Université Abdelhafid Boussouf - Mila $2024-2025$
Institut des Mathématiques et informatique
Département des Mathématiques **Master** 1 **: MMTD**

Interrogation : Gestion des files d'attente

Exercice 1. *Une station-service dispose d'une seule pompe à essence. Les clients arrivent en moyenne toutes les 5 minutes ($\lambda = 12$ clients/heure). Chaque client passe en moyenne 4 minutes à se servir ($\mu = 15$ clients/heure).*

1. *Calculez le taux d'utilisation du système (ρ).*
2. *Déterminez les mesures suivantes :*
   - L_q *: nombre moyen de clients dans la file d'attente,*
   - L *: nombre moyen de clients dans le système,*
   - W_q *: temps moyen passé dans la file d'attente,*
   - W *: temps moyen passé dans le système.*
3. *Quelle est la probabilité qu'il y ait 2 clients ou plus dans le système ?*

Exercice 2. *Un guichet de banque reçoit des clients à un taux moyen de $\lambda = 20$ clients par heure. Le temps entre les arrivées suit une distribution exponentielle.*

1. *Modélisez le processus d'arrivée des clients à ce guichet en tant que processus de Poisson.*
2. *Calculez la probabilité qu'aucun client n'arrive dans un intervalle de 15 minutes.*
3. *Déterminez la probabilité qu'au moins 2 clients arrivent dans une période de 10 minutes.*
4. *Quel est le temps moyen entre deux arrivées successives de clients ?*
5. *Si un client est arrivé, quelle est la probabilité qu'il faille attendre plus de 6 minutes avant l'arrivée du prochain client ?*

Solution Exercice 1

1. Taux d'utilisation (ρ)

Le taux d'utilisation du système est donné par la formule :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

En substituant les valeurs :

$$\rho = \frac{12}{15} = 0,8$$

2. Mesures de performance

Les formules d'un système $M/M/1$ sont les suivantes :

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}, \quad L = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}, \quad W = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

Calcul de L_q :

$$L_q = \frac{0,8^2}{1-0,8} = \frac{0,64}{0,2} = 3,2 \text{ clients.}$$

Calcul de L :

$$L = \frac{0,8}{1-0,8} = \frac{0,8}{0,2} = 4 \text{ clients.}$$

Calcul de W_q :

$$W_q = \frac{0,8}{15 \cdot (1-0,8)} = \frac{0,8}{15 \cdot 0,2} = \frac{0,8}{3} \approx 0,267 \text{ heures (16,02 minutes).}$$

Calcul de W :

$$W = \frac{1}{15 \cdot (1-0,8)} = \frac{1}{15 \cdot 0,2} = \frac{1}{3} \approx 0,333 \text{ heures (20 minutes).}$$

3. Probabilité qu'il y ait 2 clients ou plus dans le système ($P(n \geq 2)$)

La probabilité qu'il y ait $n \geq 2$ clients dans le système est donnée par :

$$P(n \geq 2) = 1 - P(n < 2) = 1 - (P(0) + P(1))$$

Calcul de $P(0)$:

$$P(0) = 1 - \rho = 1 - 0,8 = 0,2$$

Calcul de $P(1)$:

$$P(1) = \rho \cdot P(0) = 0,8 \cdot 0,2 = 0,16$$

Calcul de $P(n \geq 2)$:

$$P(n \geq 2) = 1 - (0,2 + 0,16) = 1 - 0,36 = 0,64$$

La probabilité qu'il y ait 2 clients ou plus dans le système est de 64%.

Solution Exercice 2

1. **Modélisation du processus d'arrivée :**

   Le processus d'arrivée des clients suit un processus de Poisson de taux $\lambda = 20$ clients par heure, ce qui signifie que le nombre de clients arrivant par heure suit une loi de Poisson. On peut donc modéliser l'arrivée des clients à ce guichet par un processus de Poisson avec le paramètre $\lambda = 20$.

2. **Probabilité d'aucune arrivée dans un intervalle de 15 minutes :**

   Dans un processus de Poisson, la probabilité qu'aucun événement n'ait lieu dans un intervalle de temps t est donnée par :

   $$P(X = 0) = e^{-\lambda t},$$

   où X est le nombre d'événements (arrivées) et λ est le taux d'arrivée.

   Étant donné que $\lambda = 20$ clients par heure, et que 15 minutes représentent $\frac{1}{4}$ d'une heure, on a $t = \frac{1}{4}$ heure.

   La probabilité qu'aucun client n'arrive dans cet intervalle de 15 minutes est :

   $$P(X = 0) = e^{-20\times\frac{1}{4}} = e^{-5} \approx 0,0067.$$

3. **Probabilité d'au moins 2 clients dans 10 minutes :**

   Pour déterminer la probabilité qu'au moins 2 clients arrivent dans une période de 10 minutes, nous devons d'abord déterminer le nombre moyen d'arrivées pendant ces 10 minutes. Étant donné que le taux d'arrivée est $\lambda = 20$ clients par heure, pour 10 minutes ($t = \frac{1}{6}$ heure), le taux d'arrivée est :

   $$\lambda t = 20 \times \frac{1}{6} = \frac{20}{6} \approx 3,33\,\text{clients}.$$

   La probabilité d'avoir k clients arrivant pendant ce temps est donnée par la fonction de masse de probabilité de la distribution de Poisson :

   $$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}.$$

   Nous cherchons la probabilité qu'au moins 2 clients arrivent, soit $P(X \geq 2)$. Cela est équivalent à :

   $$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1).$$

   Calculons ces probabilités :

   $$P(X = 0) = e^{-3,33} \approx 0,0357,$$

   $$P(X = 1) = \frac{3,33^1 e^{-3,33}}{1!} \approx 0,119.$$

   Donc :

   $$P(X \geq 2) = 1 - 0,0357 - 0,119 \approx 0,8453.$$

4. **Temps moyen entre deux arrivées successives :**

   Le temps entre deux arrivées successives suit une distribution exponentielle de paramètre $\lambda = 20$ clients par heure. L'espérance d'une variable aléatoire exponentielle est donnée par :

   $$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}.$$

Dans ce cas, le temps moyen entre deux arrivées successives est :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{20} = 0,05\,\text{heure} = 3\,\text{minutes}.$$

5. **Probabilité d'attente supérieure à 6 minutes :**

   Si un client est arrivé, le temps d'attente jusqu'à l'arrivée du prochain client suit également une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 20$. La probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 6 minutes est donnée par :

   $$P(T > t) = e^{-\lambda t}.$$

   Pour $t = 6$ minutes ($t = \frac{6}{60} = 0,1$ heure), la probabilité est :

   $$P(T > 0,1) = e^{-20 \times 0,1} = e^{-2} \approx 0,1353.$$