Résolution des systèmes d'équation linéaires

Via

Méthodes itératives

Introduction

Ayant le système linéaire suivant,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \dots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \ddots + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$\mathbf{A} \in \boldsymbol{M_n}(\mathbb{K})$ **matrice carrée associée au système**

$\mathbf{x} = ??$

Deux types de méthodes

Directe Vs Itérative

Caractéristiques

Méthodes directes

Pour n=3 →: Gauss, factorisation LU, cholesky

Pour n>=4 où a_{ij} en virgule flottante →

propagation des erreurs d'arrondit + temps de calcul plus important

Méthodes itératives :

- Adaptées lorsque beaucoup de calcul en virgule flottante.
- Ces méthodes sont les seules à pouvoir fournir des résultats « précis » pour les systèmes de taille très importante.
- Certaines méthodes itératives s'approchent très vite des solutions exactes. MAIS
- Cette solution exacte (ou presque) ne peut être assurée après un nombre d'étapes connu à priori.

Principes des méthodes itératives

1) Ax=B , Quelle expression de X = ?

   Ramener le problème Ax=B à la modélisation : $x = f(x)$

2) Ce type de problème est dit problème de recherche de point fixe ou problème d'approximations successives.

3) Méthode de résolution à l'origine de la résolution de divers problèmes :
   permet d'obtenir des valeurs approchées $X^{(i)}$ d'une solution exacte Xpour :

   i. Résolution de système linéaire
   ii. Résolution de système d'équations différentielles
   iii. Pour les problèmes d'optimisation
   iv. Racine des équations non linéaires,
   v. Problèmes de valeurs propres
   vi. Apprendre les poids dans un réseau de neurones
   vii. …etc

4) Les méthodes itératives construisent, à partir d'un vecteur $X^{(0)}$, une suite de vecteurs :

$X^{(0)}$ connu
→$X^{(1)}$
→$X^{(2)}$
→........
→$X^{(n)}$

Qui convergent vers la solution exacte X du système.

Tel que : $\lim_{n\to\infty} \|X^{(n)} - X\| = 0$

La suite $\left(X^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$,
$=(\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \dots, \boldsymbol{X_{n-1}}, \boldsymbol{X_n})^{\boldsymbol{t}}$ est définie par

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{quelconque} \\ X^{(k+1)} = f(X^{(k)}) \end{cases}$$

5) En écrivant la matrice A sous la forme $A = \mathrm{M} - \mathrm{N}$, on obtient l'expression :

$$\begin{array}{llcl}
 & \mathrm{Ax} & = & \mathrm{b} \\
\Leftrightarrow & (\mathrm{M}-\mathrm{N})\mathrm{x} & = & \mathrm{b} \\
\Leftrightarrow & \mathrm{Mx}-\mathrm{Nx} & = & \mathrm{b} \\
\Leftrightarrow & \mathrm{Mx} & = & \mathrm{Nx}+\mathrm{b} \\
\Leftrightarrow & \mathrm{M}^{-1}\mathrm{Mx} & = & \mathrm{M}^{-1}(\mathrm{Nx}+\mathrm{b}) \\
 & & & \\
\Leftrightarrow & \mathrm{x} & = & \mathrm{M}^{-1}\mathrm{Nx}+\mathrm{M}^{-1}\mathrm{b} \\
\Leftrightarrow & \mathrm{x} & = & \mathrm{Bx}+\mathrm{R} \\
\mathrm{d'où} & \mathrm{x} & = & \mathrm{f(x)}
\end{array}$$

Notre problème est ramené à la modélisation :

$$\mathrm{x} = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{Nx} + \mathrm{M}^{-1}\mathrm{b}$$

➔ $\mathrm{X}^{(\mathrm{k}+1)} = \mathrm{BX}^{(\mathrm{k})} + \mathrm{R}$ Expression de X

➔ « **matrice d'itération** » la matrice $\mathrm{B} = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{N}$

6) La suite calculée **est convergente si une condition parmi les suivantes** est satisfaite :

1) $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$ $i = 1..n$ (matrice à diagonale strictement dominante par ligne)

2) $\rho(M^{-1}N) < 1$ (ρ le rayon spectrale de B, $\rho(B) = \max\{|\lambda| \ / \ \lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(B)\}$

7) **Test d'arrêt** :

Le calcul récurrent de cette suite doit être répété jusqu'à :

- Un nombre d'itération k fixé, ou bien ;
- $\max \frac{\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right|}{\left|x_i^{(k+1)}\right|} < \varepsilon$ (avec $\varepsilon > 0$ et $1 \leq i \leq n$)

Principales <u>décompositions</u> de la matrice associée :

La matrice A est écrite sous la forme : A = D -E - F avec :

- D est une matrice diagonale (constituée des éléments de la diagonale de A).
- E est une matrice triangulaire inférieure sans diagonale
- F une matrice triangulaire supérieure sans diagonale.

Les matrices sont constituées directement à partir des éléments de A

$$D = \begin{matrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{matrix}$$

$$E = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ -a_{n-11} & -a_{n-12} & \dots & 0 & 0 \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nn-1} & 0 \end{matrix} \qquad F = \begin{matrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n-1} & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n-1} & -a_{2n} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$A = D - E - F = \begin{pmatrix} & & -F \\ & D & \\ -E & & \end{pmatrix}$$

Ainsi on a d'une part $A = M - N$
et d'autre part $A = D - E - F$.

Donc les matrices M et N peuvent être obtenues à partir des différents types de regroupement des matrice D, E et F dans $X^{(k+1)} = BX^{(k)} + M^{-1}b$

Méthode de Jacobi :

$$M = D \text{ et } N = (E + F)$$

$$B = M^{-1}N = D^{-1}(E + F),$$

B matrice de JACOBI , matrice d'itération

Méthode de Gauss-Seidel :

$$M = D - E \text{ et } N = F$$

$$B = M^{-1}N = (D - E)^{-1}(F)$$

Résolution du système

a. Méthode de Jacobi :

à partir de : $x = f(x) = M^{-1}Nx + M^{-1}b$

Ou encore $X^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)X^{(k)} + D^{-1}b = BX^{(k)} + R$, on a la matrice de JACOBI

$$B = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/a_{nn} \end{bmatrix} . \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ -a_{n-11} & -a_{n-12} & \dots & 0 & 0 \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n-1} & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n-1} & -a_{2n} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$B = \begin{matrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots 1/a_{n-1n-1} & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/a_{nn} \end{matrix} \;.\; - \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & 0 & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = -\begin{bmatrix} 0 & a_{12}/\mathrm{a}_{11} & \dots a_{1n-1}/\mathrm{a}_{11} & & a_{1n}/\mathrm{a}_{11} \\ a_{21}/\mathrm{a}_{22} & 0 & \dots a_{2n-1}/\mathrm{a}_{22} & & a_{2n}/\mathrm{a}_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1\,1}/\mathrm{a}_{\mathrm{n-1\,n-1}} & a_{n-12}/\mathrm{a}_{\mathrm{n-1\,n-1}} & \dots & 0 & a_{n-1\,n}/\mathrm{a}_{\mathrm{n-1n-1}} \\ a_{n1}/\mathrm{a}_{\mathrm{nn}} & a_{n2}/\mathrm{a}_{\mathrm{nn}} & \dots & a_{n1}/\mathrm{a}_{\mathrm{nn}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$BX^{(k)} = -\begin{bmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} & \ldots a_{1n-1}/a_{11} & a_{1n}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0 & \ldots a_{2n-1}/a_{22} & a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots \quad \vdots & \vdots \\ a_{n-1\,1}/a_{n-1\,n-1} & a_{n-12}/a_{n-1\,n-1} \ldots & 0 & a_{n-1\,n}/a_{n-1n-1} \\ a_{n1}/a_{nn} & a_{n2}/a_{nn} & \ldots\ a_{n1}/a_{nn} & 0 \end{bmatrix} . \begin{matrix} X_1{}^{(k)} \\ X_2{}^{(k)} \\ \ldots \\ X_{n-1}{}^{(k)} \\ X_n{}^{(k)} \end{matrix}$$

$$BX^{(k)} = -\begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{j\neq 1} \frac{a_{1j}{}^{(k)}}{a_{11}} X_j{}^{(k)} \\ \displaystyle\sum_{j\neq 2} \frac{a_{2j}{}^{(k)}}{a_{22}} X_j{}^{(k)} \\ \ldots \\ \displaystyle\sum_{j\neq n-1} \frac{a_{n-1\,j}{}^{(k)}}{a_{n-1\,n-1}} X_j{}^{(k)} \\ \displaystyle\sum_{j\neq n} \frac{a_{nj}{}^{(k)}}{a_{nn}} X_j{}^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$R = M^{-1}b = \begin{matrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots 1/a_{n-1n-1} & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/a_{nn} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{matrix} = \begin{matrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \dots \\ b_{n-1}/a_{n-1\,n-1} \\ b_n/nn \end{matrix}$$

$$\begin{cases} X^{(0)} & \text{donné} \\ X_i^{(k+1)} = \dfrac{b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} X_j^{(k)}}{a_{ii}} & \forall i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} = f(x_2, x_3)$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{12}\,x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} = g(x_1, x_3)$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{13}\,x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} = h(x_1, x_2)$$

Exemple :

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \end{cases} \quad \text{, sa matrice associée} \quad \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Résoudre ce système par la méthode de Jacobi :

- en utilisant ***$X^{(0)} = (0,0,0)^t$*** comme solution de départ.
- Retenir la solution après 3 itérations

Résolution

Convergence de la matrice A : vérifiée car *la matrice A est diagonale dominante.*

X	$X^{(0}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$
x_1	*0*	${x_1}^{(1)} = \frac{1}{4}\left(3 + {x_2}^{(0)} - 2{x_3}^{(0)}\right)$	${x_1}^{(2)} = \frac{1}{4}\left(3 + {x_2}^{(1)} - 2{x_3}^{(1)}\right)$	${x_1}^{(3)} = \frac{1}{4}\left(3 + {x_2}^{(2)} - 2{x_3}^{(2)}\right)$
x_2	*0*	${x_2}^{(1)} = \frac{-1}{6}\left(4 - 2{x_1}^{(0)} - 3{x_3}^{(0)}\right)$	${x_2}^{(2)} = \frac{-1}{6}\left(4 - 2{x_1}^{(1)} - 3{x_3}^{(1)}\right)$	${x_2}^{(3)} = \frac{-1}{6}\left(4 - 2{x_1}^{(2)} - 3{x_3}^{(2)}\right)$
x_3	*0*	${x_3}^{(1)} = \frac{1}{4}\left(2 + {x_1}^{(0)} + 2{x_2}^{(0)}\right)$	${x_3}^{(2)} = \frac{1}{4}\left(2 - {x_1}^{(1)} + 2{x_2}^{(1)}\right)$	${x_3}^{(3)} = \frac{1}{4}\left(2 - {x_1}^{(2)} + 2{x_2}^{(2)}\right)$

$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$
0	${x_1}^{(1)} = \frac{3}{4}$	${x_1}^{(2)} = \frac{1}{3}$	${x_1}^{(3)} = \frac{23}{32}$
0	${x_2}^{(1)} = \frac{-2}{3}$	${x_2}^{(2)} = \frac{-1}{6}$	${x_2}^{(3)} = \frac{-163}{288}$
0	${x_3}^{(1)} = \frac{1}{2}$	${x_3}^{(2)} = \frac{-1}{48}$	${x_3}^{(3)} = \frac{1}{3}$