Centre Universitaire de Mila
Institut des Mathématiques et Informatique
Deuxième année Mathématiques et Mathématiques Appliquées 2024/2025

Matière : ***Algèbre 3*** Responsable : ***N. Haddad***

Série de TD N° 4 (Trigonalisation et ses applications)

Exercice 1 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la forme de Jordan J de A.
2. Calculer J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer une matrice de passage P pour A.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$

1. Montrer que 1 et 2 sont des valeurs propres de M, puis déduire la troisième valeur propre.
2. Montrer que M n'est pas diagonalisable.
3. Montrer que M est trigonalisable.
4. Calculer une matrice inversible P telle que $J = P^{-1}MP$ soit sous la forme de Jordan

Exercice 3 Déterminer une réduite de Jordan de chacune des matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Calculer l'exponentielle e^{tA_i}, pour les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + z(t), \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + z(t), \\ z'(t) = x(t) - y(t) + z(t). \end{cases}$$

avec $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 1, 0)$.