رابعا: التوزيع الأسي

تمهيد:

غالبا ما يستخدم هذا التوزيع في المسائل العملية المتعلقة بالزمن الذي يجب انتظاره حتى وقوع حدث معين، كمدة تقديم خدمة في شباك البريد، مدة مكالمة هاتفية، مدة تفريغ باخرة شحن، مدة تصليح آلة ومدة انتظار زبون قبل الحصول على الخدمة.

فإذا كان وقوع الحوادث يتبع توزيع بواسون فإن زمن الانتظار لوقوع حدث معين أو الفترة الزمنية ما بين حدثين متتاليين تتبع التوزيع الأسي، وهذه الحقيقة مفيدة جدا في استخدام التوزيع الأسي في كثير من المسائل العملية.

ملاحظة: يستخدم التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة ظاهرة ما إذا كان لها متوسط ثابت وإذا كانت لا تخضع للتقادم.

1. دالة الكثافة الاحتمالية:

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الأسي فإن دالة كثافته الاحتمالية تعطى بالعلاقة التالية:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

يمكن الملاحظة أن هذه الدالة تحقق شروط دالة كثافة احتمالية لأن:

$$\forall x\in\Re: \qquad f(x)\geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

$$=\lambda\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx$$

$$=-\left.e^{-\lambda x}\right|_{0}^{+\infty}=1$$

2. دالة التوزيع:

تعرف دالة التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي X الذي يتبع التوزيع الأسي كما يلي:

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$x < 0: \qquad F(x) = 0$$

$$x \geq 0: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= -e^{-\lambda x}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

3. الدالة المولدة للعزوم:

تكتب الدالة المولدة للعزوم وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$m_x(t) = E(e^{xt}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} f(x)dx = \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{tx}\, e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{x(t-\lambda)}\, dx = \frac{\lambda}{\lambda - t} e^{-(\lambda - t)x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

$$m_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

4. المميزات العددية:

يمكن توضيح المميزات العددية لهذا التوزيع من خلال ما يلي:

1.4. التوقع الرياضي:

يمكن ايجاد الصيغة الرياضية للتوقع الرياضي كما يلي:

$$E(X) = m'_x(0)$$

$$m'_x(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}\Bigg| t = 0$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

2.4. التباين:

يمكن ايجاد الصيغة الرياضية للتباين كما يلي:

$$E(X)^2 = m_x''(0)$$

$$m_x''(t) = \frac{2\lambda(\lambda - t)}{(\lambda - t)^4}$$

$$E(X^2) = \left.\frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}\right| t = 0$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$