الإستقرارية: تكون السلسلة العشوائية مستقرة إذا تذبذبت مستوياتها حول متوسط حسابي ثابت، مع تباين وتباين مشترك ليس لهم علاقة بالزمن؛ أي أن: السلاسل الزمنية المستقرة هي سلاسل لا توجد فيها تغيرات في النظام الأساسي (ثبات المتوسط، ثبات التباين، ثبات هيكل الارتباط الذاتي ولا توجد مركبة الموسمية).

يقال ان السلسلة مستقرة إذا كانت الخصائص الإحصائية لها ثابتة خلال الزمن، أي أن هذه الخصائص لا تتغير بالإزاحة إلى الأمام أو الخلف.

A stationary time series is a time series where there are no changes i**<u>n the underlying system</u>**

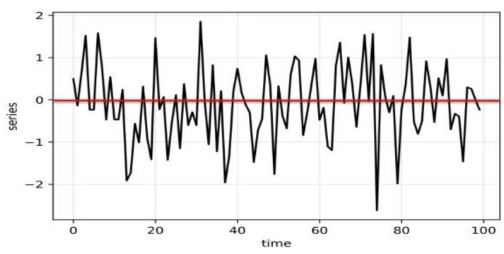
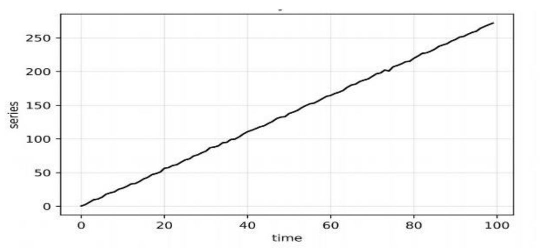
✓ ثبات المتوسط عبر الزمن؛	$E(Y_t) = E(Y_{t+h}) = \mu$
✓ ثبات التباين عبر الزمن؛	$V(Y_t) = V(Y_{t+h}) = \gamma_0$
✓ استقلال التباين المشترك عن الزمن.	$Cov(Y_t, Y_{t+h}) = Cov(Y_{t+h}, Y_{t+h+s})$

ملاحظة هامة: نشير إلى أنه توجد الاستقرارية بالمعنى التام والاستقرارية بالمعنى الضيق، نركز هنا على الاستقرارية بالمعنى الضيق.

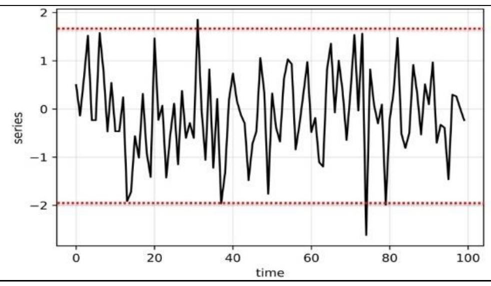
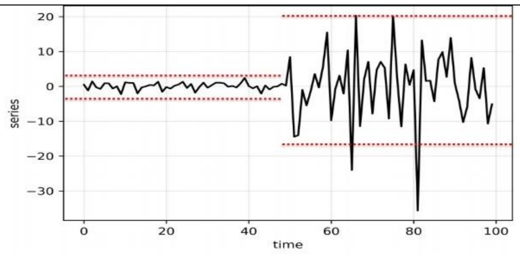
إن التمثيل البياني يعطينا إشارات (اجاءات) عن استقرارية السلسلة من عدمها، غير أن التمثيل البياني لا يمكن الاعتماد عليه بل يجب اللجوء إلى الاختبارات الإحصائية المتخصصة لذلك.

أ- ثبات المتوسط، بمعنى لا يوجد توجه عام (no trend)

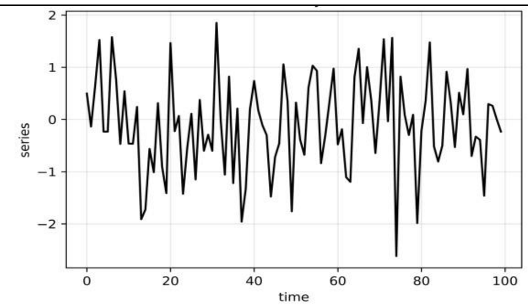
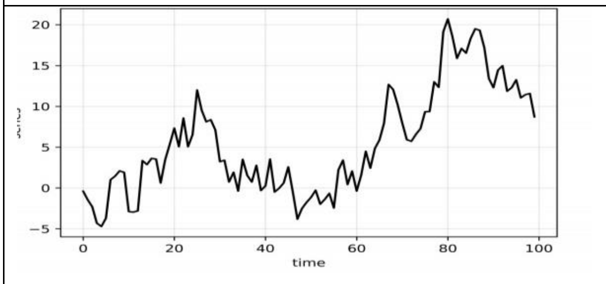
.

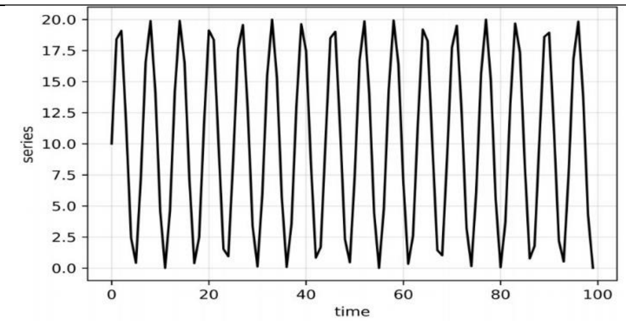
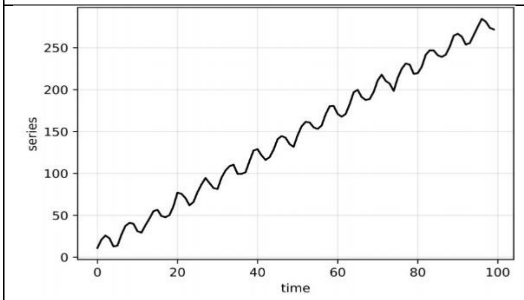
سلسلة مستقرة (ثبات المتوسط الحسابي)	سلسلة غير مستقرة (يوجد توجه عام)
	

ب- ثبات التباين عبر الزمن: بمعنى تجانس التباين ولا وجود لمشكلة الارتباط الذاتي (no heteroscedacticity).

سلسلة مستقرة (ثبات التباين)	سلسلة غير مستقرة (عدم ثبات التباين)
	

ت- الارتباط الذاتي (No autocorrelation)

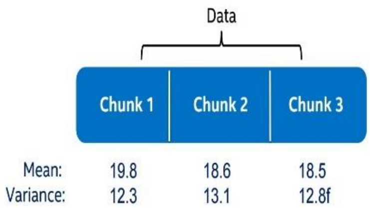
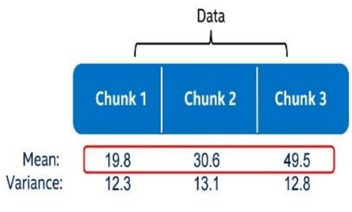
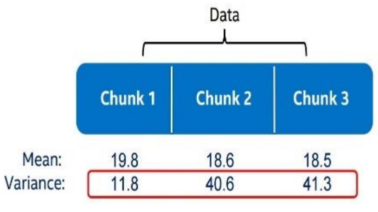
سلسلة مستقرة (لا يوجد ارتباط ذاتي)	سلسلة غير مستقرة (يوجد ارتباط ذاتي)
	

سلسلة غير مستقرة (وجود مركبة الموسمية)	سلسلة غير مستقرة (وجود T+S)
	

<u>والسؤال الجوهري</u>: لماذا تعتبر دراسة الاستقرارية مهمة وكيف يمكن التعرف على السلاسل غير المستقرة؟

- ✓ بدون الإستقرارية تصبح نماذج السلاسل الزمنية غير صالحة؛
- ✓ ضرورة عمل تحويلات قبل النمذجة للسلاسل غير المستقرة حتى تصبح مستقرة؛

يعد حساب المتوسط والتباين بمرور الوقت (تحديد مجموعة من القطع) طريقة مفيدة لتمييز ما إذا كانت السلسلة مستقرة أو غير مستقرة.

مستقرة (القطع لها نفس المتوسط والتباين)	غير مستقرة (اختلاف متوسط القطع)	غير مستقرة (اختلاف تباين القطع)
		

سلسلة التشويش الأبيض أو الضجة البيضاء (White Noise): تعرف سلسلة الضجة البيضاء على أنها عبارة متتابعة من المشاهدات المستقلة فيما بينها ولها توزيعات متطابقة بمتوسط معدوم وتباين ثابت.أي:

$$1 - E(\varepsilon_t) = 0, \forall t$$

$$2 - Cov(X_t, X_{t1}) = \begin{cases} \sigma^2, \forall t, \forall t_1, t = t_1 \\ 0, \forall t, \forall t_1, t \neq t \end{cases}$$

دالة الارتباط الذاتي:

1. تعاريف:

إذا عرفنا التخلف h على أنه الفترة الزمنية التي تفصل بين X_t وبين X_{t-h} أو X_{t+h} فإن:

دالة الارتباط الذاتي (FAC) هي الدالة التي تقيس الارتباط بين السلسلة Xt ونفس السلسلة بتأخير قدره h أي X_{t-h} ونرمز لها بالرمز ρ_h حيث: $\rho_h = \dfrac{Cov(X_t, X_{t-h})}{\sigma X_t \times \sigma X_{t-h}}$

وعمليا نستعمل مقدرة دالة الارتباط الذاتي وهي:

$$rh = \hat{\rho} h = \frac{\sum_{t=h+1}^{n} (X_t - \bar{X})(X_{t-h} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{n} (X_t - \bar{X})}$$

مثال: أحسب قيمة دالة الارتباط الذاتي عند تأخيرات h=1, h=2, h=3 للسلسلة التالية: **X_t: 12, 11, 10, 10, 8, 9**

-1 حساب قيمة دالة الارتباط الذاتي عند تأخير قدرة 1.

T	X_t	$X_{(t-1)}$	X_t-m	$X_{(t-1)}$-m	(Xt-m)($X_{(t-1)}$-m)	$(X_t\text{-m})^2$
1	12		2			4
2	11	12	1	2	2	1
3	10	11	0	1	0	0
4	10	10	0	0	0	0
5	8	10	-2	0	0	4
6	9	8	-1	-2	2	1
m	**10**		0		**4**	**10**

$$rh = \hat{\rho} h = \frac{\sum_{t=h+1}^{n} (X_t - \bar{X})(X_{t-h} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{n} (X_t - \bar{X})}$$

$$r1 = \frac{4}{10} = 0.4$$

2- حساب قيمة دالة الارتباط الذاتي عند تأخير قدرة 2.

T	X_t	$X_{(t-2)}$	Xt-m	$X_{(t-2)}$-m	$(X_t$-m)$(X_{(t-2)}$-m)	$(X_t$-m$)^2$
1	12		2			4
2	11		1			1
3	10	12	0	2	0	0
4	10	11	0	1	0	0
5	8	10	-2	0	0	4
6	9	10	-1	0	0	1
m	10		0		**0**	**10**

$$r2=\frac{0}{10}=0$$

3- حساب قيمة دالة الارتباط الذاتي عند تأخير قدرة 3.

T	X_t	$X_{(t-3)}$	Xt-m	$X_{(t-3)}$-m	$(X_t$-m)$(X_{(t-2)}$-m)	$(X_t$-m$)^2$
1	12		2			4
2	11		1			1
3	10		0			0
4	10	12	0	2	0	0
5	8	11	-2	1	-2	4
6	9	10	-1	0	0	1
m	10		0		**-2**	**10**

$$r2=\frac{-2}{10}=-0.2$$

2. خواص دالة الارتباط الذاتي:

- ✓ دالة الارتباط الذاتي متناظرة حول الصفر: $\rho(h)=\rho(-h)$ ؛
- ✓ دالة الارتباط الذاتي محصورة بين 1± ؛أي: $-1\leq\rho(h)\leq 1$ ؛
- ✓ لما h=0 فإن $\rho(0)=1$: $\rho_0=\frac{Cov(X_t,X_{t-0})}{\sigma X_t\times\sigma X_{t-0}}=\rho_0=\frac{Cov(X_t,X)}{\sigma X_t\times\sigma X_t}=\frac{Var(Xt)}{Var(Xt)}=1$ ؛
- ✓ يسمى التمثيل البياني لقيم دالة الارتباط الذاتي بـ(correlogramme) وتتراوح قيمته بين 1± ؛
- ✓ عمليا إذا كانت البيانات شهرية أو فصلية نأخذ h=24، أما إذا كانت البيانات يومية نأخذ قيمة التأخير $30\leq h\leq 36$ ، أما في حالة المعطيات السنوية فنأخذ $15\leq h\leq 20$

3. **تحليل دالة الارتباط الذاتي:** لقيم دالة الارتباط الذاتي دور كبير في تحليل مركبات السلسلة الزمنية ودراسة مدى استقراريتها.

❖ مجال الثقة لدالة الارتباط الذاتي:

- في حالة العينات الكبرى (n>=30) فإن rh تتوزع حسب التوزيع الطبيعي بمتوسط معدوم:

$$rh\to N\left(0,\mathrm{var}(rh)=\frac{1}{n}(1+2\sum_{i=1}^{h}r_i^2\right)$$

ويكون مجال الثقة بمستوى معنوية 5% هو: $rh\in\left[-1.96\sqrt{\mathrm{var}(rh)},1.96\sqrt{\mathrm{var}(rh)}\right]$

كانت قيم rh تقع داخل مجال الثقة فإننا نقبل فرضية العدم؛ أي $\rho h = 0$ بمستوى معنوية 5% ؛بمعنى إذا كانت كل معاملات الارتباط تقع داخل مجال الثقة فهي معدومة احصائيا وبالتالي يمكن القول أن السلسلة لا توجد بها مركبة الاتجاه العام ولا مركبة الموسمية وبالتالي فهي مستقرة داخل المجال: $rh \in \left[-1.96/\sqrt{n}, 1.96/\sqrt{n}\right]$.

دالة الارتباط الذاتي الجزئيLa fonction d'autocorrélation partielle:

إن دالة الارتباط الذاتي الجزئي(FAP) تقيس الارتباط بين السلسلة Xt ونفس السلسلة بتأخير قدره h؛ أي X(t-h) بعد إزالة تأثير الترابط الناتج عن القيم التي بينهما($X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-h+1}$). نرمز لها بالرمز ϕ_{hh} أو ϕ_{kk} ونكتب:

لما h=0 فإن: $\phi_{kk} = \phi_{00} = 1$ ؛

لما h=1 فإن: $\phi_{kk} = \phi_{11} = r_1$.

لما h=2, 3,….. تحسب قيم دالة الارتباط الذاتي بالعلاقة التالية: $\phi_{kk} = \rho_{kk} = r_{kk} = \dfrac{\left|\rho_k^*\right|}{\left|\rho_k\right|}$

حيث: $|\ |$ يرمز إلى محدد المصفوفة و ρ_h هي مصفوفة مربعة ذات البعد h؛

$$P_k = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \cdots & \rho_{k-1} \\ \vdots & 1 & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \rho_{k-1} & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad P_k^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \cdots & \rho_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ \rho_{k-1} & & & & \rho_k \end{bmatrix}$$

مثال: أحسب قيم دالة الارتباط الذاتي الجزئي في حالة: h=1, h=2, h=3 للمثال السابق.

لدينا: $r_1=0.4, r_2=0, r_3=-0.2$

- ✓ لما h=1 فإن: $\phi_{kk} = \rho_{11} = r_1 = 0.4$ ؛
- ✓ لما h=2 فإن: $\rho_{22} = r_{22} = \dfrac{\left|\rho_2^*\right|}{\left|\rho_2\right|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & 1 \end{pmatrix}} = \dfrac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{pmatrix}} = \dfrac{0-(0.4)^2}{1-(0.4)^2} = -0.190$
- ✓ لما h=3 فإن:

$$\rho_{33} = r_{33} = \frac{\left|\rho_3^*\right|}{\left|\rho_3\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_1 \\ r_1 & 1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & r_3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{0-(0.4)^2}{1-(0.4)^2} = -0.190$$