المهندسون الهياكل بعناية لتجنب الرنين مع القوى الخارجية الشائعة.

تعريف 1

للحفاظ على الحركة المستمرة، يجب تزويد المهتز بالطاقة بشكل منتظم. يتم تحقيق ذلك من خلال قوة دافعة خارجية، والتي تحافظ على النظام في حالة اهتزاز. بعد فترة انتقالية، يهتز النظام بنفس تردد القوة الدافعة الخارجية.

2.4 معادلة لاغرانج للأنظمة المجبرة

عندما توجد قوة دافعة خارجية $F(t)$، يتم كتابة معادلة لاغرانج كالتالي: - للحركة الانتقالية:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=F(t)$$

- للحركة الدورانية:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=\mu(t)$$

حيث $\mu(t)=F_{\text{ext}}\cdot L\cdot\frac{\partial r}{\partial \theta}$.

- F_{ext}: القوة الخارجية المطبقة.
- L: طول ذراع القوة (المسافة من محور الدوران إلى نقطة تطبيق القوة).
- r: المسافة التي تقطعها الكتلة في اتجاه القوة.

1.2.4 مثال: نظام الكتلة - النابض - المثبط

لننظر في حالة بندول مرن عمودي، كما هو موضح في الشكل:

يتكون النظام من نابض ثابت مرونته k وكتلة m. تتعرض الكتلة لقوة تثبيط $\vec{F}_d=-\alpha\dot{x}$ وقوة دافعة خارجية $\vec{F}_{\text{ext}}=F_0\sin(\Omega t)$.

تُكتب معادلة لاغرانج كالتالي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}+F_{\text{ext}}\cdot t$$

- الطاقة الحركية للنظام: $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$
- الطاقة الكامنة للنظام: $U=\frac{1}{2}kx^2$
- دالة التثبيط للنظام: $D=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$
- دالة لاغرانج: $L=T-U=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2$

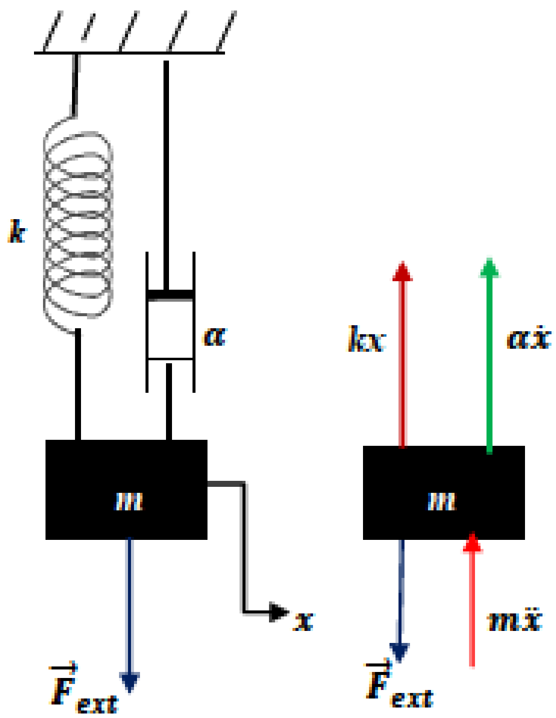
بالتعويض في المعادلة (IV.1)، نحصل على:

المعطيات:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-kx$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}=\alpha\dot{x}$$



شكل 1.4: نظام الكتلة - النابض - المثبط

بالتعويض بهذه القيم في معادلة لاغرانج:

$$m\ddot{x}+kx=-\alpha\dot{x}+F_0\sin(\Omega t)$$

بقسمة الطرفين على m:

$$\ddot{x}+\frac{\alpha}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$$

بتعريف $2\lambda=\frac{\alpha}{m}$ و $\omega_0^2=\frac{k}{m}$، نحصل على:

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$$

وهذه معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية تحتوي على حد دافِع.

3.4 حل المعادلة التفاضلية

حل هذه المعادلة التفاضلية هو مجموع الحل بدون الحد الدافِع (الحل المتجانس) $x_H(t)$ وحل خاص للمعادلة مع الحد الدافِع $x_p(t)$، بحيث يكون:

$$x_G(t)=x_H(t)+x_p(t)$$

- $x_H(t)$: الاستجابة الانتقالية. - $x_p(t)$: الاستجابة المستقرة أو الدائمة.

1.3.4 الاستجابة الانتقالية

هذا هو حل المعادلة المتجانسة:

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=0$$

بالنسبة للتخميد الضعيف $(\lambda<\omega_0)$، يكون الحل:

$$x_h(t)=Ce^{-\lambda t}\cos(\omega_d t+\theta)$$

حيث $\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$.

حل **الاهتزازات المجبرة** يتضمن تحليل نظام يتم فيه قيادة الاهتزاز بواسطة قوة خارجية. تكون هذه القوة عادةً دورية، مثل $F(t)=F_0\sin(\Omega t)$، حيث F_0 هو السعة وΩ هو التردد الدافع. النهج العام لحل الاهتزازات المجبرة يجمع بين الاستجابة الطبيعية للنظام (الحل بدون القوة الدافعة) مع الحل الخاص الناتج عن القوة الخارجية.

إليك خطوات حل الاهتزازات المجبرة، خاصة لنظام كتلة-نابض مخمد:

1. الخطوة 1: إعداد المعادلة التفاضلية
بالنسبة لنظام كتلة-نابض مخمد بكتلة m، معامل تخميد c، ثابت النابض k، وقوة دافعة خارجية $F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$، تكون معادلة الحركة كالتالي:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin(\Omega t)$$

يمكن إعادة كتابتها كالتالي:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$$

حيث: - $\lambda = \frac{c}{2m}$ هو معامل التخميد. - $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ هو التردد الطبيعي للنظام غير المخمد.

2. الخطوة 2: إيجاد الحل المتجانس (الاستجابة الطبيعية)
المعادلة **المتجانسة** هي المعادلة بدون القوة الدافعة:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

يعتمد الحل لهذه المعادلة، $x_h(t)$، على نسبة التخميد $\zeta = \frac{\lambda}{\omega_0}$:

(ا) الحالة ذات التخميد الضعيف $(\zeta < 1)$:

$$x_h(t) = e^{-\lambda t}\left(C_1\cos(\omega_d t) + C_2\sin(\omega_d t)\right)$$

حيث $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ هو التردد الطبيعي المخمد.

(ب) الحالة ذات التخميد الحرج $(\zeta = 1)$:

$$x_h(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\lambda t}$$

(ج) الحالة ذات التخميد الزائد $(\zeta > 1)$:

$$x_h(t) = C_1 e^{-(\lambda+\omega_r)t} + C_2 e^{-(\lambda-\omega_r)t}$$

حيث $\omega_r = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$. الثوابت C_1 و C_2 تُحدد بناءً على الشروط الابتدائية.

3. الخطوة 3: إيجاد الحل الخاص (الاستجابة المجبرة)
لإيجاد الحل الخاص $x_p(t)$ الناتج عن القوة الدافعة، نفترض حلاً له نفس شكل القوة الدافعة. بالنسبة لقوة جيبية $F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$، نجرب:

$$x_p(t) = A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t)$$

نقوم بالتعويض عن $x_p(t)$ ومشتقاته في المعادلة التفاضلية الأصلية ونحل لإيجاد A و B. يؤدي هذا إلى:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$$

وزاوية الطور ϕ حيث:

$$\tan\phi = \frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

يمكن كتابة الحل الخاص بعد ذلك كالتالي:

$$x_p(t) = A\sin(\Omega t + \phi)$$

4. الخطوة 4: كتابة الحل العام

الحل الكلي $x(t)$ هو مجموع الحل المتجانس والحل الخاص:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

يتضمن هذا كلاً من الاستجابة الانتقالية (الحل المتجانس)، التي تتلاشى بمرور الوقت إذا كان هناك تخميد، والاستجابة المستقرة (الحل الخاص)، التي تهتز بتردد القوة الدافعة Ω إلى ما لا نهاية.

5. الخطوة 5: تطبيق الشروط الابتدائية (إذا لزم الأمر)

إذا كانت هناك شروط ابتدائية، يتم استخدامها لتحديد الثوابت C_1 و C_2 في الحل المتجانس. سيعطي ذلك الحل الكامل الذي يناسب الشروط الابتدائية المحددة للنظام.

6. الخطوة 6: تحليل الحل من أجل الرنين

يحدث الرنين عندما يكون تردد القوة الدافعة Ω قريباً من التردد الطبيعي ω_0 للنظام. في هذه الحالة، يمكن أن تصبح سعة الحل الخاص $x_p(t)$ كبيرة جدًا، حيث يمتص النظام الطاقة من القوة الخارجية بكفاءة أعلى. يمكن رؤية ذلك في صيغة A، حيث يصبح المقام صغيرًا جدًا إذا كانت $\Omega \approx \omega_0$، مما يؤدي إلى اهتزازات كبيرة.

2.3.4 الملخص

1. إعداد المعادلة التفاضلية مع القوة الدافعة.
2. حل المعادلة المتجانسة للحصول على الاستجابة الانتقالية.
3. إيجاد الحل الخاص للاستجابة المستقرة باستخدام شكل القوة الدافعة.
4. دمج الحلول للحصول على الاستجابة العامة.
5. تطبيق الشروط الابتدائية إذا كانت موجودة.
6. التحقق من شروط الرنين، حيث قد تؤدي المطابقات بين تردد القوة الدافعة والتردد الطبيعي للنظام إلى سعات كبيرة.

3.3.4 الاستجابة المستقرة

يكون هذا الحل مشابهاً لشكل القوة الدافعة ويحل المعادلة الكاملة للحركة:

$$x_p(t) = A\sin(\Omega t + \phi)$$

يمثل هذا السلوك طويل الأمد للنظام حيث يهتز بتردد القوة الدافعة Ω.

4.4 دراسة النظام في حالة الاستجابة المستقرة

في حالة الاستجابة المستقرة، يبقى فقط الحل الخاص:

$$x(t) = x_p(t)$$

باستخدام التمثيلات المركبة، يمكن حساب سعة الاهتزاز A كالتالي:

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (\alpha\Omega)^2}}$$

ويتم إعطاء زاوية الطور ϕ، التي تمثل الفرق في الطور بين الإزاحة والقوة الدافعة، كالتالي:

$$\phi = \arctan\left(\frac{\alpha\Omega}{k - m\Omega^2}\right)$$

1.4.4 دراسة الاستجابة المستقرة

في حالة الاستجابة المستقرة، يوجد فقط الحل الخاص، لذا:

$$x(t) \approx x_p = A\sin(\Omega t + \phi)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية:

$$\ddot{x}_p + 2\lambda \dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F(t)}{m}$$

وباستخدام التمثيلات المركبة:

1. نفترض

$$x_p = \tilde{A}e^{i(\Omega t+\phi)} = \tilde{A}e^{i\Omega t}$$

حيث $\tilde{A}$ هو السعة المركبة.

2. إذن:

$$\dot{x}_p = i\Omega \tilde{A}e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{x}_p = -\Omega^2 \tilde{A}e^{i\Omega t}$$

3. القوة الدافعة $F(t) = F_0 e^{i\Omega t}$

بالتعويض عن هذه القيم في المعادلة نحصل على:

$$-\Omega^2 \tilde{A}e^{i\Omega t} + 2i\lambda\Omega\tilde{A}e^{i\Omega t} + \omega_0^2 \tilde{A}e^{i\Omega t} = \frac{F_0}{m}e^{i\Omega t}$$

نبسط لإيجاد السعة المركبة $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\lambda\Omega}$$

للتعبير عن هذه القيمة من حيث المقدار، نفصل الأجزاء الحقيقية والتخيلية:

$$|\tilde{A}| = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$$

وهكذا، يكون الحل لهذا المهتز المجبر في حالة الاستجابة المستقرة هو:

$$x(t) = A\sin(\Omega t + \phi)$$

حيث أن سعة الاهتزاز A هي:

$$A = \left|\tilde{A}\right| = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$$

هذا التعبير يصف سعة الاهتزاز عند تردد القوة الدافعة Ω، مع أخذ تأثير التخميد في النظام بعين الاعتبار.
يتم إعطاء التعبير عن السعة المركبة $\tilde{A}$ كالتالي:

$$\tilde{A} = \frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2i\lambda\Omega} = \frac{\frac{F_0}{m}\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2} - i\frac{\frac{F_0}{m}\cdot 2\lambda\Omega}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}$$

يمكن بعد ذلك كتابة الحل في حالة الاستجابة المستقرة لهذا المهتز المجبر كالتالي:

$$x(t) = A\sin(\Omega t + \phi)$$

حيث أن سعة الاهتزاز A هي:

$$A = |\tilde{A}| = \sqrt{\left(\frac{\frac{F_0}{m}\cdot(\omega_0^2 - \Omega^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{F_0}{m}\cdot 2\lambda\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}\right)^2}$$

تعتمد هذه السعة A على التردد الطبيعي ω_0، ومعامل التخميد λ، وتردد القوة الدافعة Ω، وقوة الدفع F_0. هذا التفاعل يوضح كيف تتغير سعة الاهتزازات المجبرة مع اختلاف ترددات القوى الدافعة ومعاملات التخميد.

شرح الحل والملاحظات الهامة

يتم إعطاء **سعة** الاهتزاز A كالتالي:

$$A = \left|\tilde{A}\right| = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$$

و**زاوية الطور** ϕ، التي تمثل فرق الطور بين $x(t)$ والقوة الدافعة $F(t)$، تُعطى كالتالي:

$$\tan\phi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

بالتالي، يمكن كتابة الحل الخاص $x_p(t)$ كالتالي:

$$x_p(t) = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}\sin\left(\Omega t + \arctan\left(\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)\right)$$

هذا الحل الخاص يمثل استجابة النظام للقوة الدافعة، ويأخذ في الاعتبار تأثير التخميد وزاوية الطور الناتجة عن اختلاف التردد الطبيعي للنظام ω_0 وتردد القوة الدافعة Ω. ملاحظات هامة

1. **الحل العام**:
- الحل العام هو مجموع جزأين: - **حل متجانس** بسعة وطاقة تتضاءل بمرور الوقت حتى تصبح صفراً، ويُعرف هذا بـ **الحل الانتقالي**. - **حل خاص** بسعة ثابتة A وتردد يتطابق مع القوة الدافعة، ويمثل **الحل المستقر** أو **الحل الدائم**. - السعة A للحل الخاص تُعطى كالتالي:

$$A = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$$

2. **السلوك على المدى الطويل**:
- بمرور الوقت، يختفي الحل الانتقالي (المتجانس)، وتبقى فقط الحركة التذبذبية المستقرة. - للأزمنة $t < t_0$، تكون الحركة الكلية هي مجموع الحل الانتقالي والحل الدائم:

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t)$$

- للأزمنة $t \geq t_0$، تبقى فقط الحركة المستقرة:

$$x(t) = x_p(t)$$

يوضح هذا التحليل كيف تُظهر الأنظمة في البداية استجابات انتقالية ومستقرة، ولكن في النهاية تظل الاستجابة المستقرة فقط.
تُعد **نسبة التخميد** ضرورية في التنبؤ بكيفية استجابة الأنظمة للاضطرابات، وتتنوع بشكل كبير حسب التطبيقات:

1. أنظمة تعليق السيارات: تكون عادةً ذات تخميد منخفض لتوفير الراحة، مما يسمح بالاستقرار السريع بعد المطبات. أنظمة التعليق ذات التخميد الزائد تشعر بالسوء وتبدو قاسية، في حين أن الأنظمة ذات التخميد الحرج تقلل من الارتداد، وهي مثالية للسيارات الفاخرة.

2. مغلّقات الأبواب: توفر المغلّقات ذات التخميد الحرج إغلاقاً سلساً بدون ارتداد. المغلّقات ذات التخميد المنخفض قد تُغلق بسرعة شديدة مع ضوضاء، بينما تكون المغلّقات ذات التخميد الزائد بطيئة.

3. المباني والجسور: تُصمم بتخميد حرج أو زائد لمنع التأرجح بسبب الرياح أو الزلازل. يمكن أن يؤدي التخميد غير الكافي إلى اهتزازات هيكلية، كما حدث في انهيار جسر "تاكوما ناروز".

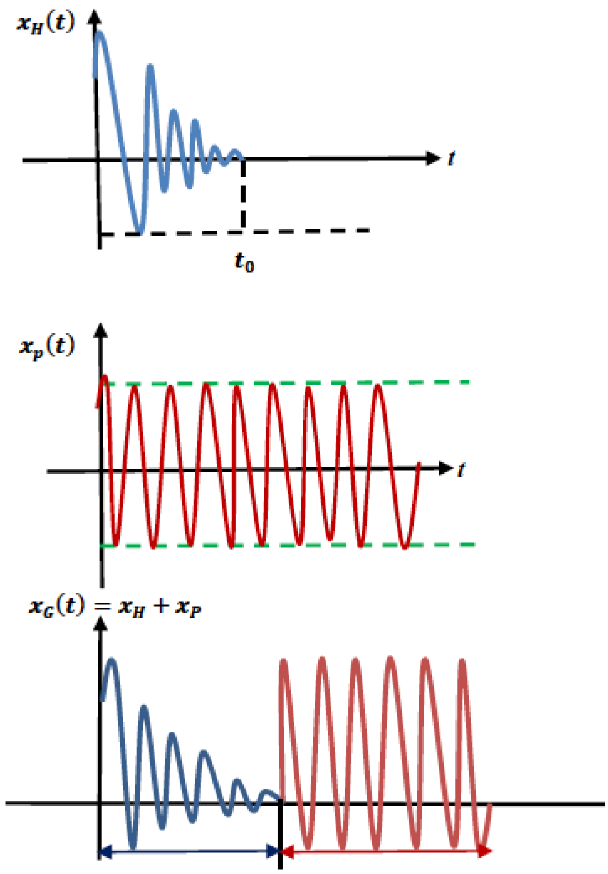
4. الدوائر الإلكترونية (دوائر :(RLC يُستخدم التخميد المناسب حسب الهدف؛ مثل التخميد المنخفض لضبط الترددات الراديوية، والتخميد الحرج لاستجابة سريعة في المرشحات، والتخميد الزائد لتحقيق الاستقرار في مزودات الطاقة.

5. الهندسة الزلزالية والهندسة المضادة للزلازل: تستخدم المباني المقاومة للزلازل التخميد الزائد لتجنب الاهتزازات أثناء الزلازل، باستخدام ممتصات الاهتزازات لامتصاص طاقة الحركة الأرضية. كما تُستخدم التخميدات الحرجة في التصميمات المتقدمة المضادة للزلازل.

6. عجلات هبوط الطائرات: توفر عجلات الهبوط ذات التخميد الخفيف أو الحرج استقرارًا أثناء الهبوط، حيث تمتص الصدمات دون ارتداد مفرط.

7. معدات الرياضة: تُصمم مضارب التنس وعصي الجولف بتخميد منخفض لنقل الطاقة إلى الكرة. تُستخدم مواد تخميد إضافية لتقليل اهتزازات اليد لراحة أكبر.

8. أنظمة الصوت ومكبرات الصوت: توفر مكبرات الصوت ذات التخميد المنخفض صوتًا قويًا في النطاقات المنخفضة ولكن قد تنتج صوتًا رنانًا. بينما يوفر التخميد الحرج أو الزائد صوتًا دقيقًا وواضحًا بجودة عالية.



شكل 2.4: النظام الانتقالي والنظام الدائم

2.4.4 ظاهرة الرنين

رنين السعة

سوف نقوم بدراسة تغير السعة A كدالة لتردد الإثارة Ω:

$$A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}$$

عندما: - $\Omega = 0$:

$$A(0) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

- $\Omega \to \infty$:

$$A(\infty) = 0$$

يتم الحصول على السعة القصوى عندما $\frac{dA}{d\Omega} = 0$:

$$\frac{dA}{d\Omega} = \frac{[2(-2\lambda)(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\lambda^2\Omega]\frac{F_0}{m}}{2((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow (-\omega_0^2 + \Omega^2) + 2\lambda\Omega = 0$$

$$\Rightarrow \Omega^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2$$

يُطلق على هذا التردد اسم **التردد الرنيني** ويرمز له بـ:

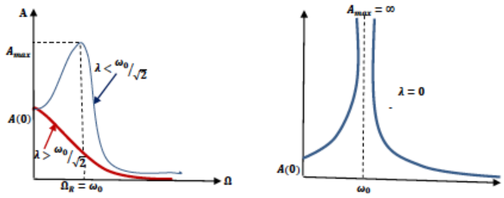
$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

عند هذا التردد، توجد السعة القصوى فقط إذا كان:

$$\lambda < \frac{\omega_0}{2} \quad ; \quad (\Omega_R > 0)$$

تكون السعة القصوى حينها:

$$A_{\max} = \frac{F_0}{m \cdot 2\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$



شكل 3.4: تغير السعة a كدالة لـ Ω).

تغير الطور كدالة للتردد Ω

وجدنا أن:

$$\tan\phi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$\frac{d\phi}{d\Omega} = \cos^2\phi \cdot \frac{d(\tan\phi)}{d\Omega} \quad \text{و} \quad \cos\phi = \frac{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}$$

$$\frac{d\phi}{d\Omega} = \frac{-2\lambda\left(\omega_0^2 + \Omega^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}$$

ملاحظات:

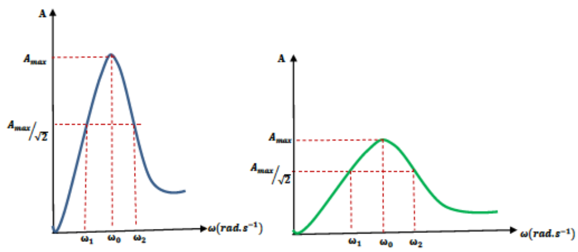
- إذا كانت $\Omega \to 0$: - فإن $\tan\phi \to 0$ و $\frac{d\phi}{d\Omega} \approx -\frac{2\lambda}{\omega_0}$.
- إذا كانت $\Omega \to \omega_0$: - $\phi = \frac{\pi}{2}$، مما يعني أن الإزاحة متقدمة بمقدار $\frac{\pi}{2}$ على الإثارة.
- عندما $\Omega \to \infty$: - يميل كل من $\tan\phi$ و $\frac{d\phi}{d\Omega}$ نحو الصفر. - نظرًا لأن $\frac{d\phi}{d\Omega}$ دائمًا سالب، فإن فرق الطور يكون $-\pi$.

تغير الطور كدالة للتردد Ω

لقد وجدنا:

$$\tan\phi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$\frac{d\phi}{d\Omega} = \cos^2\phi \cdot \frac{d(\tan\phi)}{d\Omega} \quad \text{و} \quad \cos\phi = \frac{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}$$



شكل 4.4: رسم بياني يقل الرنين ومعامل الجودة.

$$\frac{d\phi}{d\Omega} = \frac{-2\lambda\left(\omega_0^2+\Omega^2\right)}{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\lambda^2\Omega^2}$$

ظاهرة الرنين ومعامل الجودة

تظهر ظاهرة الرنين عندما يقترب تردد الإثارة من التردد الطبيعي للنظام.
في الأنظمة الكهربائية، تسمح هذه الظاهرة بحساب معامل الجودة Q، الذي يزداد حسب العلاقة:

$$Q = \frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{1}{2\zeta}$$

وتوجد طريقة عملية أخرى لتحديد معامل الجودة:

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}$$

حيث يمثل $\omega_2-\omega_1$ عرض النطاق الترددي.

3.4.4 الخاتمة

- عندما يقل Q ⇐ يزيد $\omega_2-\omega_1$ ⇐ تصبح منحنى الرنين أعرض ⇐ تتناقص السعة عند الرنين ومعامل الجودة. - تتوافق نهايات عرض النطاق مع سعة تقل بمقدار $\sqrt{2}$ مرة عن السعة عند الرنين.

باب 5

المذبذبات المقترنة

1.5 مقدمة

1.1.5 المذبذبات المقترنة

تعريف 1

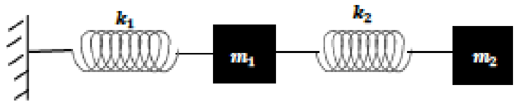
تشير المذبذبات المقترنة إلى الأنظمة التي تحتوي على اثنين أو أكثر من المذبذبات التي تتفاعل أو تؤثر على بعضها البعض من خلال آلية اقتران. في الأنظمة المقترنة، يتم ربط المذبذبات بحيث يمكن للطاقة أن تنتقل بينها. يؤدي هذا الانتقال للطاقة إلى سلوك اهتزازي معقد يعتمد على طبيعة الاقتران وخصائص كل مذبذب.

تبادل الطاقة:

في الأنظمة المقترنة، تقوم المذبذبات بتبادل الطاقة. على سبيل المثال، في نظام ميكانيكي، يمكن أن يتبادل بندولان متصلان بنابض الطاقة ذهابًا وإيابًا أثناء اهتزازهما. يتيح الاقتران لكل مذبذب أن يؤثر على حركة الآخر، مما يؤدي إلى استجابة ديناميكية مشتركة.

أنواع الاقتران في المذبذبات الميكانيكية:

1. الاقتران المرن:
في هذا النوع، يتم توصيل المذبذبات بواسطة عناصر مرنة، مثل النوابض. توفر النوابض قوة استرجاع تؤثر على حركة كل مذبذب، مما يسمح لها بالتفاعل. يمكن إعداد الاقتران المرن مع مذبذبات موضوعة إما أفقيًا أو عموديًا. عندما يتعرض النظام لاضطراب، تبدأ المذبذبات في الاهتزاز، وتنتقل الطاقة عبر النابض.



شكل 1.5: المذبذبات الميكانيكية الحرة المقترنة بالمرونة

2. الاقتران بالقصور الذاتي:
في هذه الحالة، يتم توصيل المذبذبات بواسطة كتلة، مما يضيف القصور الذاتي إلى النظام. تعمل الكتلة كجسر بين المذبذبات، مما يؤدي إلى تأثير كل منها على حركة الآخر من خلال القصور الذاتي المشترك. يُرى هذا النوع من الاقتران بشكل شائع في الأنظمة التي تحتوي على بندولات مرتبطة بكتلة مشتركة في مركزها.

2.5 مثال على المذبذبات الحرة المقترنة

1.2.5 الأنظمة الميكانيكية

مذبذبات ميكانيكية حرة مقترنة بالمرونة:

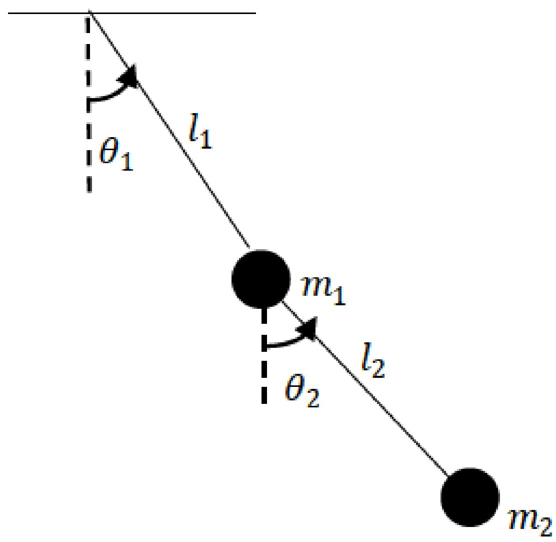
في هذا التكوين، يتم توصيل كتلتين m_1 و m_2 بواسطة نابضين ثابتاهما k_1 و k_2. تولد النوابض قوة تؤثر على كل كتلة، مما يؤدي إلى حركة مقترنة عندما يتم إزاحة إحدى الكتل. تسبب قوة الاسترجاع من كل نابض انتقال الطاقة بين الكتلتين، مما يؤدي إلى تزامن في الاهتزاز، كما هو موضح في الشكل 5-1.

شرح الرسم التوضيحي:

يوضح الرسم (الشكل 5-1) كتلتين m_1 و m_2 متصلتين بنابضين ثابتاهما k_1 و k_2، مما يمثل اقترانًا مرنًا. عند تحريك إحدى الكتل، تؤثر النوابض بقوى تؤثر على حركة الكتلتين، مما يؤدي إلى حركة اهتزازية مقترنة.

مذبذبات ميكانيكية حرة مقترنة بالقصور الذاتي:

هنا، يتم تحقيق الاقتران من خلال كتلة مشتركة. على سبيل المثال، اثنان من البندولات، كل منهما بكتل m_1 و m_2، مرتبطان بقضيب يحتوي على كتلة في الوسط. يوفر القضيب قصورًا ذاتيًا يربط حركة البندولين بحيث تؤثر اهتزازاتهما على بعضها البعض. عندما يتحرك أحد البندولين، يؤدي ذلك إلى تحرك الكتلة المركزية، مما يؤثر على حركة البندول الآخر.



شكل 2.5: المذبذبات الميكانيكية الحرة المقترنة بالقصور الذاتي

شرح الرسم التوضيحي:

في الشكل 5-2، يظهر نواسان بكتل m_1 و m_2 مرتبطان بقضيب يحتوي على كتلة مركزية. تعمل هذه الكتلة المركزية كآلية اقتران، مما يسمح باهتزاز كل بندول بالتأثير على الآخر من خلال قصور الكتلة المركزية.

ملاحظة 1

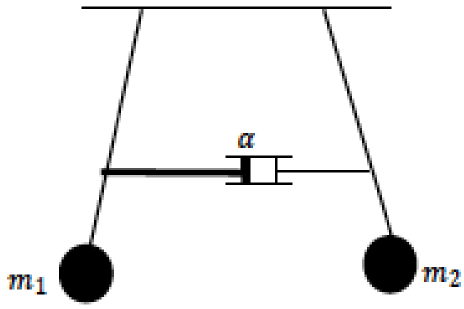
اقتران مرن (نوابض) لنقل الطاقة من خلال قوى مرنة. - اقتران بالقصور الذاتي (كتلة مركزية) لنقل الطاقة من خلال القصور الذاتي المشترك.

1. - اقتران مرن (نوابض) لنقل الطاقة من خلال قوى مرنة.
2. - اقتران بالقصور الذاتي (كتلة مركزية) لنقل الطاقة من خلال القصور الذاتي المشترك.

كل نوع من أنواع الاقتران يؤدي إلى سلوك اهتزازي مختلف، ويتأثر بعوامل مثل صلابة النوابض في الاقتران المرن أو توزيع الكتلة في الاقتران بالقصور الذاتي. هذه المفاهيم أساسية لفهم ديناميات الأنظمة المقترنة، وهي منتشرة في مجالات مثل الفيزياء والهندسة وعلم الأحياء.

الاقتران اللزج في المذبذبات الميكانيكية:

في هذا التكوين، يكون الاقتران ناتجًا عن آلية "احتكاك لزج". يتحقق هذا النوع من الاقتران من خلال عنصر تخميد يقدم مقاومة للحركة، مما يؤدي إلى تبديد الطاقة بين المذبذبات. شرح المخطط: توضح

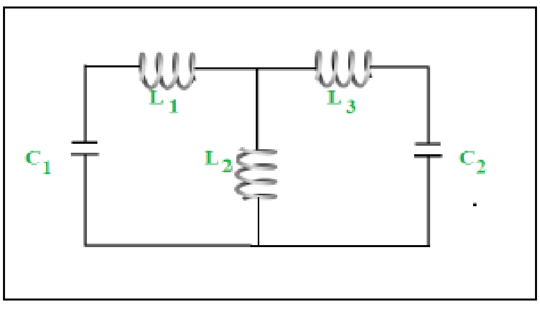


شكل 3.5: الاقتران اللزج في المذبذبات الميكانيكية

الشكل 5-3 كتلتين m_1 و m_2 متصلتين بعنصر امتصاص مزود بمعامل احتكاك لزج α. يسمح قوة الامتصاص بين الكتل بنقل الطاقة بطريقة تقلل تدريجيًا من سعة التذبذبات بسبب الطبيعة المبددة للترابط اللزج.

الاقتران بالقصور الذاتي في المذبذبات الكهربائية:

يتم تمثيل هذا الاقتران من خلال وصلة تحريضية في دائرة كهربائية. هنا، تُستخدم الملفات (المحاثات) لربط دائرتين من نوع LC. تُنتج المحاثات مجالًا مغناطيسيًا يسمح لتذبذبات إحدى الدائرتين بالتأثير على الأخرى.



شكل 4.5: الاقتران بالقصور الذاتي في المذبذبات الكهربائية

الاقتران اللزج في المذبذبات الكهربائية:

في الأنظمة الكهربائية، يتم تمثيل الاقتران اللزج بواسطة **وصلة مقاومة**. يتم استخدام المقاوم لتوصيل دائرتين متذبذبتين، مما يؤدي إلى تأثير تخميد مماثل للاقتران اللزج الميكانيكي.
- شرح الرسم التخطيطي :يوضح الشكل 5-4 دائرتين LC مقترنتين بمحثات L_1 وL_2 وL_3 ومكثفات C_1 وC_2. يسمح الاقتران الحثي بنقل الطاقة عبر المحاثة المتبادلة، مما يؤدي إلى تذبذبات متزامنة بين الدوائر.
- شرح الرسم التخطيطي: يوضح الشكل 5-5 دائرتين LC متصلتين بمقاوم R بينهما. يقدم المقاوم تأثير تخميد، مما يسمح بتبديد الطاقة. تقلل طريقة الاقتران هذه من سعة التذبذبات بمرور الوقت، على غرار الاقتران اللزج الميكانيكي.

توضح هذه الأمثلة طرقًا مختلفة لربط المذبذبات، بما في ذلك: - الاقتران اللزج الميكانيكي (قوة التخميد). - الاقتران بالقصور الذاتي الكهربائي (الوصلة الحثي). - الاقتران اللزج الكهربائي (الوصلة المقاومة).

يؤثر كل نوع من أنواع الاقتران على ديناميكيات النظام من خلال التحكم في نقل الطاقة وتبديدها، مما يؤثر على مزامنة التذبذب والسعة والتردد.

3.5 نظام ذو درجتين من الحرية

لتحليل الأنظمة ذات درجتين من الحرية، من الضروري كتابة معادلتين تفاضليتين للحركة، والتي يمكن اشتقاقها باستخدام معادلات لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

حيث يمثل q_1 وq_2 الإحداثيات المعممة للنظام. بالنسبة للنظام الذي يحتوي على إحداثيين معممين، سيكون هناك معادلتان تفاضليتان وترددان طبيعيان (يشار إليهما بـ ω_1 وω_2).

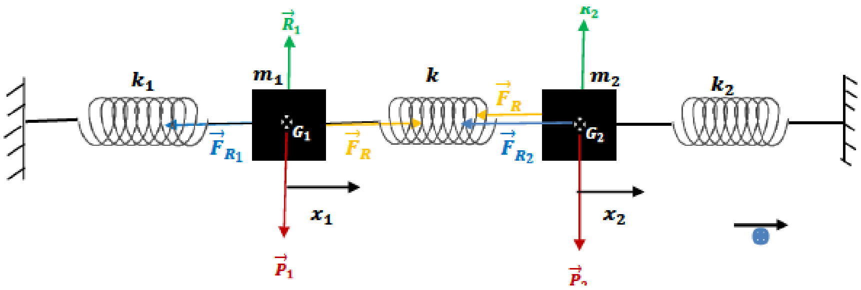
1.3.5 مثال: نظام كتلة-زنبرك

في هذا المثال، يتكون النظام من كتلتين (m_1 وm_2) متصلتين بنوابض ذات ثوابت k_1، وk_2، وk، كما هو موضح في الرسم التخطيطي.

معادلات الحركة

لاستنتاج معادلات الحركة، نطبق قانون نيوتن الثاني مباشرة:

1. بالنسبة للكتلة m_1:
تشمل القوى المؤثرة على m_1 القوة من الزنبرك k_1 (المتصل بنقطة ثابتة)، والقوة من الزنبرك k (المتصل بـ k_2)، وأي قوة خارجية F_{ext}.



شكل 5.5: نوابض الكتلة

معادلة الحركة لـ m_1 هي:

$$m_1\ddot{x}_1 = F_{\text{ext}} - (k_1x_1) - k(x_1 - x_2)$$

2. بالنسبة للكتلة m_2:

وبالمثل، فإن القوى المؤثرة على m_2 تشمل القوة من الزنبرك k_2 (المتصل بنقطة ثابتة)، والقوة من الزنبرك k (المتصل بـ m_1)، وأي قوة خارجية F_{ext}.
معادلة الحركة لـ m_2 هي:

$$m_2\ddot{x}_2 = F_{\text{ext}} - (k_2x_2) + k(x_1 - x_2)$$

نظام المعادلات

نظام المعادلات التي تصف حركة الكتل هو كما يلي:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k)x_1 - kx_2 &= 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k)x_2 - kx_1 &= 0 \end{cases}$$

يمكن حل معادلات التفاضل المقترنة هذه لإيجاد الترددات الطبيعية ω_1 وω_2 وأشكال الوضع للنظام. يوفر هذا التحليل رؤى حول سلوك المذبذبات المقترنة، حيث يوضح كيفية تفاعل الكتل عبر النوابض وكيفية انتقال الطاقة بينها في نظام مقترن. إليك ترجمة النص إلى العربية:

1. تطبيق القانون الثاني لنيوتن (PFD) بشكل مباشر:
   - للكتلة m_1:

$$\sum F_{\text{ext}} = m_1\ddot{x}_1$$

- للكتلة m_2:

$$\sum F_{\text{ext}} = m_2 \ddot{x}_2$$

2. تحليل القوى المؤثرة على كل كتلة:
- للكتلة m_1:

$$F_{k1} + F_k = m_1 \ddot{x}_1$$

حيث F_{k1} هو القوة الناتجة عن الزنبرك k_1، و F_k هو القوة الناتجة عن الزنبرك المتصل الذي يربط m_1 بـ m_2.
- للكتلة m_2:

$$F_{k2} + F_k = m_2 \ddot{x}_2$$

حيث F_{k2} هو القوة الناتجة عن الزنبرك k_2، و F_k هو القوة الناتجة عن الزنبرك المتصل.
إليك ترجمة النص إلى العربية:

(ا) كتابة معادلات القوى بدلالة الإزاحات: - القوة المؤثرة على m_1 من الزنبركات:

$$-k_1 x_1 + k(x_2 - x_1) = m_1 \ddot{x}_1$$

- القوة المؤثرة على m_2 من الزنبركات:

$$-k_2 x_2 + k(x_1 - x_2) = m_2 \ddot{x}_2$$

(ب) تبسيط المعادلات: - إعادة ترتيب المعادلات لتجميع الحدود التي تحتوي على x_1 و x_2:

$$-(k + k_1) x_1 + k x_2 = m_1 \ddot{x}_1$$

$$-(k + k_2) x_2 + k x_1 = m_2 \ddot{x}_2$$

(ج) الشكل النهائي للمعادلات التفاضلية المترابطة: - للكتلة m_1:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k + k_1) x_1 - k x_2 = 0$$

- للكتلة m_2:

$$m_2 \ddot{x}_2 + (k + k_2) x_2 - k x_1 = 0$$

هذان المعادلتان تمثلان المعادلات التفاضلية المترابطة للحركة للكتلتين في النظام. حل هذه المعادلات يسمح لنا بتحديد الترددات الطبيعية وأشكال الأنماط للنظام، والتي تصف كيفية اهتزاز الكتل معًا تحت التأثير.

تُظهر الصورة نظام المعادلات للمذبذبات المترابطة، حيث نتعامل مع المذبذبات على أنها منفصلة للتبسيط. فيما يلي ترجمة خطوة بخطوة وشرح لكل جزء:

معادلات الحركة

1. نظام بداية المعادلات المقترنة (5-1): - يصف نظام المعادلات حركة كتلتين، m_1 وm_2، متصلتين بنوابض ذات ثوابت k_1، k_2، ونابض اقتران k:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{k+k_1}{m_1}x_1 - \frac{k}{m_1}x_2 & = 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{k+k_2}{m_2}x_2 - \frac{k}{m_2}x_1 & = 0 \end{cases} \tag{1}$$

فصل المذبذبات

2. باستخدام مفهوم المذبذبات المنفصلة: - لتبسيط الأمر، ننظر إلى كل مذبذب على حدة من خلال تثبيت كتلة واحدة في كل مرة.

- الخطوة 1: تثبيت m_2 (بافتراض أن m_2 لا يتحرك): - التردد الطبيعي (النبض) للمذبذب المنفصل مع m_1 الحر في الحركة هو:

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{k+k_1}{m_1}}$$

-الخطوة 2: تثبيت m_1 (بافتراض أن m_1 لا يتحرك): - التردد الطبيعي للمذبذب المنفصل مع m_2 حر في الحركة هو:

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{k+k_2}{m_2}}$$

تعريف الترددات الطبيعية للمذبذبات المنفصلة

3. تعريف الترددات الطبيعية: - للمذبذب m_1:

$$\omega_{01}^2 = \frac{k+k_1}{m_1}$$

- للمذبذب m_2:

$$\omega_{02}^2 = \frac{k+k_2}{m_2}$$

4. التعويض في النظام: - يمكن الآن إعادة كتابة نظام المعادلات التفاضلية من حيث الترددات الطبيعية المنفصلة:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_{01}^2 x_1 - \frac{k}{m_1}x_2 & = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_{02}^2 x_2 - \frac{k}{m_2}x_1 & = 0 \end{cases}$$

تصف هذه المعادلات حركة كل كتلة من حيث الترددات الطبيعية المعدلة (المنفصلة)، مما يُبسط التحليل اللاحق.

4.5 اشتقاق معادلات الحركة باستخدام طريقة لاغرانج

نبدأ بحساب طاقة الحركة والطاقة الكامنة لنظام يتكون من كتلتين.

(ا) طاقة الحركة (T): طاقة الحركة للنظام تُعطى بالعلاقة:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

حيث: - m_1 و m_2: الكتل، - $\dot{x}_1$ و $\dot{x}_2$: السرعات لكل كتلة.

(ب) الطاقة الكامنة (U): تشمل الطاقة الكامنة في النظام مساهمات النابضين المرتبطين بكل كتلة والنابض الرابط بين الكتلتين:

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$$

حيث: - k_1 و k_2: ثوابت النابض للنابضين الفرديين، - k: ثابت النابض الرابط بين الكتلتين.

اللاغرانجي (L)

: اللاغرانجي L هو الفرق بين طاقة الحركة والطاقة الكامنة:

$$L = T - U$$

تطبيق معادلات لاغرانج

: يتم اشتقاق معادلات الحركة من خلال تطبيق معادلات لاغرانج لكل إحداثي x_1 و x_2:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

تتيح هذه المعادلات وصف حركة كل كتلة من حيث طاقات النظام الحركية والكامنة. يمكن حل هذه المعادلات التفاضلية للحصول على حركة كل كتلة كدالة للزمن.

5.5 إيجاد الترددات الطبيعية باستخدام الطريقة المصفوفية

لإيجاد الترددات الطبيعية (ترددات Eigen) للنظام، نبدأ بمراجعة المعادلات (V.1) والبحث عن حلول على الشكل:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad A_1 > 0$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \quad A_2 > 0$$

باستخدام التدوين المركب، يمكن تمثيل هذه الحلول كالتالي:

$$\bar{x}_1 = A_1 e^{i(\omega t - \varphi_1)}$$

$$\bar{x}_2 = A_2 e^{i(\omega t - \varphi_2)}$$

بتعويض هذه التعبيرات في النظام (V.1)، نحصل على:

$$\begin{cases} \left(\omega_{01}^2 - \omega^2\right) \bar{x}_1 - \frac{k}{m_2} \bar{x}_2 & = 0 \\ -\frac{k}{m_1} \bar{x}_1 + \left(\omega_{02}^2 - \omega^2\right) \bar{x}_2 & = 0 \end{cases} \quad (5-2) \tag{2}$$

تمثل هذه المعادلات الآن في صورة مصفوفية كما في المعادلة (2-5)، مما يسمح لنا بحساب الترددات الذاتية - الترددات الذاتية (Eigenfrequencies)- للنظام من خلال جعل المحدد (determinant) مساويًا للصفر، مما يؤدي إلى معادلة مميزة. حل هذه المعادلة يوفر الترددات الطبيعية التي يهتز عندها النظام.

النظام المتجانس يقبل حلولًا غير صفرية إذا، وفقط إذا، كان المحدد في المعادلة (V.3) يساوي الصفر. وهذا يعطي:

$$\det(\mathbf{M} - \omega^2 \mathbf{I}) = 0$$

حيث: - $\mathbf{M}$: مصفوفة المعاملات، - ω^2: القيم الذاتية، - $\mathbf{I}$: مصفوفة الوحدة.

حل هذه المعادلة المميزة يعطي القيم الذاتية التي تمثل الترددات الطبيعية للنظام.

$$\begin{vmatrix} \omega_{01}^2 - \omega^2 & -\frac{k}{m_2} \\ -\frac{k}{m_1} & \omega_{02}^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

بتوسيع هذا المحدد نحصل على:

$$(\omega_{01}^2-\omega^2)(\omega_{02}^2-\omega^2)-\frac{k^2}{m_1m_2}=0$$

ويمكن كتابة هذا على الشكل:

$$(\omega_{01}^2-\omega^2)(\omega_{02}^2-\omega^2)=\frac{k^2}{m_1m_2}$$

توسيع هذه المعادلة بشكل إضافي يؤدي إلى معادلة رباعية (من الدرجة الرابعة) في ω:

$$\omega^4-(\omega_{01}^2+\omega_{02}^2)\omega^2+\omega_{01}^2\omega_{02}^2-\frac{k^2}{m_1m_2}=0 \quad (5-4)$$

هذه المعادلة توفر القيم الخاصة ω التي تمثل الترددات الطبيعية للنظام، ويمكن حلها باستخدام الطرق التحليلية أو العددية للحصول على قيم ω. هذه المعادلة تُعرف بالمعادلة (5-4).

يُعطى المميز Δ للمعادلة التربيعية في ω^2 بالعلاقة:

$$\Delta=(\omega_{01}^2+\omega_{02}^2)^2-4\left(\omega_{01}^2\omega_{02}^2-\frac{k^2}{m_1m_2}\right)$$

حل هذه المعادلة بالنسبة لـ ω يوفر الترددين الطبيعيين للنظام المترابط، مما يسمح بفهم الأنماط الاهتزازية للنظام.

المميز Δ للمعادلة التربيعية في ω^2 هو:

$$\Delta=(\omega_{01}^2+\omega_{02}^2)^2-4\left(\omega_{01}^2\omega_{02}^2-\frac{k^2}{m_1m_2}\right)$$

حل هذه المعادلة يعطي ترددات النظام الطبيعي وخصائص الاهتزاز.

$$\Delta=(\omega_{01}^2+\omega_{02}^2)^2-4\left(\omega_{01}^2\omega_{02}^2-\frac{k^2}{m_1m_2}\right)$$

توسيع هذا الأمر بشكل أكبر:

$$\Delta=(\omega_{01}^2+\omega_{02}^2)^2+\frac{k^2}{m_1m_2}$$

أو من حيث الثوابت والكتل الربيعية، يمكن التعبير عن Δ كما يلي:

$$\Delta = \left(\frac{k+k_1}{m_1} + \frac{k+k_2}{m_2}\right)^2 - 4\left(\frac{(k+k_1)(k+k_2)}{m_1 m_2} - \frac{k^2}{m_1 m_2}\right)$$

حيث: - k_1 و k_2: ثوابت النابضين المتصلين بالكتلتين. - k: ثابت النابض الرابط بين الكتلتين.
- m_1 و m_2: كتلتا النظام.

هذا التعبير يربط بشكل مباشر المميز Δ بمعاملات النظام الفيزيائية (الثوابت الربيعية والكتل)، مما يتيح حساب الترددات الطبيعية بناءً على هذه القيم.

$$\Delta = \left(\frac{k+k_1}{m_1} + \frac{k+k_2}{m_2}\right)^2 + \frac{4k^2}{m_1 m_2}$$

نظراً لأن المحدد Δ موجب، فإن الحلين للترددات ω_1^2 وω_2^2 يكونان حقيقيين وموجبين، ويُعطيان بالعلاقات:

$$\omega_1^2 = \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 - \sqrt{\Delta}}{2}$$
$$\omega_2^2 = \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 + \sqrt{\Delta}}{2}$$

تمثل هذه القيم الترددات الطبيعية للنظام. يمكن كتابة كثير الحدود $f(x)$ على النحو التالي:

$$f(x) = x^2 - (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)x + \omega_{01}^2\omega_{02}^2 - \frac{k^2}{m_1 m_2}$$

باقتراض أن $\omega_{01} < \omega_{02}$، نحصل على حلين مميزين، وهما الترددات الطبيعية للنظام الاهتزازي المترابط.

يمكن التعبير عن كثير الحدود $f(x)$ على الشكل التالي:

$$f(x) = (x - \omega_1^2)(x - \omega_2^2)$$

حيث تمثل الجذور ω_1^2 وω_2^2 الترددات الطبيعية للنظام.

$$f(x) = (x^2 - \omega_1^2)(x^2 - \omega_2^2)$$

نلاحظ أن:

$$f(\omega_{01}^2) = f(\omega_{02}^2) = -\frac{k^2}{m_1 m_2} < 0$$

من هذه النتيجة نستنتج أن:

$$\omega_2 < \omega_{01} < \omega_{02} < \omega_1$$

بافتراض أن $\omega_{01} < \omega_{02}$، نستنتج العلاقة بين الترددات الطبيعية للنظام، مما يبرز النطاق الذي يقع فيه كل تردد بالنسبة إلى معايير النظام.

هذا يُظهر أن الترددين الطبيعيين للنظام المترابط يقعان بين القيم المتعلقة بالترددات الطبيعية للنظام المنفصل، مما يوضح التأثير التفاعلي بين الكتلتين والنابض الرابط.

6.5 إيجاد الأنماط الذاتية x_1 و x_2

من خلال استبدال x_1 و x_2 بتعبيراتهما المركبة:

$$x_1 = A_1 e^{i\varphi_1} e^{i\omega t} \quad \text{و} \quad x_2 = A_2 e^{i\varphi_2} e^{i\omega t}$$

في النظام (5-2)، نحصل على المعادلة الأولى:

$$(\omega_{01}^2 - \omega^2) k x_1 e^{i\varphi_1} - \frac{k}{m_1} x_2 e^{i\varphi_2} = 0$$

إذن:

$$e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{m_1(\omega_{01}^2 - \omega^2)}{k} x_1$$

نظراً لأن هذه الكمية حقيقية، نستنتج أن هذا الشرط يقيّد النسب النسبية والسعات والمراحل بين x_1 و x_2، مما يوفر الحل للأنماط الطبيعية لنظام المذبذب المترابط.

تركز المعادلة المقدمة هنا على إيجاد فرق الطور بين φ_1 و φ_2 لمذبذبين مترابطين. وفيما يلي تفسير كل حالة:

1. عندما $\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$: هذا يعني أن $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\pi$ أو 0، مما يؤدي إلى حالتين ممكنتين:

   (ا) الحالة 1: $\omega = \omega_1$:

      i. في هذه الحالة، $\omega_{01}^2 - \omega^2 < 0$.

      ii. وبالتالي، $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$، مما يعني أن $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$.

iii. هذا يعني أن الكتلتين تهتزان بفرق طور معاكس.

iv. تصبح علاقة السعات بين x_1 و x_2 كما يلي:

$$\frac{x_2(\omega)}{x_1(\omega)} = \frac{m_1(\omega_{01}^2 - \omega^2)}{k}$$

(ب) الحالة 2: $\omega = \omega_2$:

i. في هذه الحالة، $\omega_{02}^2 - \omega^2 > 0$.

ii. هنا، $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$، مما يعني أن $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$.

iii. هذا يعني أن الكتلتين تهتزان في نفس الطور.

iv. علاقة السعات في هذه الحالة تكون:

$$\frac{x_2(\omega)}{x_1(\omega)} = \frac{m_1(\omega_{02}^2 - \omega^2)}{k}$$

باختصار: - عندما $\omega = \omega_1$، يهتز المذبذبان بفرق طور معكوس. - عندما $\omega = \omega_2$، يهتز المذبذبان في نفس الطور.

تمثل هاتان الحالتان النمطين الطبيعيين للنظام، وهما الأنماط الأساسية للاهتزاز للمذبذبين المترابطين.

في هذا التحليل للمذبذبات المترابطة، نلاحظ حالتين محددتين لأنماط الاهتزاز، تصفان كيف تهتز الكتل m_1 و m_2 بالنسبة إلى بعضها البعض. ويصف ما يلي كل حالة:

(ا) الاهتزازات بفرق طور معكوس:

i. عندما يكون التردد الطبيعي للاهتزاز $\omega = \omega_1$، تهتز الكتلتان بفرق طور معكوس. هذا يعني أنه عندما يصل x_1 إلى ذروته في اتجاه معين، يصل x_2 إلى ذروته في الاتجاه المعاكس.

ii. العلاقة الطورية لهذا النمط هي $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$.

iii. علاقة السعات بين الإزاحات x_1 و x_2 تُعطى بالمعادلة:

$$\frac{x_2(\omega)}{x_1(\omega)} = \frac{m_1(\omega_{01}^2 - \omega^2)}{k}$$

iv. بالنسبة لهذا النمط:

$$x_1 = A_1(\omega_1)\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$x_2 = -A_1(\omega_1)\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

(ب) الاهتزازات في نفس الطور:

i. عندما يكون التردد الطبيعي $\omega=\omega_2$، تهتز الكتلتان في نفس الطور، مما يعني أن x_1 و x_2 يتحركان في نفس الاتجاه في الوقت نفسه.
ii. فرق الطور في هذه الحالة هو $\varphi_1-\varphi_2=0$.
iii. في هذه الحالة، علاقة السعات تكون:

$$\frac{x_2(\omega)}{x_1(\omega)}=\lambda_1=\frac{m_1(\omega_1^2-\omega^2)}{k}$$

هاتان الحالتان تمثلان الأنماط الأساسية للاهتزاز في النظام. النمط الأول يتوافق مع الاهتزازات بفرق طور معكوس، بينما يتوافق النمط الثاني مع الاهتزازات في نفس الطور، ولكل نمط تردده الخاص وعلاقة السعات المميزة.

بالنسبة للنمط الذي له التردد $\omega=\omega_2$، تهتز الكتلتان x_1 و x_2 في نفس الطور، مما يعني أنهما تتحركان معًا في نفس الاتجاه.

(ا) 1. معادلات الحركة في نفس الطور: - تُعطى مواضع x_1 و x_2 بالعلاقات:

$$x_1=A_1(\omega_2)\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

$$x_2=A_2(\omega_2)\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

- يمكن أيضًا التعبير عن هذه العلاقة على النحو التالي:

$$x_2=\lambda_2 A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

- حيث $\lambda_2=\frac{m_1(\omega_1^2-\omega_2^2)}{k}$.

(ب) الحل العام: - الحل الكامل الذي يجمع بين النمطين الاهتزازيين (النمط 1 والنمط 2) يُكتب كالتالي:

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=a_1\begin{bmatrix}x_1(\omega_1,t)\\x_2(\omega_1,t)\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}x_1(\omega_2,t)\\x_2(\omega_2,t)\end{bmatrix}$$

- حيث a_1 و a_2 هما معاملات تُحدد سعات كل نمط، والتعبيرات $x_1(\omega_1,t),x_2(\omega_1,t)$ و $x_1(\omega_2,t),x_2(\omega_2,t)$ تمثل حركات النظام في كل نمط.

يمكّن هذا الحل العام من التعبير عن النظام كمزيج من النمطين الأساسيين للاهتزاز، مما يوفر الحركة الحقيقية لنظام المذبذب المترابط. يتم تحديد المعاملين a_1 و a_2 بناءً على الشروط الابتدائية للنظام.

$$\begin{cases}x_1(t)=a_1A_1(\omega_1)\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+a_2A_1(\omega_2)\cos(\omega_2 t+\varphi_2)\\x_2(t)=-a_1A_2(\omega_1)\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+a_2A_2(\omega_2)\cos(\omega_2 t+\varphi_2)\end{cases}$$

مع :

$$A_2(\omega_1) = \lambda_1 A_2(\omega_1)$$

و:

$$A_2(\omega_2) = \lambda_2 A_2(\omega_2)$$

نحصل على النظام للوضعين الموضحين بواسطة (4.5)

$$\begin{cases} x_1(t) = a_1 A_1(\omega_1)\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 A_1(\omega_2)\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = -\lambda_1 a_1 A_1(\omega_1)\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \lambda_1 a_2 A_1(\omega_2)\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

مع :

$$a_1 A_1(\omega_1) = a_1$$

و:

$$a_2 A_1(\omega_2) = a_2$$

القيم الأربع $a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2$ يتم تحديدها بناءً على الشروط الابتدائية الأربعة على $x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2$.

> على سبيل المثال، نأخذ الشروط الابتدائية التالية:

$$x_1(t=0) = 0, \quad x_2(t=0) = 0, \quad \dot{x}_1(t=0) = 0, \quad \dot{x}_2(t=2) = 0$$

من هذه الشروط، نحصل على:

.1

$$a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2 = 0$$

.2

$$-\lambda_1 a_1 \cos\varphi_1 + \lambda_2 a_2 \cos\varphi_2 = 0$$

.3

$$\lambda_1 a_1 \sin\varphi_1 + \lambda_2 a_2 \sin\varphi_2 = 0$$

.4

$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

نستنتج أن:

$$a_1 + a_2 = 0$$

و :

$$-\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0$$

$$a_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} a$$

$$a_1 = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} a$$

$$a_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} a$$

في هذا القسم، يتم إيجاد القيم a_1 و a_2 من خلال إنشاء وحل نظام من المعادلات استنادًا إلى الشروط الابتدائية والمعاملات المعطاة.
التعبير الخاص بـ a_2 هو كالتالي:

$$a_2 = \frac{\omega_1^2 - \omega_{01}^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} a$$

يمثل هذا التعبير الحل للمعامل a_2 من حيث الترددات ω_1، ω_{01}، وω_2، بالإضافة إلى الثابت المعطى a.

7.5 إيجاد الترددات الطبيعية والأنماط الذاتية باستخدام طريقة الإحداثيات الطبيعية

1.7.5 إيجاد الترددات الطبيعية للأنماط الذاتية

نعيد النظر في نظام الكتلتين والنابضات الثلاثة. لتطبيق طريقة الإحداثيات الطبيعية، نفترض:

(ا) أن حركة النظام يمكن فصلها إلى أنماط مستقلة (أنماط طبيعية).

(ب) أن كل نمط يهتز بتردد طبيعي خاص به، مما يجعل النظام أسهل في التحليل.

(ج) تعبير الحركة العامة للنظام يعتمد على تركيب خطي لهذه الأنماط.

تساعد هذه الطريقة على حل النظام بطريقة فعالة عبر تحويل المعادلات إلى صيغة أبسط تعتمد على الأنماط الطبيعية.

$$m_1 = m_2 = m \quad \text{and} \quad k_1 = k_2$$

المعادلات التفاضلية للحركة المشتقة سابقًا تمت إعادة كتابتها على النحو التالي:

$$m\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k(x_2 - x_1)$$
$$m\ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k(x_2 - x_1)$$

والتي يمكن تبسيطها إلى:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k_1 + k)x_1 - kx_2 &= 0 \\ m\ddot{x}_2 + (k_2 + k)x_2 - kx_1 &= 0 \end{cases} \quad (5-4)$$

هذا الإعداد يوفر الأساس لتحليل الترددات الطبيعية والأنماط الذاتية المقابلة للنظام باستخدام الإحداثيات الطبيعية.

من خلال طرح وإضافة المعادلتين السابقتين، نحصل على:

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + (k_1 + 2k)(x_1 - x_2) = 0$$
$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + k_1(x_1 + x_2) = 0$$

يتم تصنيف هذه المعادلات على أنها (5-4).

نقوم بتعريف المتغيرات الجديدة على النحو التالي:

$$X_1 = x_1 - x_2$$
$$\dot{X}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_2$$
$$X_2 = x_1 + x_2$$
$$\dot{X}_2 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2$$

المتغيرات X_1 و X_2 تُعرف بالإحداثيات الطبيعية للنظام. بتعويض هذه المتغيرات في معادلات النظام ،(V-3) نحصل على النظام الجديد (5-4):

$$\begin{cases} m\ddot{X}_1 + (k_1 + 2k)X_1 &= 0 \\ m\ddot{X}_2 + k_1 X_2 &= 0 \end{cases} \quad (5-5)$$

تُعرف هذه المعادلات بمعادلات النظام (5-5).

تم فصل معادلات النظام (5-5)، مما يعني أنها تمثل حركتين توافقيتين بسيطتين مستقلتين.

تُبسّط هذه الصياغة باستخدام الإحداثيات الطبيعية X_1 و X_2 المشكلة، حيث تُقسَّم إلى اهتزازين توافقيين منفصلين، ولكل منهما تردده الطبيعي الذي يتحدد بواسطة المعاملات m، k، وk_1.

ليكن حلول النظام (5-5) هي:

$$X_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{مع} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1 + 2k}{m}}$$

$$X_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \quad \text{مع} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$$

كذلك:

$$x_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

و:

$$x_2 = \frac{X_1 - X_2}{2}$$

هكذا:

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{A_1 \sin(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2 \sin(\omega_2 t+\varphi_2)}{2} \\ x_2(t) = \frac{A_1 \sin(\omega_1 t+\varphi_1)-A_2 \sin(\omega_2 t+\varphi_2)}{2} \end{cases} \qquad (5-6) \qquad (4)$$

بالنسبة لترتيب الترددات الطبيعية، يمكننا سردها بترتيب تصاعدي أو تنازلي (في الأنظمة التي تحتوي على درجتين من الحرية).

- الترتيب التصاعدي: نبدأ بأصغر تردد طبيعي وننتهي بالأكبر:

$$\omega_1 < \omega_2$$

- الترتيب التنازلي: نبدأ بأكبر تردد طبيعي وننتهي بالأصغر:

$$\omega_2 > \omega_1$$

في الأنظمة ذات درجتين من الحرية، يكون التردد الطبيعي الأصغر عادةً مرتبطًا بالحركة الأقل تعقيدًا (مثل الحركة الجماعية للنظام)، بينما التردد الطبيعي الأكبر يعبر عن الأنماط الأكثر تعقيدًا والتي تنطوي على اهتزازات نسبية بين الأجزاء المختلفة للنظام.

2.7.5 تراكب الاهتزازات ذات الترددات المختلفة

في هذا القسم، يتم شرح مفهوم -تراكب الاهتزازات-. نظرًا لأن المذبذبات التوافقية تتبع معادلات خطية، يمكن أن تحدث اهتزازات توافقية متعددة معًا دون أن تؤثر على بعضها البعض. يتيح ذلك تحليل كل اهتزاز بشكل مستقل، ثم جمع الإزاحات الناتجة للحصول على الحركة الكلية.

عندما يتم الجمع بين اهتزازات ذات ترددات مختلفة قليلاً، يمكن أن يُنتج ذلك ظاهرة "النبض"، حيث يتغير سعة الموجة الناتجة بشكل دوري.

إذا تعرض النظام لعدة اهتزازات مختلفة في وقت واحد، يمكن حل المعادلات الخاصة بكل اهتزاز بشكل مستقل. يتم الحصول على إزاحة المذبذب عن طريق جمع حلول الإزاحة لكل معادلة.

ينتج عن ذلك تراكب للاهتزازات إما بترددات متساوية أو بترددات مختلفة ولكن متقاربة. في حالة الترددات المختلفة ولكن القريبة، كما هو معالج في (5-6)، تظهر ظاهرة النبض.

النبض (Beating)

تحدث ظاهرة النبض عندما يتم تراكب اهتزازين بترددات متقاربة جدًا. يؤدي هذا إلى اهتزاز جديد بتردد متوسط $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$، حيث تتغير سعته دوريًا بتردد $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$.
في هذه الحالة، يتم اعتبار الإزاحة x_1 كما هو موضح في النظام (المعادلة .(V-6 يتم تحديد القيم A_1، A_2، φ_1، وφ_2 بناءً على الشروط الابتدائية. هنا، يُفترض أن $A_1 = A_2 = A$ و$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.
تصبح الإزاحة الناتجة:

$$x(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

هذا التعبير يُظهر أن الاهتزاز الناتج يحتوي على تردد متوسط وسعة تتغير دوريًا، مما يؤدي إلى ظاهرة النبض.

$$x_1 = \frac{A}{2}(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t)$$

يمثل هذا التعبير ظاهرة النبض، حيث تتأرجح السعة بتردد النبض نتيجة التداخل بين الترددين المتقاربين.

يمكن إعادة كتابة التعبير الخاص بـ x_1 باستخدام الهوية المثلثية:

$$\cos(A) + \cos(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

وبتطبيق هذه الهوية، يصبح التعبير:

$$x_1(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

يوضح هذا الشكل كيف يجمع الاهتزاز الناتج بين تردد متوسط وسعة تتغير دوريًا، مما يعبر عن ظاهرة النبض بوضوح.

$$\sin a + \sin b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

كذلك ,

$$x_1(t) = \frac{A}{2}\sin\omega_1 t + \frac{A}{2}\sin\omega_2 t = x_1(t) + x_2(t)$$

باستخدام الهوية نحصل على:

$$x_1(t) = A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

هذا الشكل يوضح ظاهرة النبض، حيث يمثل التعبير $A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$ السعة التي تتغير ببطء، بينما يمثل $\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$ الاهتزاز السريع عند التردد المتوسط.

بالتالي، يمكن وصف الحركة الكلية كالتالي: - السعة تتغير بشكل دوري بتردد منخفض $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$. - الاهتزاز يحدث عند تردد متوسط عالي $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$.

هذا التراكب يوضح كيف يمكن لتداخل الترددات المتقاربة أن يؤدي إلى تغيرات دورية في السعة، وهي سمة مميزة لظاهرة النبض.

الفترة المتوسطة وفترة النبض

الفترة المتوسطة تتعلق بالتردد المتوسط $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$، بينما فترة النبض ترتبط بتردد الفرق $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$، الذي يحدد معدل تغير السعة.

المعلمات التالية معرّفة:

(ا) التردد المتوسط ω_{moyenne}:

$$\omega_{\text{moyenne}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

(ب) الفترة المتوسطة T_{moyenne}:

$$T_{\text{moyenne}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{moyenne}}} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}}$$

حيث:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$$

(ج) تردد التعديل $\omega_{\text{modulation}}$:

$$\omega_{\text{modulation}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

(د) فترة النبض T_b: الفترة الزمنية بين عبورين متتاليين للصفر لسعة النبض (تمثلها T_b) تُعطى بالعلاقة:

$$T_b = \frac{2\pi}{\omega_{\text{modulation}}} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1-\omega_2}{2}}$$

هذه المعادلات تساعد في فهم الظواهر الناتجة عن تراكب الاهتزازات ذات الترددات المتقاربة، مثل متوسط الفترة وتغيرات السعة الناتجة عن ظاهرة النبض.

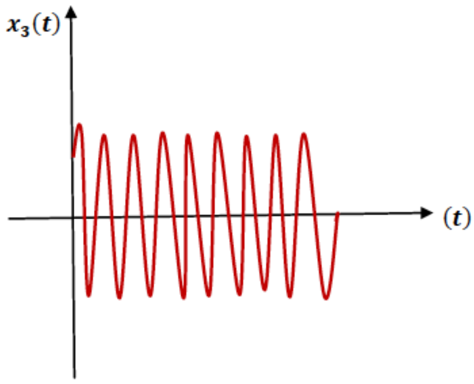
فترة النبض T_b تُعطى بالصيغة:

$$T_b = \frac{2\pi}{\omega_{\text{modulation}}}$$

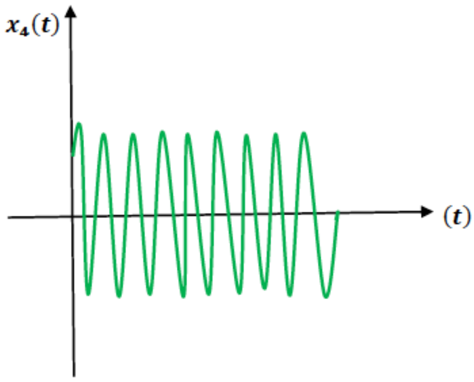
وبديلًا، يمكن التعبير عنها من حيث الفترات الفردية T_1 و T_2 للاهتزازين كالتالي:

$$T_b = \frac{T_1 T_2}{|T_1 - T_2|}$$

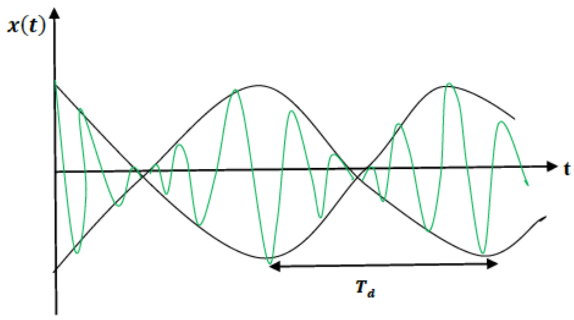
يمثل الشكل (5-6) تراكب حركتين اهتزازيتين بترددات متقاربة، مما يُظهر التغيرات الدورية للسعة الناتجة عن ظاهرة النبض.



شكل 6.5: تمثيل الحركة الاهتزازية



شكل 7.5: تمثيل الحركة الاهتزازية



شكل 8.5: خفقان التذبذبتين $x_3(t)$ و $x_4(t)$

8.5 الاهتزازات القسرية بدرجات الحرية

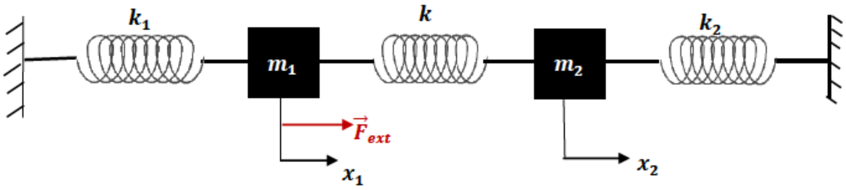
1.8.5 الاهتزازات القسرية بدون تخميد

نعتبر النظام (كتلتان وثلاثة نوابض) الموضح في الشكل (7.5).

في هذا التحليل، يتم دراسة استجابة النظام للاهتزازات القسرية عندما تؤثر قوة خارجية دورية على النظام. يتم التركيز على:

(ا) النظام بدون تخميد:حيث لا توجد قوى مقاومة أو فقدان للطاقة.
(ب) القوى الخارجية: تؤثر بقوة جيبية ذات تردد معين.

يهدف التحليل إلى تحديد استجابة الكل تحت تأثير القوة القسرية ومعرفة كيفية تأثير التردد القسري على النظام. المعادلات التفاضلية للحركة هي:



شكل 9.5: تخضع المذبذبات الميكانيكية المقترنة بشكل مرن لقوة خارجية

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k)x_1 - kx_2 = F_0\cos\Omega t \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2+k)x_2 + kx_1 = 0 \end{cases}$$

نحن مهتمون بالنظام في الحالة المستقرة، أي الحل الذي يتبع الحل الخاص للنظام من المعادلات التفاضلية. نبحث عن حلول جيبية ذات تردد زاوي Ω. للقيام بذلك، نستخدم التعبيرات الخاصة بالترددات الطبيعية للمذبذبات المنفصلة، والتي تُعرف بأنها:

الترددات الطبيعية للمذبذبات المنفصلة تُعرَّف كما يلي:

$$\omega_{01}^2 = \frac{k_1+k}{m_1}$$

$$\omega_{02}^2 = \frac{k_2+k}{m_2}$$

حيث تعبر هذه القيم عن الترددات الطبيعية للنظام عندما يكون كل مذبذب منفصلًا عن الآخر، مما يسهل فهم تأثير التردد القسري Ω مقارنة بالترددات الطبيعية للنظام.

$$\omega_{01}^2 = \frac{k+k_1}{m_1}$$

و:

$$\omega_{02}^2 = \frac{k+k_2}{m_2}$$

وباستخدام هذه المعادلات نحصل على نظام المعادلات التفاضلية التالي:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_{01}^2 x_1 - \frac{k}{m_1} x_2 = \frac{F_0}{m_1} \cos \Omega t \\ \ddot{x}_2 + \omega_{02}^2 x_2 - \frac{k}{m_2} x_1 = 0 \end{cases}$$

إذا استخدمنا التدوين المركب، فإننا نستبدل x_1، x_2، والقوة الخارجية بتعبيراتها المركبة على النحو التالي:

$$x_1(t) = \tilde{x}_1 e^{i\Omega t}, \quad x_2(t) = \tilde{x}_2 e^{i\Omega t}, \quad F_{\text{ext}}(t) = \tilde{F} e^{i\Omega t}$$

حيث: - $\tilde{x}_1$ و $\tilde{x}_2$: السعات المركبة للإزاحة. - $\tilde{F}$: السعة المركبة للقوة الخارجية. - Ω: التردد الزاوي للقوة الخارجية.

يتيح التدوين المركب تحويل المعادلات التفاضلية إلى معادلات جبرية في السعات المركبة، مما يُبسّط حل النظام في الحالة المستقرة.

$$\bar{A}_1 = A_1 e^{i\varphi_1} e^{i\Omega t} = A_1 e^{i\Omega t}$$

$$\bar{A}_2 = A_2 e^{i\varphi_2} e^{i\Omega t} = A_2 e^{i\Omega t}$$

هذا الترميز المركب يُبسط تحليل النظام. مع تعريف السعات المركبة كالتالي:

$$\bar{A}_1 = A_1 e^{i\varphi_1} \quad \text{and} \quad \bar{A}_2 = A_2 e^{i\varphi_2}$$

ونعرف أيضًا القوة الخارجية على أنها:

$$\bar{F}_0 = F_0 e^{i\Omega t}$$

يصبح نظام المعادلات:

$$\begin{cases} (\omega_{01}^2 - \Omega^2) \bar{A}_1 - \frac{k}{m_1} \bar{A}_2 = \frac{F_0}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} \bar{A}_1 + (\omega_{02}^2 - \Omega^2) \bar{A}_2 = 0 \end{cases} \qquad (5-7) \qquad (5)$$

لكي يقبل النظام (5-7) حلولًا، يجب أن يكون المحدد غير صفري:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_{01}^2 - \Omega^2 & -\frac{k}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & \omega_{02}^2 - \Omega^2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (V-8) \tag{6}$$

الحلول للنظام (5-8) هي:

$$\bar{A}_1 = \frac{F_0}{m_1(\omega_{02} - \Omega^2)}$$

والحل المركب الذي يتضمن جيب التمام وجيب الزاوية يُعبَّر عنه كالتالي:

$$\bar{A}_1 = A_1 \cos\Omega t + i A_1 \sin\varphi_1$$

$$\bar{A}_1 = \begin{vmatrix} \frac{F_0}{m_1} & -\frac{k}{m_1} \\ 0 & \omega_{02}^2 - \Omega^2 \end{vmatrix} = A_1 \cos\varphi_1 + i A_1 \sin\varphi_1 \quad (5-9) \tag{7}$$

تُعطينا هذه التعبيرات السعات المركبة لنظام التذبذب القسري. التعبير عن $\bar{A}_2$ في نظام التذبذب القسري يُعطى بواسطة:

$$\bar{A}_2 = \begin{vmatrix} \omega_{01}^2 - \Omega^2 & \frac{F_0}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & 0 \end{vmatrix} = A_2 \cos\varphi_2 + i A_2 \sin\varphi_2 \quad (5-10) \tag{8}$$

في هذا المثال، فإن التعبيرات المستنتجة لكل من $\bar{A}_1$ و $\bar{A}_2$ هي كميات حقيقية بحتة. وهذا يعني أن الحركة التذبذبية الناتجة، التي توصف بهذه السعات، لا تتضمن أي مكونات تخيلية، مما يشير إلى أن الحل يتماشى مع الإزاحات الفيزيائية الحقيقية.

يجب أن تكون الأجزاء التخيلية من التعبيرات (9.5) و (10.5) صفراً. وبما أن $\bar{A}_1$ و $\bar{A}_2$ لا يمكن أن تكون صفرية بالضرورة، فإننا نستنتج الشروط التالية:

$$\sin\varphi_1 = 0$$

كذلك :

$$\varphi_1 = 0 \text{ or } \pi$$

و بالمثل :

$$\varphi_2 = 0 \text{ or } \pi$$

هذا يضمن أن تكون القيم المسموح بها للزوايا φ_1 و φ_2 مقيدة بحيث تُلغي أي مكونات تخيلية، مما يحافظ على الطبيعة الحقيقية للحل التذبذبي.

- تكون حركة الكتلة المعنية إما في الطور نفسه أو في طور معاكس للقوة الخارجية.

- إذا قمنا بتعيين الإزاحتين الطوريتين على الصفر، فإن الإزاحات تأخذ الأشكال التالية:

$$x_1(t) = \frac{F_0(\omega_{02}^2 - \Omega^2)}{m_1\Delta}\cos\Omega t = A_1\cos\Omega t$$

و:

$$x_2(t) = \frac{-F_0 k}{m_1 m_2 \Delta}\cos\Omega t = A_2\cos\Omega t$$

هذا يعطي تعبيرات الإزاحة $x_1(t)$ و $x_2(t)$ من حيث دوال جيب التمام، مما يعكس التذبذبات بعوامل السعة A_1 و A_2.

يصبح المُميِّز الرئيسي Δ صفراً عند قيم النبض التي تُعطى بالجذر التربيعي للتعبيرات في (5-9) و(5-10). عند هذه النقطة، تميل السعات A_1 و A_2 إلى اللانهاية، مما يمثل الرنين عندما يكون النبض الخارجي مساويًا لـω_{02}. عند هذا الرنين، يكون المتذبذب m_1 في حالة سكون، و$A_1 = \frac{F_0}{k}$، مما يشير إلى ظاهرة ضد الرنين (Anti-Resonance).

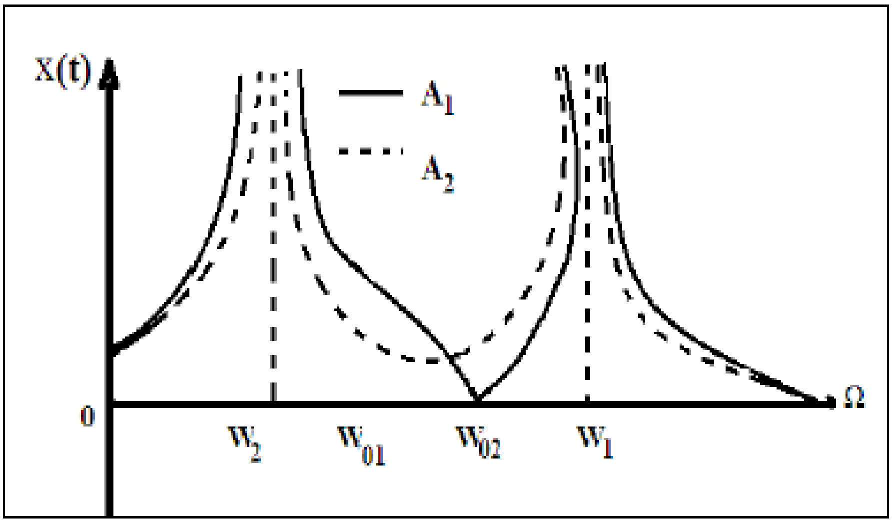
المتذبذب الثاني (على اليمين) يهتز جيبياً عند تردده الطبيعي ويمارس قوة على المتذبذب الأول (على اليسار) من خلال النابض الرابط. تكون قوة الربط دائمًا مساوية ومعاكسة للقوة الخارجية المؤثرة على المتذبذب الأول. يتم تمثيل التغيرات في السعات A_1 و A_2 كدالة للنبض الخاص بالمتذبذب الأول في رسم بياني.

التذبذب القسري المضعف مع شرح بسيط

تخيل النظام التالي:

- يتم تطبيق قوة خارجية $\vec{F}_{ext} = F_0\cos\Omega t$ على الكتلة m_1، حيث: - F_0 يمثل شدة القوة. - Ω هو التردد الزاوي للقوة الخارجية. - t هو الزمن.

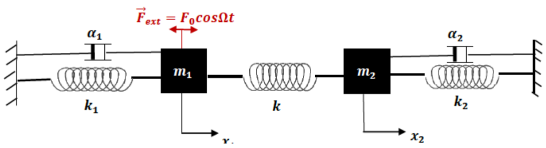
- يتكون النظام من كتلتين، m_1 و m_2، متصلتين بمجموعة من النوابض لها ثوابت زنبركية (Spring Constants) مختلفة: - k_1: الثابت الزنبركي للنابض المتصل بـ m_1. - k_2: الثابت الزنبركي للنابض المتصل بـ m_2. - k: الثابت الزنبركي للنابض الرابط بين الكتلتين.



شكل 10.5: تغير السعات A_1 وA_2 كدالة للنبضة

- كل كتلة لها معامل تخميد خاص بها: - α_1 للكتلة m_1، الذي يمثل المقاومة الناتجة عن الاحتكاك أو التخميد. - α_2 للكتلة m_2.

التذبذب القسري المضعف هو حالة يحدث فيها تذبذب نتيجة قوة خارجية مستمرة مثل $\vec{F}_{\text{ext}}$، ولكن مع تأثير التخميد (Damping) الذي يقلل من الطاقة الحركية للنظام بسبب الاحتكاك أو مقاومة الوسط. النظام هنا معقد بعض الشيء لأنه يحتوي على كتلتين متصلتين بثلاثة نوابض، مما يجعل القوى الداخلية (مثل قوة الربط بين الكتلتين) جزءًا من التحليل. وتتأثر بقوة خارجية وتخميد. معادلات الحركة التفاضلية للنظام هي:



شكل 11.5: المذبذبات الميكانيكية المرنة والمعرضة لقوة خارجية ومثبط

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k)x_1 + \alpha_1\dot{x}_1 - kx_2 = F_0 \cos\Omega t \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k)x_2 + \alpha_2\dot{x}_2 - kx_1 = 0 \end{cases} \qquad (5-11) \qquad (9)$$

هذه المعادلات تصف حركة كل كتلة تحت تأثير القوى المرنة (الزنبركية)، التخميد، والقوة الدورية الخارجية المطبقة على m_1.

الرنين وضد الرنين

(عندما $D = 0$ و $F \neq 0$: نظام قسري غير مضعف)
الحل في الحالة المستقرة من المعادلة (V-10) هو:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\Omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

هذا يمثل إزاحة كل كتلة في النظام تحت تأثير التذبذب القسري عند تردد Ω، حيث تمتلك كل كتلة سعتها الخاصة A_1، A_2 وزاويتها الطورية φ_1، φ_2. في هذا السياق، يمكن ملاحظة سلوك الرنين وضد الرنين بناءً على العلاقة بين التردد القسري Ω والترددات الطبيعية للنظام. حيث:
تعتمد القيم A_1، A_2، φ_1، و φ_2 على التردد Ω وشدة القوة F_0. لإيجاد A_1 و A_2، نستخدم التمثيل المركب.

$$\begin{cases} F(t) = F_0 \cos(\Omega t) \rightarrow \bar{F}(t) = F_0 e^{-i\Omega t} \\ x_1(t) = A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1) \rightarrow \bar{x}_1(t) = A_1 e^{-i\Omega t} \\ x_2(t) = A_2 \cos(\Omega t + \varphi_2) \rightarrow \bar{x}_2(t) = A_2 e^{-i\Omega t} \end{cases}$$

هذا الشكل المركب يُبسط تحليل التذبذب القسري من خلال السماح لنا بالعمل مع الأُسُس المركبة بدلاً من الدوال المثلثية. يصبح نظام المعادلات (5-10) كما يلي:
إذا كان $\Delta = 0$:

$$\begin{cases} m_1 \bar{x}_1 + (k_1 + k)\bar{x}_1 + a_1 \bar{x}_1 - k x_2 = F_0 e^{-i\Omega t} \\ m_2 \bar{x}_2 + (k_2 + k)\bar{x}_2 + a_2 \bar{x}_2 - k x_1 = 0 \end{cases}$$

والذي يبسط إلى النظام التالي (5-12):

$$\begin{cases} \left(-\Omega^2 + \frac{k_1+k}{m_1}\right) \bar{A}_1 - \frac{k}{m_1} \bar{A}_2 = \frac{F_0}{m_1} \\ \left(-\Omega^2 + \frac{k_2+k}{m_2}\right) \bar{A}_2 - \frac{k}{m_2} \bar{A}_1 = 0 \end{cases} \qquad (5-12) \qquad (10)$$

يمكن الآن حل هذا النظام للحصول على السعات المركبة A_1 و A_2، والتي تمثل الحلول لكل كتلة في نظام التذبذب القسري. في الحالة التي تكون فيها $m_1 = m_2 = m$ و $k_1 = k_2 = k$:
بتعيين $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$، تصبح المعادلة (5-12) كما يلي:

$$\begin{cases}(-\Omega^2+2\omega_0^2)\bar{A}_1-\omega_0^2\bar{A}_2=\frac{F_0}{m}\\(-\Omega^2+2\omega_0^2)\bar{A}_2-\omega_0^2\bar{A}_1=0\end{cases}$$

يؤدي هذا إلى التعبيرات التالية لـ A_1 و A_2:

$$\begin{cases}A_1= & \frac{F_0}{m}\frac{|2\omega_0^2-\Omega^2|}{|(2\omega_0^2-\Omega^2)^2-\omega_0^4|}\\A_2= & \frac{F_0}{m}\frac{|\omega_0|}{|(2\omega_0^2-\Omega^2)^2-\omega_0^4|}\end{cases}\quad(5-13)\qquad(11)$$

- $A_1=A_2=\infty$ عندما $\Omega=\omega_0=\Omega_{R1}$ (ويُعرف هذا بالتردد الرنيني الأول). - - $\Omega=\sqrt{3}\omega_0=\Omega_{R2}$ (ويُعرف هذا بالتردد الرنيني الثاني). - $A_1=0$ عندما $\Omega=\sqrt{2}\omega_0=\Omega_{AR}$ (ويُعرف هذا بتردد ضد الرنين).

ضد الرنين هو ظاهرة تحدث في بعض الأنظمة المهتزة المترابطة، حيث يبقى جزء من النظام شبه ثابت بينما يتعرض جزء آخر لاهتزاز كبير، رغم التأثير الناتج عن القوة الخارجية.

بمعنى أكثر بساطة: عند تردد ضد الرنين، يبقى أحد المتذبذبات غير متأثر تقريبًا بالقوة المحركة، مما يؤدي إلى "إلغاء" تأثير الاهتزاز على هذا الجزء المحدد من النظام.

الجوانب الرئيسية لظاهرة ضد الرنين:

(ا) اعتماد التردد: - في الأنظمة المترابطة، يحدث ضد الرنين عند تردد محدد يُعرف باسم **تردد ضد الرنين** Ω_{AR}، والذي يختلف عن الترددات الرنينية حيث يستجيب كلا المتذبذبين عادةً بقوة. - يعتمد تردد ضد الرنين على خصائص الربط في النظام، بما في ذلك معايير مثل الكتل، والثوابت الزنبركية (صلابة النوابض)، ومعاملات التخميد (إن وُجدت).

(ب) التداخل المدمر: - عند تردد ضد الرنين، تتداخل الحركة الناتجة عن القوة الخارجية على جزء من النظام بشكل مدمر مع التذبذبات الطبيعية للجزء الآخر. - يؤدي هذا التداخل المدمر إلى أن يكون لأحد المتذبذبين سعة اهتزاز تساوي الصفر أو قريبة جدًا منه، مما يعني أنه لا يستجيب بشكل فعّال للقوة المحركة. - من الناحية العملية، يتم إعادة توزيع الطاقة التذبذبية بحيث "يمتص" جزء من النظام الحركة، مما يترك الجزء الآخر شبه ثابت.

(ج) تدفق الطاقة والعزل: - في حالة ضد الرنين، لا يتم نقل الطاقة من القوة الخارجية بشكل فعّال إلى النمط التذبذبي الذي يشمل الجزء "الصامت" أو "الثابت". - يُستخدم هذا العزل

للحركة عند تردد ضد الرنين في التطبيقات الهندسية لتقليل الاهتزازات في أجزاء محددة من النظام مع السماح لأجزاء أخرى بالاهتزاز.

(د) التباين مع الرنين: - في الرنين، يمتص النظام الطاقة بشكل فعّال جدًا عند ترددات محددة، مما يؤدي إلى سعات كبيرة للاهتزاز. - في ضد الرنين، يعمل النظام بالعكس: يتجنب امتصاص الطاقة في بعض الأنماط التذبذبية، مما يؤدي إلى تقليل الاهتزاز في جزء من النظام، على الرغم من وجود قوة محركة.

الشرح الرياضي (بناءً على المتذبذبات المترابطة)

بالنسبة لنظام مكون من متذبذبين مترابطين بكتل m_1 و m_2 وثوابت زنبركية k_1، k_2، ووصلة زنبركية k:

(ا) 1. معادلات الحركة: - يمكن وصف استجابة النظام لقوة محركة خارجية $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ تُطبق على إحدى الكتل باستخدام معادلات تفاضلية تتضمن مصطلحات تعبر عن الارتباط بين الكتل.

(ب) شرط ضد الرنين: - حل معادلات الحركة يكشف عن الترددات التي تصبح عندها سعة الاهتزاز A_1 لأحد المتذبذبين تساوي صفراً. يحدث هذا عند تردد ضد الرنين Ω_{AR}. - رياضياً، يكون شرط ضد الرنين عندما تحقق سعة الاستجابة A_1 أو A_2 العلاقة $A_1 = 0$ أو $A_2 = 0$، مما يؤدي إلى تقليل الاهتزاز في جزء من النظام إلى الحد الأدنى.

(ج) حساب مثال: - في حالة وجود نظام متماثل بكتل ونوابض متطابقة، يمكن حساب تردد ضد الرنين Ω_{AR} على أنه $\Omega_{AR} = \sqrt{2}\omega_0$، حيث ω_0 هو التردد الطبيعي لأحد المتذبذبين إذا كان معزولاً. يعتمد ذلك على تكوين الارتباط الخاص بالنظام.

التطبيقات العملية لظاهرة ضد الرنين:

تُعتبر ظاهرة ضد الرنين مفيدة في تصميم الأنظمة التي تحتاج إلى تقليل الاهتزازات في جزء معين مع السماح لجزء آخر بالاستجابة للقوى الخارجية. الأمثلة تشمل:

(ا) الأنظمة الميكانيكية:تقليل الاهتزازات في الأجزاء الحساسة من الآلات، مثل الأجهزة الدقيقة، حيث يتم عزل مكونات معينة عن الاهتزازات.

(ب) الهندسة الإنشائية: تصميم المباني أو الجسور باستخدام مخمدات الكتلة المضبوطة (Tuned Mass Dampers) لتقليل التذبذبات في أجزاء معينة عن طريق استغلال ظاهرة ضد الرنين.

(ج) الهندسة الصوتية: في مكبرات الصوت، حيث يمكن استخدام ضد الرنين لمنع ترددات معينة من التسبب في رنين غير مرغوب في أجزاء من هيكل مكبر الصوت.

ملاحظة 2

ضد الرنين هو ظاهرة تحدث في المتذبذبات المترابطة حيث يبقى جزء من النظام شبه ثابت عند تردد معين بسبب التداخل المدمر في الاستجابة التذبذبية. تُستخدم هذه الفكرة في العديد من التطبيقات لعزل أجزاء من النظام عن الاهتزازات والتذبذبات عند ترددات محددة.

باب 6

الملحقات

1.6 الملحق 1: التخميد الحرج

التخميد الحرج هو المقدار الدقيق للتخميد الذي يسمح للنظام المهتز بالعودة إلى موضعه المتزن بأسرع وقت ممكن دون أن يهتز أو يتذبذب. يُعتبر التخميد الحرج الحد الفاصل بين السلوك التذبذبي (التخميد غير الكافي) والسلوك غير التذبذبي (التخميد الزائد).

بمعنى آخر، النظام ذو التخميد الحرج لا يتجاوز نقطة الاتزان ولا يهتز، بل يعود إلى السكون في أقل وقت ممكن. هذا مفيد بشكل خاص في التطبيقات التي تتطلب استقرارًا سريعًا دون أي حركة إضافية.

1.1.6 الخصائص الرئيسية للتخميد الحرج

1. **عدم وجود تذبذبات**: على عكس الأنظمة ذات التخميد غير الكافي، لا تظهر الأنظمة ذات التخميد الحرج أي تذبذبات حول نقطة الاتزان. 2. **أسرع عودة إلى الاتزان**: بين جميع مستويات التخميد التي تمنع التذبذبات، يعيد التخميد الحرج النظام إلى الاتزان في أقصر وقت ممكن. 3. **نسبة التخميد**: تكون نسبة التخميد ζ (وهي مقياس للتخميد مقارنةً بالتردد الطبيعي للنظام) تساوي 1 في حالة التخميد الحرج. رياضيًا، يحدث التخميد الحرج عندما:

$$\zeta = 1$$

2.1.6 أمثلة على التخميد الحرج في الحياة الواقعية

- **ممتصات الصدمات في السيارات**: تهدف أنظمة تعليق السيارات المصممة بشكل جيد إلى تحقيق تخميد قريب من التخميد الحرج بحيث تستقر السيارة بسرعة بعد المرور فوق مطب دون حدوث ارتدادات زائدة. - **أجهزة إغلاق الأبواب**: العديد من أجهزة إغلاق الأبواب الأوتوماتيكية مصممة لتكون ذات تخميد حرج، بحيث يغلق الباب بسرعة دون ارتداد عند الإطار. - **الأدوات والقياسات**: الأدوات التي تحتوي على مؤشرات متحركة (مثل عدادات السرعة أو مقاييس الضغط التناظرية) غالبًا ما تستخدم التخميد الحرج لضمان استقرار المؤشر بسرعة عند القراءة الصحيحة دون اهتزازات.

2.6 المنظور الرياضي

في نظام كتلة-نابض-مخمّد، تكون معادلة الحركة كالتالي:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

حيث m هو الكتلة، c هو معامل التخميد، و k هو ثابت النابض. يحدث التخميد الحرج عندما:

$$c = 2\sqrt{km}$$

عند هذا المستوى من التخميد، يعود النظام إلى الاتزان دون اهتزازات، ويُطلق على معامل التخميد c في هذه الحالة **معامل التخميد الحرج**.

ملاحظة 1

لماذا التخميد الحرج مهم؟

في التطبيقات التي يكون فيها التذبذب غير مرغوب فيه أو قد يكون خطيرًا (مثل نظام تعليق السيارات أو الهندسة الإنشائية)، يساعد تحقيق التخميد الحرج في تحقيق التوازن بين الاستقرار والسرعة، مما يسمح للأنظمة بالاستجابة بسرعة وفعالية للتشويشات.

في الأنظمة التذبذبية، تصف **السلوكيات الانتقالية** و**السلوكيات المستقرة** مرحلتين مختلفتين في استجابة النظام للقوى الخارجية أو الاضطرابات. فهم هذين السلوكين أمر أساسي لتحليل كيفية استجابة الأنظمة على مدار الوقت.

1. **السلوك الانتقالي**

جدول 1.6: Caption

- **التعريف**: يشير السلوك الانتقالي إلى الاستجابة الأولية للنظام عند تعرضه لأول مرة للاضطراب أو عند بدء حركته. يتلاشى هذا الجزء من الحركة تدريجيًا مع مرور الوقت بسبب التخميد. - **الخصائص**: - تشمل الاستجابة الانتقالية الاهتزازات أو الحركات التي تحدث فور تعرض النظام للاضطراب. - تعتمد على الشروط الابتدائية للنظام، مثل الموضع الأولي والسرعة. - في الأنظمة المخمدة، تتضاءل الاستجابة الانتقالية بمرور الوقت، حيث يتم فقدان الطاقة تدريجيًا بسبب الاحتكاك أو المقاومة أو أي قوى مخمدة أخرى. - **مثال**: عندما تدفع بندولًا وتتركه، فإنه يتأرجح في البداية جيئة وذهابًا مع تناقص في السعة. هذا التأرجح الأولي هو السلوك الانتقالي.

2. **السلوك المستقر**

- **التعريف**: يشير السلوك المستقر إلى استجابة النظام على المدى الطويل بعد اختفاء التأثيرات الانتقالية. في هذه المرحلة، يهتز النظام باستمرار على تردد القوة الخارجية دون تلاشي. - **الخصائص**: - تتذبذب الاستجابة المستقرة على نفس تردد القوة الخارجية. - يظل هذا السلوك ثابتًا مع مرور الوقت، ولا يعتمد على الشروط الابتدائية للنظام. - تعتمد سعة الاستجابة المستقرة على تردد القوة الدافعة ومعاملات النظام، مثل التردد الطبيعي ومعامل التخميد. - **مثال**: إذا واصلت دفع أرجوحة بفواصل زمنية منتظمة، فستصل الأرجوحة في النهاية إلى سعة وتردد ثابتين يتناسبان مع نمط الدفع. هذه الحركة هي السلوك المستقر.

مقارنة بين السلوك الانتقالي والسلوك المستقر

| الجانب | السلوك الانتقالي | السلوك المستقر | |--------------|----------------------|--|---------------------------------| | **الاعتماد على الزمن** | يسيطر في البداية ثم يتلاشى مع الوقت | يسيطر على المدى الطويل | | **الاعتماد على الشروط الابتدائية** | يعتمد بشكل كبير على الشروط الابتدائية | مستقل عن

الشروط الابتدائية | | **تأثير التخميد** | يؤدي إلى تلاشي السعة | يحافظ على سعة ثابتة إذا كان النظام مدفوعًا | | **التردد** | قد يختلف أو يتطابق مع التردد الطبيعي | يتطابق مع تردد القوة الخارجية | | **الطاقة** | يتم فقدان الطاقة تدريجيًا | يتم تعويض الطاقة المفقودة بالطاقة المدخلة في الأنظمة المدفوعة |

التطبيقات العملية

- في الهندسة، يُعد فهم السلوك الانتقالي مقابل السلوك المستقر ضروريًا للتنبؤ باستجابات النظام، خاصةً في تصميمات الاهتزازات والدوائر الكهربائية وأنظمة التحكم. - تساعد **تحليلات السلوك الانتقالي** المصممين على التأكد من أن التقلبات الأولية تقع ضمن الحدود المقبولة، بينما تضمن **تحليلات السلوك المستقر** أن الأنظمة تعمل بشكل موثوق خلال التشغيل المستمر.

باختصار، السلوك الانتقالي هو استجابة مؤقتة تتلاشى بمرور الوقت، بينما السلوك المستقر هو الاستجابة المستمرة والمستقرة للنظام. كيف يؤثر التخميد على السعة؟

يؤدي التخميد إلى تقليل سعة الاهتزازات في الأنظمة التذبذبية. يعتمد مقدار تأثير التخميد على السعة على نوع التخميد الموجود في النظام، حيث يكون التخميد عبارة عن قوة مقاومة تعمل على امتصاص الطاقة من النظام مع مرور الوقت، مما يسبب تلاشي الاهتزازات تدريجيًا.

تأثير التخميد على السعة

1. **في الأنظمة غير المخمدة (بدون تخميد)**: - تظل سعة الاهتزازات ثابتة ولا تتناقص بمرور الوقت، لأن الطاقة تبقى محفوظة في النظام.

2. **في الأنظمة المخمدة جزئيًا (التخميد الضعيف)**: - تكون هناك تذبذبات، ولكن تتناقص سعة هذه التذبذبات بمرور الوقت تدريجيًا، حيث يمتص التخميد جزءًا من الطاقة مع كل دورة. وهذا يسبب تلاشي الاهتزازات بشكل أبطأ.

3. **في التخميد الحرج**: - يعود النظام إلى موضع الاتزان بسرعة دون تذبذب. يُستخدم هذا النوع في التطبيقات التي تتطلب استجابة سريعة وثابتة بدون اهتزازات.

4. **في الأنظمة المخمدة بشكل زائد (التخميد الزائد)**: - تقل السعة بشكل كبير، ويعود النظام إلى الاتزان ببطء دون تذبذب، مما قد يستغرق وقتًا أطول للوصول إلى السكون التام.

العلاقة الرياضية

في حالة التخميد الضعيف، يُعطى تعبير السعة A كالتالي:

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$$

حيث: - F_0 هي قوة الدفع، - m هي الكتلة، - ω_0 هو التردد الطبيعي للنظام، - Ω هو تردد القوة الدافعة، - λ هو معامل التخميد.

عندما يزداد التخميد (زيادة λ)، يصبح المقام أكبر، مما يقلل من قيمة السعة A.

الرنين وضد الرنين هما ظاهرتان ديناميكيتان تحدثان في الأنظمة الاهتزازية، ولكنهما مختلفتان تمامًا في طبيعتهما وتأثيرهما:

1.2.6 .1 الرنين :(Resonance)

التعريف:

- يحدث الرنين عندما يكون التردد الطبيعي للنظام مساويًا لتردد القوة الخارجية المطبقة عليه.
- في هذه الحالة، تتضخم سعة الاهتزاز بشكل كبير بسبب التوافق بين الترددين.

الخصائص:

- ينتج عن الرنين زيادة كبيرة جدًا في السعة، ويمكن أن يؤدي إلى انهيار النظام إذا لم يتم التحكم فيه. - مثال: عندما يهتز جسر بتردد يساوي التردد الطبيعي له بسبب الرياح أو خطوات الناس، مما قد يؤدي إلى انهياره (كما حدث مع **جسر تاكوما الضيق**).

المعادلات: - السعة تصل إلى أقصى قيمة عندما يكون التردد الزاوي للقوة الخارجية (Ω) قريبًا جدًا من التردد الطبيعي للنظام (ω_0).

**2. ضد الرنين **:(Anti-Resonance)

التعريف: - ضد الرنين هو الحالة التي يكون فيها اهتزاز أحد أجزاء النظام معدومًا أو منخفضًا جدًا، بالرغم من وجود قوة خارجية. - يحدث ذلك عندما تتفاعل القوى أو الأنظمة الفرعية بطريقة تجعل التأثير الإجمالي يلغي الاهتزاز عند جزء معين.

الخصائص: - عند ضد الرنين، تكون سعة الاهتزاز صغيرة جدًا أو صفرية في بعض النقاط، على الرغم من وجود طاقة في النظام. - مثال: في الأنظمة الميكانيكية أو الكهربائية المترابطة، إذا كان أحد أجزاء النظام يهتز، فإن الآخر قد يصبح في حالة "ثبات" نسبي (لا يهتز).
المعادلات: - يحدث ضد الرنين عندما تتداخل القوى الداخلية والخارجية بطريقة تدمر بعضها البعض جزئيًا أو كليًا.

الفرق الأساسي:

الخاصية	**الرنين** (Resonance)	**ضد الرنين** (Anti-Resonance)
التأثير	تضخم في سعة الاهتزاز	تقليل أو انعدام الاهتزاز عند نقطة محددة
الشرط	توافق التردد الخارجي مع التردد الطبيعي	تداخل قوى يؤدي إلى إلغاء الاهتزاز
الموقع	يحدث في كل أجزاء النظام	يحدث في أجزاء معينة فقط
التطبيقات	مضخمات الصوت، الأنظمة الاهتزازية	تقليل الاهتزازات في أنظمة الربط

المثال المشترك: في نظام يتكون من كتلتين مرتبطتين بنابضين: - عند **الرنين**، تتضخم اهتزازات النظام بالكامل. - عند **ضد الرنين**، قد تكون إحدى الكتلتين ثابتة تقريبًا (بدون اهتزاز)، في حين يهتز الجزء الآخر بشدة.

المصادر

[1] E. Boyce, C Diprima, Elementary Differential Equations. Wiley, 9 edition, 2008.

[2] Earl A. Coddington, Norman Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, Tata McGraw-Hill Publishing Company, New Delhi, 1972.

[3] R. K. Nagle, E B. Saff, A. D. Snider, Fundamentals of Differential Equations. Pearson, 2017.

[4] C. Moler, C. V. Loan, Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. SIAM Rev. 45(1), 49-3 , 2003.

[5] E.J. Putzer, Avoiding the Jordan canonical form in the discussion of linear systems with constant coefficients, A merican Mathematical Monthly **73**(1966), .7-2

[6] D. Somasundaram, Ordinary Differential Equations: A First Course. Narosa Publishing House, 2001.

[7] M. A. Al-Gwaiz, Sturm-Liouville Theory and its Applications, Springer, 2007.

[8] J. W. Brown, R. V. Churchill, Fourier Series and Boundary value problems, McGraw-Hill, 8th ed, 2012.

[9] حسن مصطفى العويضي، المعادلات التفاضلية "الجزء الثاني"، مكتبة الرشد، 2015 .

الرموز

$\det(\cdot)$	:	المحدد
$\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$	:	مجموعة المصفوفات ذات البعد $n \times m$
$\mathscr{M}_{n}(\mathbb{R})$	:	مجموعة المصفوفات المربعة ذات البعد $n \times n$
I_n	:	مصفوفة الوحدة في $\mathscr{M}_{n}(\mathbb{R})$
A^t	:	منقول مصفوفة A
$J_\alpha(\cdot)$	:	دالة بسل من النوع الأول
$Y_n(\cdot)$	:	دالة بسل من النوع الثاني
$\Gamma(\cdot)$	:	
$\mathrm{erf}(\cdot)$	:	

الفهرس