

Série no 3 : Gestion des files d'attente

Exercice 1. Un centre d'appel dispose de $c = 4$ opérateurs pour traiter les appels entrants, qui arrivent selon un processus de Poisson avec un taux d'arrivée de $\lambda = 10$ appels par minute. Le temps de service pour chaque appel est exponentiellement distribué avec un taux de service de $\mu = 3$ appels par minute pour chaque opérateur.

1. Calculer le taux d'occupation ρ de chaque opérateur et du centre d'appel dans son ensemble.
2. Déterminer la probabilité que tous les opérateurs soient occupés, c'est-à-dire que le système soit dans un état de blocage où tous les canaux sont occupés (avec $\pi_0 = \frac{1}{32.4}$).
3. Calculer la probabilité de file d'attente (probabilité qu'un appel soit mis en attente).
4. Déterminer le nombre moyen de clients dans la file d'attente et le temps moyen d'attente d'un client avant de recevoir un service.

Exercice 2. a) Écrire le nombre moyen de clients ainsi que le temps moyen passé par un client dans un système décrit par le modèle $M/M/c$ pour les cas suivants : $n_0 = 1$, $n_0 = 2$, $n_0 = 3$.

b) On considère une cabine téléphonique avec une loi d'arrivée de Poisson avec un taux d'arrivée de 3 personnes/heure. Le temps passé par un individu dans la cabine suit la loi exponentielle de moyenne 10 minutes.

1. Quel est le temps moyen d'attente de chaque individu ?
2. Quel est le nombre total moyen de personnes dans le système ?
3. Quelle est la probabilité que le temps total passé dans le système soit plus grand ou égal à 10 minutes ? 15 minutes ? 20 minutes ? Quelle conclusion peut-on en tirer ?
4. On suppose maintenant que le taux d'arrivée s'élève à 10 personnes/heure. On souhaiterait limiter le nombre moyen de personnes à moins de trois (resp. le temps d'attente moyen à moins de 10 minutes). De combien de cabines faudrait-il disposer au minimum ?

Exercice 3. Dans un centre d'appels, il y a deux types de clients : les clients réguliers et les clients VIP. Les appels arrivent dans le centre selon un processus de Poisson avec un taux d'arrivée total de $\lambda = 8$ appels par minute. Parmi ces appels, 25% sont des clients VIP, et les autres sont des clients réguliers. Le centre dispose de $c = 2$ agents pour traiter les appels. Le temps de service pour chaque appel est exponentiellement distribué avec un taux de service de $\mu = 6$ appels par minute pour chaque agent.

Les appels des clients VIP ont une priorité plus élevée : s'il y a des clients VIP dans la file d'attente, ils sont servis avant les clients réguliers.

1. Calculer le taux d'arrivée pour les clients VIP (λ_{VIP}) et les clients réguliers ($\lambda_{régulier}$).
2. Calculer le taux d'occupation global ρ des agents.
3. Déterminer la probabilité que les deux agents soient occupés.

4. Calculer le nombre moyen de clients VIP et de clients réguliers dans la file d'attente.

Exercice 4. Calculer pour chacune des deux files $M(\lambda)/M(\mu)/2$ (deux serveurs offrant chacun un service d'une durée moyenne $1/\mu$) et $M(\lambda)/M(2\mu)/1$ (un serveur offrant un service d'une durée moyenne $1/(2\mu)$) en régime stationnaire ($\lambda < 2\mu$) :

- la longueur moyenne de la file $\mathbb{E}(Q_\infty)$;
- le temps d'attente moyen avant service $\mathbb{E}(W_\infty)$, le temps de séjour moyen dans le système $\mathbb{E}(W_\infty + S_\infty)$;
- la probabilité de trouver le système vide $P(Q_\infty = 0) = P(W_\infty = 0)$.

Dresser un tableau comparatif des résultats obtenus puis en tirer une conclusion.

Exercice 5. (Supplémentaire)

Une entreprise reçoit des commandes de clients qui arrivent selon un processus de Poisson avec un taux de $\lambda = 4$ commandes par heure. Le temps de traitement pour chaque commande suit une distribution générale avec un temps de service moyen $E[S] = 0.2$ heures et une variance du temps de service $\text{Var}(S) = 0.04$ heures.

1. Calculer le taux d'occupation ρ du serveur.
2. Utiliser la formule de Pollaczek-Khinchine pour déterminer le nombre moyen de clients dans la file d'attente.
3. Déterminer le temps moyen passé par un client dans le système, incluant l'attente et le service.