CALCUL STOCHASTIQUE

Processus aléatoire à temps continu

Définition :

Un processus aléatoire à temps continu est une famille de v.a. $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On peut également le voir comme une fonction aléatoire :

$$X : \begin{cases} \Omega & \{\text{fonctions de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } \mathbb{R}\} \\ \omega & \mapsto t \mapsto X_t(\omega) \end{cases}$$

Définition

Les v.a. $X_t - X_s,\ t > s \geq 0$, sont appelées des accroissements du processus (X_t).

Définition

Un processus (X_t) est appelé un <u>processus à trajectoires continues</u> (ou simplement <u>processus continu</u>) si $\mathbb{P}(\omega \in \Omega : t \mapsto X_t(\omega) \text{ est continue}) = 1$.

Mouvement brownien standard

Définition : (Première caractérisation du mouvement brownien standard)

Un *mouvement brownien standard* (abrégé m.b.s.) est un processus aléatoire à temps continu $(B_t, t \in \mathbb{R}^+)$ tel que :

$$\begin{cases} \text{i)} & B_0 = 0 \quad \text{p.s.}, \\ \text{ii)} & (B_t) \text{ est à accroissements indépendants et stationnaires}, \\ \text{iii)} & B_t \sim \mathcal{N}(0,t), \quad \forall t > 0, \\ \text{iv)} & (B_t) \text{ est à trajectoires continues.} \end{cases}$$

Remarque : De cette définition, il suit que pour $t \geq s \geq 0$,

$$B_t - B_s \sim B_{t-s} \sim \mathcal{N}(0, t-s), \text{i.e.} \mathbb{E}(B_t - B_s) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}((B_t - B_s)^2) = t - s.$$

En appliquant la loi des grands nombres, on trouve encore que

$$\frac{B_t}{t} \to 0 \quad \text{p.s. lorsque } t \to \infty.$$

De plus, on a

$$\frac{B_t}{\sqrt{t}} \sim \mathcal{N}(0,1), \quad \forall t > 0,$$

(pas besoin du théorème central limite pour le prouver !).

On voit donc que le m.b.s. est bien une généralisation à temps continu de la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$.

Transformations du mouvement brownien standard

Soit $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un mouvement brownien standard. Alors les cinq processus ci-dessous sont également des mouvements browniens standard :

1) $B_t^{(1)} = -B_t$, $t \in \mathbb{R}_+$ ($\longleftrightarrow$ propriété de symétrie du mouvement brownien) ;

2) soit $T \in \mathbb{R}_+$ fixé : $B_t^{(2)} = B_{t+T} - B_T$, $t \in \mathbb{R}_+$ ($\longleftrightarrow$ stationnarité) ;

3) soit $T \in \mathbb{R}_+$ fixé : $B_t^{(3)} = B_T - B_{T-t}$, $t \in [0, T]$ ($\longleftrightarrow$ renversement du temps) ;

4) soit $a > 0$ fixé : $B_t^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}$, $t \in \mathbb{R}_+$ ($\longleftrightarrow$ loi d'échelle) ;

5) $B_t^{(5)} = tB_{\frac{1}{t}}$, $t > 0$ et $B_0^{(5)} = 0$ ($\longleftrightarrow$ inversion du temps). A cause de la propriété 4), on appelle le mouvement brownien standard un "fractal aléatoire" ou encore un "processus auto-similaire", i.e. un processus qui garde le même aspect à différentes échelles.

Processus gaussien

Définition

Un processus gaussien est un processus $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ tel que $(X_{t1}, \ldots, X_{tn})$ est un vecteur aléatoire gaussien $\forall n \geq 1$ et $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$. Ceci revient à dire que $c_1 X_{t_1} + \ldots + c_n X_{t_n}$ est une v.a. gaussienne $\forall n \geq 1$ et $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$ et $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.
Pour un vecteur aléatoire (pas forcément gaussien), on définit encore :

— La fonction $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ donnée par $m(t) = \mathbb{E}(X_t)$ et appelée la moyenne du processus.

— La fonction $K : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ donnée par $K(t, s) = Cov(X_t, X_s)$ et appelée la covariance du processus.

Proposition (Kolmogorov)

Étant donné $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et $K : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ symétrique et définie positive, il existe un processus gaussien $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ de moyenne m et de covariance K. De plus, m et K caractérisent entièrement le processus (X_t).

Proposition (2ème caractérisation du mouvement brownien standard)

Un mouvement brownien standard $(B_t, t \in \mathbb{R}^+)$ est un processus à trajectoires continues et gaussien avec moyenne $m(t) = 0$ et covariance $K(t, s) = t \wedge s := \min(t, s)$.

Démonstration :

Il faudrait vérifier que $c_1 B_{t_1} + \ldots + c_n B_{t_n}$ est une v.a. gaussienne. Vérifions seulement que $B_t + B_s$ est gaussienne :

$$B_t + B_s = (B_t - B_s) + 2B_s,$$

c'est donc une v.a. gaussienne, car la somme de deux v.a. gaussiennes indépendantes est encore gaussienne.

Soit maintenant $t \geq s \geq 0$:

$$\begin{aligned} m(t) &= \mathbb{E}(B_t) = 0, \\ K(t,s) &= \mathrm{Cov}(B_t, B_s) = \mathbb{E}(B_t B_s) = \mathbb{E}((B_t - B_s + B_s)B_s) \\ &= \mathbb{E}((B_t - B_s)B_s) + \mathbb{E}(B_s^2) = 0 + s, \end{aligned}$$

car $(B_t - B_s) \perp B_s$. On a donc $K(t,s) = \min(t,s)$.

Proposition

Les processus suivants sont des martingales par rapport à $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$:

$$\begin{cases} i)\ M_t &= B_t^2 - t, \\ ii)\ N_t &= e^{(B_t - \frac{t}{2})}. \end{cases}$$

Théorème de Lévy (3ème caractérisation du mouvement brownien standard)

Soit (X_t) un processus à trajectoires continues, adapté à une filtration (F_t) et tel que :

$$\begin{cases} i)\ (X_t) \text{ est une martingale par rapport à } (\mathcal{F}_t) \\ ii)\ (X_t^2 - t) \text{ est une martingale par rapport à } (\mathcal{F}_t). \end{cases}$$

Alors (X_t) est un mouvement brownien standard.

Intégrale de Riemann-Stieltjes

Intégrale de Riemann

Soit $t > 0$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. On définit

$$\int_0^t f(s)\, ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(s_i^{(n)})\left(t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}\right),$$

où $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} = t$, $s_i^{(n)} \in [t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}]$ et $\left(t_0^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)}\right)$ est une suite de partitions de $[0, t]$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq i\leq n} \left|t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}\right| = 0.$$

Fonction (localement) à variation bornée

Une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $\forall t > 0$,

$$\sup \sum_{i=1}^{n} \left|g(t_i) - g(t_{i-1})\right| < \infty,$$

où le supremum est pris sur toutes les partitions $(t_0, \ldots, t_n)$ de $[0, t]$, avec n arbitraire.

Remarque

— Si g est croissante, alors g est à variation bornée, car

$$\sum_{i=1}^{n} \left|g(t_i) - g(t_{i-1})\right| = \sum_{i=1}^{n} \left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right) = g(t) - g(0),$$

est indépendant de la partition choisie, donc

$$\sup \sum_{i=1}^{n} \left|g(t_i) - g(t_{i-1})\right| = g(t) - g(0).$$

est indépendante de la partition choisie, donc

$$\sum_{i=1}^{n} \left|g(t_i) - g(t_{i-1})\right| = g(t) - g(0) < \infty$$

— Si g est la différence de deux fonctions croissantes, alors g est à variation bornée. (La démonstration est similaire à ce qui précède.)

Intégrale de Riemann-Stieltjes

Soit $t > 0$, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ à variation bornée. On définit

$$\int_0^t f(s)\, dg(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(s_i^{(n)})\Big(g(t_i^{(n)}) - g(t_{i-1}^{(n)})\Big),$$

où $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} = t$, $s_i^{(n)} \in [t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}]$ et $\left(t_0^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)}\right)$ est une suite de partitions de $[0, t]$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le i\le n} \left|t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}\right| = 0.$$

Proposition

- Si f est continue et g est continûment dérivable, alors

$$\int_0^t f(s)\, dg(s) = \int_0^t f(s) g'(s)\, ds.$$

Passons des fonctions déterministes aux processus aléatoires

Soit $(H_t, t \in \mathbb{R}^+)$ un processus à trajectoires continues.
Soit $(V_t, t \in \mathbb{R}^+)$ un processus (à trajectoires) à variation bornée.
On définit

$$\left(\int_0^t H_s dV_s\right)(\omega) = \int_0^t H_s(\omega) dV_s(\omega)$$

Cette intégrale est définie trajectoire par trajectoire (i.e. "ω par ω").

Variation quadratique

Variation quadratique du mouvement brownien standard

Soit $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un mouvement brownien standard (par convenance, on notera parfois $B_t = B(t)$). Pour $t > 0$, on définit

$$\langle B\rangle_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{2^n}\left(B\left(\frac{it}{2^n}\right) - B\left(\frac{(i-1)t}{2^n}\right)\right)^2.$$

Proposition - Définition.

Pour $t > 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\langle B\rangle_t^{(n)} = t \quad \text{p.s.}$$

et on définit la <u>variation quadratique du mouvement brownien standard</u> $\langle B\rangle_t$ comme étant donnée par cette limite (par convention, on pose également $\langle B\rangle_0 = 0$).

Démonstration

Soient $X_i = B\left(\frac{it}{2^n}\right) - B\left(\frac{(i-1)t}{2^n}\right)$, $1 \leq i \leq 2^n$ (t et n fixés). Les v.a. X_i sont i.i.d. $\sim \mathcal{N}(0, t/2^n)$ et

$$\langle B\rangle_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{2^n} X_i^2.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\langle B\rangle_t^{(n)}) &= \sum_{i=1}^{2^n}\mathbb{E}(X_i^2) = \sum_{i=1}^{2^n}\frac{t}{2^n} = t,\\
\mathrm{Var}(\langle B\rangle_t^{(n)}) &= \sum_{i=1}^{2^n}\mathrm{Var}(X_i^2) = \sum_{i=1}^{2^n}\left(\mathbb{E}(X_i^4) - \mathbb{E}(X_i^2)^2\right)\\
&= \sum_{i=1}^{2^n}\left(3\frac{t^2}{4n} - \frac{t^2}{4n}\right) = \frac{t^2}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|\langle B\rangle_t^{(n)} - t| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Var}(\langle B\rangle_t^{(n)}) = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^2}{2^{n-1}} < \infty.$$

Par le lemme de Borel-Cantelli (a) et le critère donné pour la convergence presque sûre, on a donc

$$\langle B\rangle_t^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} t.$$

Intégrale stochastique (ou intégrale d'Itô)

Soit $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un mouvement brownien standard par rapport à $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$. Soit $T > 0$ fixé ($\neq$ temps d'arrêt). Notre but est de construire l'intégrale stochastique

$$\int_0^t H_s \, dB_s, \quad t \in [0, T],$$

pour un processus (H_t) vérifiant certaines propriétés. Pour cela, on procède en plusieurs étapes (cf. construction de l ?espérance).

Remarque
En mathématiques financières, T représente l'horizon du marché (désormais, on travaillera toujours à horizon fini, ce qui simplifie les choses), (B_t) représente l'évolution du prix d'un actif, (H_t) la stratégie d ?investissement sur cet actif, et

$$\int_0^t H_s \, dB_s$$

le gain réalisé au temps t avec la stratégie H. De la même manière qu'à temps discret, (H_t) doit être "prévisible" pour qu'il n'y ait pas de délit d'initié. Nous allons voir une manière simple de traduire cette propriété de prévisibilité à temps continu.

Première étape

Définition Un processus simple prévisible (par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)$) est un processus $(H_t, t \in [0, T])$ tel que

$$H_t = \sum_{i=1}^{n} X_i \mathbf{1}_{]t_{i-1}, t_i]}(t), \quad t \in [0, T],$$

où $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ forme une partition de $[0, T]$, et X_i est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurable et bornée, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On voit donc que sur l ?intervalle $]t_{i-1}, t_i]$, la valeur du processus (H_t) est déterminée par l'information $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$, d'où le nom de "prévisible" (l'appellation "simple" vient quant à elle du fait que le processus ne prend qu ?un nombre fini de valeurs (aléatoires !)). On pose

$$(H.B)_T := \int_0^T H_s\, dB_s = \sum_{i=1}^n X_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Cette définition de l'intégrale stochastique pour des processus simples prévisibles est univoque (mais ça demande un petit travail de vérification), et l'intégrale est linéaire en H, c'est-à-dire

$$((cH + K).B)_T = c(H.B)_T + (K.B)_T.$$

Remarque

Cette intégrale représente en quelque sorte "l'aire sous la courbe $t \mapsto H_t$?, lorsqu'on "mesure" les intervalles $]t_{i-1}, t_i]$ à l'aide du brownien (B_t). Ici, il faut faire attention quand on parle de mesure car : 1) La "mesure" de l'intervalle $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ peut être négative.

Proposition On a les égalités suivantes :

$$\mathbb{E}((H \cdot B)_T) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}((H \cdot B)_T^2) = \mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2\, ds\right).$$

La seconde égalité ci-dessus est appelée "l'isométrie d'Itô". Remarquer que si $H(t) \equiv 1$, alors on retrouve l'égalité $\mathbb{E}(B_T^2) = T$.

Démonstration En utilisant la linéarité de l'espérance et en introduisant un conditionnement à l'intérieur de l'espérance, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((H.B)_T) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})|\mathcal{F}_{t_{i-1}})\right). \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(X_i\mathbb{E}((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})|\mathcal{F}_{t_{i-1}})\right). \\
&= \mathbb{E}(X_i\mathbb{E}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})) = 0.
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que X_i est $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurable et $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \perp \mathcal{F}_{t_{i-1}}$. Pour l'isométrie, on calcule

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((H\cdot B)_T^2) &= \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_i X_j (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right). \\
\mathbb{E}((H\cdot B)_T^2) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_i^2 (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\right) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}\left(X_i X_j (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right).
\end{aligned}$$

En introduisant à nouveau un conditionnement à l'intérieur des espérances, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((H\cdot B)_T^2) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_i^2 (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right)\right) + 2\sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_i X_j (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right)\right). \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_i^2 \mathbb{E}\left((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\right)\right) + 2\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{E}\left(X_i X_j (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\mathbb{E}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right). \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i^2)(t_i - t_{i-1}) + 0,
\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2) = t_i - t_{i-1}$. D'autre part, on a

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2\, ds\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^2\, ds\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 (t_i - t_{i-1})\right),$$

donc l'isométrie est vérifiée.

Remarque Pour être tout à fait exact, l'isométrie d'Itô dit encore que si H et K sont deux processus simples prévisibles, alors

$$\mathbb{E}((H\cdot B)_T (K\cdot B)_T) = \mathbb{E}\left(\int_0^T H_s K_s\, ds\right).$$

La vérification est similaire à celle effectuée ci-dessus, quoiqu'un peu plus technique.

Deuxième étape

Soit $(H_t, t\in[0,T])$ un processus simple prévisible comme défini ci-dessus, et $t \in [0,T]$. On pose :

$$(H\cdot B)_t := \int_0^t H_s\, dB_s \equiv ((H\mathbf{1}_{[0,t]})\cdot B)_T = \sum_{i=1}^{n} X_i\Big(B_{t_i\wedge t} - B_{t_{i-1}\wedge t}\Big).$$

À nouveau, cette intégrale est linéaire en H, et on a, par la proposition précédente :

$$\mathbb{E}((H\cdot B)_t)=0,\quad \mathbb{E}((H\cdot B)_t^2)=\mathbb{E}(((H\mathbf{1}_{[0,t]})\cdot B)_T^2)=\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2\mathbf{1}_{[0,t]}(s)ds\right)=\mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2\,ds\right).$$

De plus, on peut calculer :

$$\mathrm{Cov}((H\cdot B)_t,(K\cdot B)_s)=\mathbb{E}((H\cdot B)_t(K\cdot B)_s)=\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge s} H_rK_r\,dr\right).$$

Remarque Si $t\in]t_{k-1},t_k]$, alors

$$(H\cdot B)_t=\sum_{i=1}^{k-1}X_i(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})+X_k(B_t-B_{t_{k-1}}).$$

Proposition

Le processus $((H\cdot B)_t, t\in[0,T])$ est une martingale continue de carré intégrable.

Démonstration

Par la remarque ci-dessus et la continuité de (B_t), le processus $((H\cdot B)_t)$ est clairement continu à l'intérieur des intervalles $]t_{k-1},t_k[$.

Aux points limites, il est aisé de vérifier que le processus reste continu également.

D'autre part, l'isométrie montrée plus haut indique que $((H\cdot B)_t)$ est un processus de carré intégrable, donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mathbb{E}(|(H\cdot B)_t|)\le\sqrt{\mathbb{E}((H\cdot B)_t^2)}<\infty.$$

De plus, si on suppose que $t\in]t_{k-1},t_k]$, alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((H\cdot B)_T\mid\mathcal{F}_t) &= \sum_{i=1}^{k-1}\mathbb{E}(X_i(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})\mid\mathcal{F}_t)+\mathbb{E}(X_k(B_{t_k}-B_{t_{k-1}})\mid\mathcal{F}_t)+\sum_{i=k+1}^{n}\mathbb{E}(X_i(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})\mid\mathcal{F}_t).\\ &=\sum_{i=1}^{k-1}X_i(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})+X_k\mathbb{E}((B_{t_k}-B_{t_{k-1}})\mid\mathcal{F}_t)+\sum_{i=k+1}^{n}\mathbb{E}(X_i(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}\mid\mathcal{F}_{t_{i-1}})\mid\mathcal{F}_t).\\ &=\sum_{i=1}^{k-1}X_i(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})+X_k(B_t-B_{t_{k-1}})+0=(H\cdot B)_t.\end{aligned}$$

par la remarque ci-dessus. Le processus $((H \cdot B)_t)$ est donc une martingale, car pour $t \leq s$, on a :

$$\mathbb{E}((H \cdot B)_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}((H \cdot B)_T \mid \mathcal{F}_t) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((H \cdot B)_T \mid \mathcal{F}_s) = (H \cdot B)_s.$$

D'après l'inégalité de Doob, on a :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} (H \cdot B)_t^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left((H \cdot B)_T^2\right) = 4\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2\, ds\right).$$

Propriétés de l'intégrale stochastique

- Linéarité : $((cH + K) \cdot B)t = c(H \cdot B)_t + (K \cdot B)_t$ p.s.
- Espérance nulle et isométrie : $\mathbb{E}((H \cdot B)_t) = 0$ et $Cov((H \cdot B)_t, (K \cdot B)_s) = \mathbb{E}(\int_0^{t\wedge s} H_r\, K_r\, dr)$.
- $(H \cdot B)$ est une martingale continue de carré intégrable telle que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} (H \cdot B)_t^2\right) \leq 4\, \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2\, ds\right].$$

Intégrale stochastique par rapport à une martingale

On peut généraliser l'intégrale d'Itô en remplaçant le mouvement brownien B par M, une martingale continue de carré intégrable. On écrit alors $\int_0^t H_s\, dM_s$ au lieu de $\int_0^t H_s\, dB_s$.

1. Pour (H_t) un processus simple donné par

$$H_t = \sum_{i=1}^n X_i \mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i]}(t),$$

on pose

$$(H \cdot M)_t \equiv \int_0^t H_s\, dM_s = \sum_{i=1}^n X_i \Big(M_{t_i\wedge t} - M_{t_{i-1}\wedge t}\Big),$$

et on vérifie que :

$$\mathbb{E}((H \cdot M)_t) = 0, \quad \mathbb{E}((H \cdot M)_t^2) = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2\, d\langle M\rangle_s\right].$$

Remarquer que le terme ds apparaissant dans l'isométrie pour $(H \cdot B)_t$ a logiquement été remplacé par $d\langle M\rangle_s$ pour tenir compte de la variation quadratique $\langle M\rangle_s$ de la martingale, qui n'est pas forcément égale à s.

D'autre part, on vérifie que le processus $((H \cdot M)_t, t \in [0, T])$ est également une martingale continue de carré intégrable.

2. L'extension de l'intégrale à un processus (H_t) adapté, continu à gauche, limité à droite et tel que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2\, d\langle M\rangle_s\right] < \infty$$

est identique à celle effectuée pour $\int_0^t H_s\, dB_s$.

Donnons ici la liste des propriétés de $(H \cdot M)_t \equiv \int_0^t H_s\, dM_s$:

— **Linéarité :**

$$((cH + K) \cdot M)_t = c(H \cdot M)_t + (K \cdot M)_t, \quad (H \cdot (M + N))_t = (H \cdot M)_t + (H \cdot N)_t.$$

—

$$\mathbb{E}((H \cdot M)_t) = 0, \quad \mathbb{E}((H \cdot M)_t^2) = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2\, d\langle M\rangle_s\right].$$

—

$$\mathrm{Cov}((H \cdot M)_t, (K \cdot N)_t) = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s K_s\, d\langle M, N\rangle_s\right].$$

—

$$\langle (H \cdot M)\rangle_t = \int_0^t H_s^2\, d\langle M\rangle_s.$$

—

$$\langle (H \cdot M), (K \cdot N)\rangle_t = \int_0^t H_s K_s\, d\langle M, N\rangle_s.$$

"Règle" utile à retenir : Si $X_t = \int_0^t H_s\, dM_s$ (i.e. $dX_t = H_t\, dM_t$), alors :

$$d\langle X\rangle_t = H_t^2\, d\langle M\rangle_t.$$

Noter que si $M_t = \int_0^t K_s \, dB_s$, alors :

$$X_t = \int_0^t H_s K_s \, dB_s \quad \text{et} \quad \langle X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 K_s^2 \, ds.$$

De même, vu que la propriété de martingale (continue de carré intégrable) est préservée, on peut encore définir $(L \cdot X)_t \equiv \int_0^t L_s \, dX_s$, etc.