Chapitre 2: Systèmes Linéaires Libres à Un degré de Liberté.

(Vibration libre non amorti)

Le système le plus fondamental pour l'étude des vibrations est le système à un seul degré de liberté. Par définition, un système à un seul degré de liberté est un système pour lequel une seule coordonnée indépendante est nécessaire pour décrire complètement le mouvement du système.

On appelle oscillateur harmonique dès qu'il soit écarté de sa position d'équilibre d'une distance x (ou angle θ), est soumis à une force de rappel opposée et proportionnelle à l'écartement x (ou θ) : $F = -Cx$.

Pour étudier les systèmes vibratoires il faut suivre les étapes suivantes :

- Etablir l'équation différentielle qui représente le mouvement.
- La résolution de l'équation différentielle.
- Déduire les paramètres physiques : Amplitude, Battement, Fréquence ...etc.

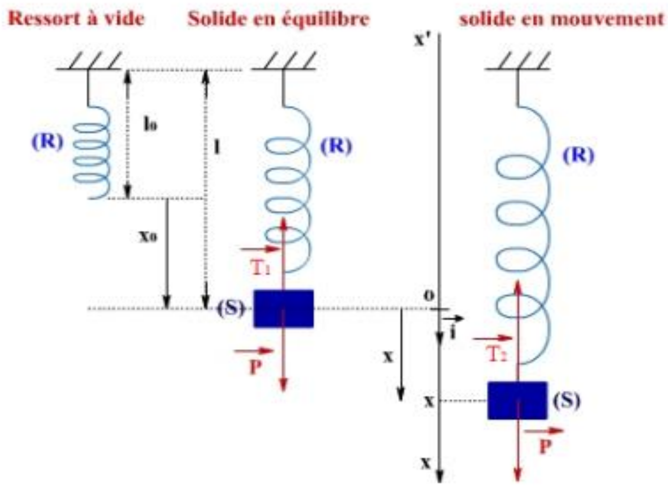
Plusieurs méthodes sont utilisées pour déterminer l'équation différentielle représentant le mouvement. Parmi ces méthodes on cite : la méthode de Newton, la méthode de Lagrange, la méthode d'énergie…etc.

Dans le présent cours, nous utilisons deux méthodes seulement : la méthode de newton et la méthode de Lagrange.

a- La méthode de Newton

Exemple 1 :

Étude du mouvement d'un oscillateur harmonique, ressort (k) lié avec une masse (m). Soit une masse accrochée à l'extrémité d'un ressort verticale sans masse. Cette masse se déplace sans frottement sur le plan vertical. A t=0, on écarte ce point de sa position d'équilibre d'une grandeur x puis on le lâche sans vitesse initiale.



En appliquant la méthode de Newton

a. Equilibre $\sum\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{P} + \overrightarrow{T1} = 0 \rightarrow P - T1 = 0$

$$mg - kx_0 = 0 \text{ ……………..(1)}$$

b. Mouvement $\sum\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{P} + \overrightarrow{T2} = m\vec{a} \rightarrow P - T2 = ma$

$$mg - k(x_0 + x) = ma\ .$$

$$mg - kx_0 - kx = m\ddot{x}$$

$$-kx = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Finalement on peut écrire l'équation différentielle qui représente le mouvement par :

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

On remarque que c'est une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre.

b- Méthode de Lagrange :

L'équation de Lagrange permet de déterminer l'équation du mouvement des systèmes mécaniques. Elle est décrite par l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=F_i$$

Ou (L) est le Lagrangien qui est une fonction explicite des coordonnées généralisées et des vitesses généralisées L=T-U

T : est l'énergie cinétique totale du système

U: est l'énergie potentielle totale du système

q_i et $\dot{q}_i$ sont les coordonnées et les vitesses généralisées

Fi sont les forces généralisée associées à qi .

Pour le cas du système conservatif à un degré de liberté, l'équation (2-21) se réduit à :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

Exemple

Soit le système précèdent (masse-ressort), on utilisant la méthode de Lagrange écrire l'équation de mouvement et déduire la pulsation propre.

- Lagrangien L=T-U
- Energie cinétique $T=\frac{1}{2}mv^2$
- Energie potentielle $U=\frac{1}{2}Kx^2$

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}Kx^2$$

- Equation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

Après les dérivations nous recevons cette équation $m\ddot{x}+kx=0$

Si nous devisons cette équation sur (m) nous obtenons l'équation de mouvement

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \text{ ....(2)}$$

Solution de l'équation du mouvement

L'équation différentielle de l'oscillateur harmonique admet la solution sinusoïdale suivante :

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

L'amplitude A et la phase φ dépendent des conditions initiales et pour trouver ses valeurs on a besoin de deux conditions initiales (généralement $q(t_0)$ et $\dot{q}(t_0)$). On peut donc varier ces constantes en variant les conditions initiales.

La vitesse de la masse est représentée par le premier dérivé de la position x

$\dot{x} = -Aw_0 \sin(w_0t+\varphi)$

$\ddot{x} = -Aw_0^2 \cos(w_0t+\varphi)$

Donc $\ddot{x}=-w_0^2x$

On obtient L'équation suivante : $\ddot{x} + w_0^2x = 0$ ....(3)

En comparant l'équation (2) par cette équation on déduit que

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{k\,m}$$

ω_0 est la pulsation libre (propre).

L'énergie d'un oscillateur harmonique

L'énergie d'un oscillateur harmonique est la somme de ses énergies cinétiques et potentielles :

$$E=T+U$$

- L'énergie cinétique de translation d'un corps de masse m et de vitesse v est

$$T_{translation}=\frac{1}{2}mv^2$$

- L'énergie cinétique de rotation d'un Corps de moment d'inertie $I\Delta$autour d'un axe Δ et de vitesse angulaire θ est : $T_{rotation} = \frac{1}{2}I_\Delta\theta^2$

• L'énergie potentielle d'une masse m dans un champ gravitationnelle constant g est : U=mgh (ou bien U=-mgh dans le cas d'une descente d'une hauteur h)

• L'énergie potentielle d'un ressort de raideur k lors d'une déformation x est :

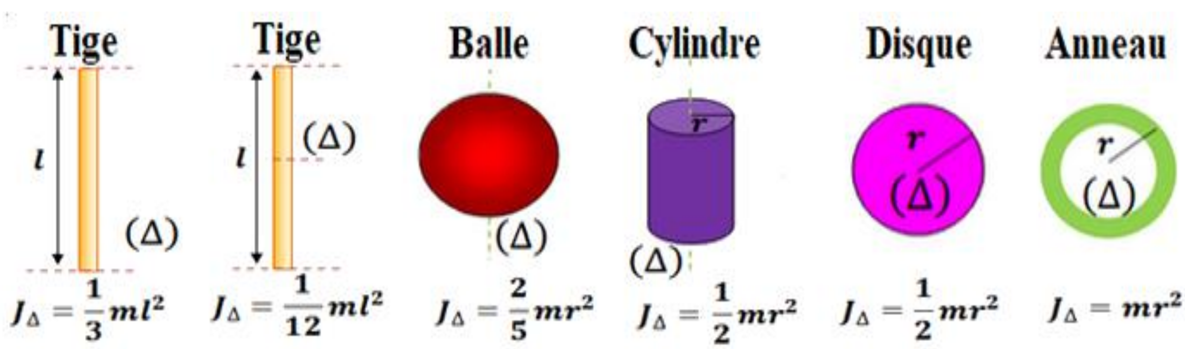
$$Uressort=\frac{1}{2}\boldsymbol{Kx^2}$$

• L'énergie potentielle d'un ressort de torsion de raideur k lors d'une déformation θ est :

$$Uressort=\frac{1}{2}\boldsymbol{K\Theta^2}$$

Systèmes mécaniques		**Système électrique**
Translation	**Rotation**	**Circuit RLC**
Déplacement : x	Angle : θ	Charge : q
Vitesse : $\dot{x}$	Vitesse angulaire : $\dot{\theta}$	Courant : $\dot{q}$
Accélération : $\ddot{x}$	Accélération angulaire : $\ddot{\theta}$	Variation de courant : $\ddot{q}$
Constante de raideur : k	Constante de torsion : C	Inverse de la capacité : 1/c
Masse : m	Moment d'inertie : I	Inductance : L
Coefficient d'amortissement : δ	Coefficient d'amortissement : δ	Résistance : R
Energie cinétique : $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$	$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$	Energie magnétique : $\frac{1}{2}L\dot{q}^2$
Energie potentielle : $\frac{1}{2}kx^2$	$-mgh$	Energie électrique : $\frac{1}{2c}q^2$

Remarque : L'inertie d'un corps dépond de ses dimensions, de sa masse et de son axe de rotation, la figure présente l'inertie de différents corps



Théorème de Huygens

Le moment d'inertie varie suivant l'axe de rotation, si I_0 est l'inertie d'un corps de masse m lorsque l'axe de rotation passe par le centre de la masse du corps et I_Δ est le moment d'inertie si l'axe de rotation est Δ avec une distance (d) entre le centre de la masse et l'axe de rotation, le théorème de Huygens donne l'inertie par la formule suivante :

$$\mathbf{I_\Delta = I_0 + md^2}$$