ثالثا: التوزيع المنتظم المستمر

يعد التوزيع المنتظم المستمر من التوزيعات الاحتمالية المهمة لكثير من التطبيقات في الواقع العملي، إذ يستخدم لحساب الاحتمالات المناسبة لهذه التطبيقات، كحساب احتمال وصول البواخر إلى الموانئ لتفريغ حمولتها وأوقات مغادرتها ووصول الشاحنات إلى محطات التفريغ وغيرها.

1. دالة الكثافة الاحتمالية:

نقول عن المتغير العشوائي X أنه يتبع التوزيع المنتظم المستمر $\mathrm{U}(a;b)$ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية $\mathrm{f}(x)$ معرفة كما يلي:

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

ويمكن التحقق من أن f هي دالة كثافة احتمالية كما يتضح من خلال ما يلي:

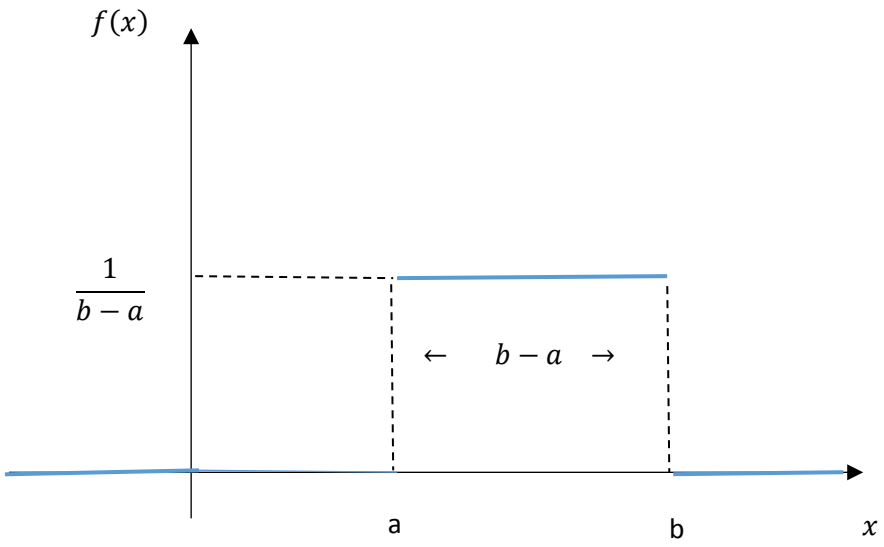
- الشرط الأول دوما محقق ($\mathrm{a} < \mathrm{b}$ ومنه $\frac{1}{b-a} > 0$)
- الشرط الثاني:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} dx$$

$$= \frac{b-a}{b-a} = 1$$

أما التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية فيكون على شكل رباعي (يكون الاتجاه العام مستطيل)، كما يظهر من خلال الشكل الآتي:



2. دالة التوزيع:

تعرف دالة التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي X الذي يتبع التوزيع المنتظم المستمر كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

ويمكن ايجادها كما يلي:

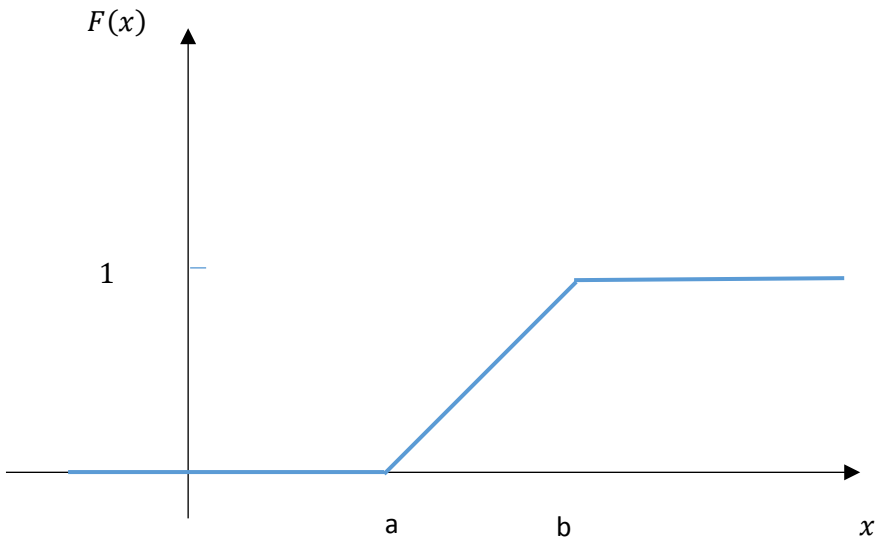
$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{p}(\mathrm{x} \leq x)$$

$x \leq a$:
$$\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \, dx = 0$$

$a \leq x < b$:
$$\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{a} 0 \, dx + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} \, dx$$
$$= \frac{x}{b-a}\Big|_{a}^{x} = \frac{x-a}{b-a}$$

$x \geq b$:
$$\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \int_{-\infty}^{a} 0 \, dx + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} \, dx + \int_{b}^{x} 0 \, dx$$
$$= \frac{b-a}{b-a} = 1$$

أما التمثيل البياني لدالة التوزيع $F(x)$ فيكون كما يلي:



3. المميزات العددية:

يمكن توضيح المميزات العددية لهذا التوزيع من خلال ما يلي:

1.3. التوقع الرياضي:

يمكن ايجاد الصيغة الرياضية للتوقع الرياضي كما يلي:

$$\mathrm{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{b-a}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\mathrm{b-a}} \int_{a}^{b} x\, dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\, \frac{x^2}{2}\Big|_{a}^{b}$$

$$= \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)$$

$$= \frac{b+a}{2}$$

$$\mathrm{E}(X) = \frac{b+a}{2}$$

2.3. التباين:

يمكن ايجاد الصيغة الرياضية للتباين كما يلي:

$$\mathrm{V(X)} = \mathrm{E(X^2)} - [\mathrm{E(X)}]^2$$

$$\mathrm{E(X^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \ f(x)dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} x^2 \ dx$$

$$= \left(\frac{1}{b-a}\right)\frac{x^3}{3}\Big|_a^b$$

$$= \left(\frac{1}{b-a}\right)\frac{b^3-a^3}{3}$$

$$= \frac{b^2+ba+a^2}{3}$$

$$V(X) = \frac{b^2+ba+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

4. الدالة المولدة للعزوم:

تعرف الدالة المولدة للعزوم وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$m_x\,(t) = E(e^{xt})$$

$$= \int_{a}^{b} e^{xt} \ f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{xt}\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{t}\ e^{xt}\right)\Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{e^{bt}}{t} - \frac{e^{at}}{t}\right)$$

$$m_x\,(t) = \frac{e^{bt} - e^{ta}}{t(b-a)}$$