Réduction des Endomorphismes

Chapitre 1

Trigonalisation des endomorphismes

Dans tout ce chapitre E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et f est un endomorphisme de E. Si on se place dans une base de E, on peut représenter f par une matrice. Le but de ce chapitre est de trouver une base de E telle que la matrice représentant f dans cette base soit triangulaire.

1.1 Trigonalisation

Définition 1.1.1. *On dit que f est trigonalisable si et seulement si il existe une base B de E telle que la matrice de f dans la base B soit triangulaire.*

Définition 1.1.2. *$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si A est semblable à une matrice triangulaire, c'est-à-dire il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire.*

Remarque 1.1.1.

1. *Soient $f \in L(E)$, B une base de E, $A = \mathcal{M}at_B(f)$. Alors f est trigonalisable si et seulement si A est trigonalisable.*
2. *Toute matrice triangulaire est trigonalisable.*
3. *Si $f \in L(E)$ est trigonalisable, alors les éléments diagonaux d'une matrice triangulaire représentant f sont les valeurs propres de f, écrites sur cette diagonale autant de fois que l'indiquent leurs ordres de multiplicité.*

1.1.1 Une condition nécessaire et suffisante de trigonalisation

Théorème 1.1.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

i) *A est trigonalisable.*

ii) *$P_A(\lambda)$ est scindé dans $\mathbb{K}$.*

Remarque 1.1.2. *Nous avons le même théorème pour un endomorphisme en dimension finie.*

Démonstration.

1. $i) \Rightarrow ii)$ Supposons que A soit trigonalisable, alors A est semblable à une matrice T triangulaire

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & \cdots & t_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Donc $P_T(\lambda) = (\lambda - t_{11})(\lambda - t_{22}) \cdots (\lambda - t_{nn})$, alors $P_A(\lambda)$ est scindé dans $\mathbb{K}$.

2. $ii) \Rightarrow i)$ On fait une preuve par récurrence sur n.

- Soit $P(n)$ la propriété : *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P_A(\lambda)$ soit scindé dans $\mathbb{K}$, alors A est trigonalisable.*
- On a $P(1)$ est vraie.
- Supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que $P_A(\lambda)$ soit scindé sur $\mathbb{K}$. $P_A(\lambda)$ donc admet ou moins un racine dans $\mathbb{K}$, que l'on notera λ. Soit v_1 un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Donc
A semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ avec

- $B \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$
- $A_1 \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$
- $0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la matrice nulle.

On a
$$P_f(X) = (\lambda - X)P_{A_1}(X).$$

Donc $P_{A_1}(X)$ est scindé sur $\mathbb{K}$. D'après $P(n)$, il existe P_2 inversible et T_2 une matrice triangulaire telles que $A_2 = P_2T_2P_2^{-1}$.
Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$.
P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{pmatrix}$.
Montrons qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ telle qu'en notant $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & X \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$, on ait

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = PTP^{-1}.$$

On a : $PTP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & X \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & XP_2^{-1} \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$. Il suffit donc de choisir $X = BP_2$ pour obtenir $\begin{pmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = PTP^{-1}$.
Ceci montre que A est trigonalisable.

□

Corollaire 1.1.1. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n.*

1. *Tout endomorphisme de E est trigonalisable.*
2. *De même, toute matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.*

Démonstration.

1. Soit f un endomorphisme de E. Tout polynôme est scindé dans $\mathbb{C}$, donc P_f est scindé par conséquent f est trigonalisable.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Tout polynôme est scindé dans $\mathbb{C}$, donc P_A est scindé par conséquent A est trigonalisable.

□

1.2 Réduction de Jordan

1.2.1 Formes de Jordan

Définition 1.2.1. *On appelle* **bloc de Jordan** *d'ordre l, une matrice $J(\lambda) \in \mathcal{M}_l(\mathbb{K})$ de la forme*

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.2.1.

- *La matrice* $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *est un bloc de Jordan d'ordre 2.*
- *La matrice* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *est un bloc de Jordan d'ordre 3.*
- *La matrice* $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *est un bloc de Jordan d'ordre 4.*

Définition 1.2.2. *On dit qu'une matrice M est* **sous la forme de Jordan** *si elle est diagonale par blocs et que les blocs diagonaux sont des blocs de Jordan.*

Exemple 1.2.2. *La matrice $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$, telle que*

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

est sous la forme de Jordan, il y a 3 blocs de Jordan.

Remarque 1.2.1. *Une matrice sous la forme de Jordan est une matrice triangulaire supérieur.*

1.2.2 Réduction de Jordan d'une matrice

La réduction de Jordan d'un endomorphisme f sur$E$ consiste à trouver une base de E dans laquelle la matrice de f par rapport à B est sous la forme de Jordan. De même la réduction de Jordan d'une matrice A consiste à trouver une matrice sous la forme de Jordan qui est semblable à A.

Théorème 1.2.1. *(de Jordan)*

1. *Soit f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique, $P_f(X)$ est scinde sur $\mathbb{K}$, alors il existe une base de E où la matrice de f est sous forme de Jordan.*

2. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a son polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$, alors A est semblable (sur $\mathbb{K}$) à une matrice sous forme de Jordan.*

1.2.3 Technique pratique de trigonalisation

La technique pour calculer la réduction de Jordan d'une matrice A sur $\mathbb{K}$ est de la façon suivante :

1. Factoriser le polynôme caractéristique $p(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$. On continue uniquement si le polynôme caractéristique est scindé.
2. Trouver une base de chaque sous espace propre.
3. Compléter cette base s'il a lieu. Si la multiplicité de la valeur propre λ est m, alors qu'il y a que $l < m$ vecteurs propres libres, il faut trouver encore $m - l$ vecteurs. Pour chaque vecteurs propres v déjà trouvé, vous allez résoudre le système
$$(A - \lambda I)w = v.$$
Vous devez vérifier que la solution w est libre de vecteurs déjà écrit.
4. On fabrique la matrice de passage P en matant en colonnes les vecteurs propres trouvés.
5. On calcule P^{-1}, et fabriquer la matrice sous la forme de Jordan J par la relation
$$J = P^{-1}AP.$$

1.2.4 Exemples de trigonalisation

Exemple 1.2.3.
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminons le polynôme caractéristique de A.
$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2.$$
Les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(\lambda)$, ce sont donc -1 (double).
2. Montrons que A n'est pas diagonalisable.
On a
$$E_{-1} = \left\{ (x,y);\ A \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \right\} =< (1,-1) > .$$
Donc $dimE_{-1} = 1 \neq deg(-1) = 2$, par conséquent A n'est pas diagonalisable.
3. Montrons que A est trigonalisable.
Le polynôme caractéristique de A est scindé, donc A est trigonalisable.
4. Complétons une base de E_{-1} et déterminons P la matrice de passage.
le sous espace E_{-1} est engendré par le vecteur $v_1 = (1,-1)$. Pour compléter une base de $\mathbb{R}^2$, cherchons un vecteur $v_2 = (x,y)$ vérifiant le système
$$(A + I_2)v_2 = v_1.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$$

On obtient donc le système

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ -2x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - y$$

Si on pose $x = 0$, alors $y = \frac{1}{2}$. Donc $v_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$
La matrice de passage P est égale à

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

5. Calculons P^{-1} et déterminons la matrice sous la forme de Jordan J

$$P^{-1} = \frac{1}{detP} {}^t(Co(P)) = 2^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.2.4.

Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminons le polynôme caractéristique de B.

$$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)^2.$$

Les valeurs propres de B sont les racines de $P_B(\lambda)$, ce sont donc 0 *(simple) et* 1 *(double).*

2. Montrons que B n'est pas diagonalisable.

$$E_0 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

On obtient le système

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -x - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -z = -y$$

Donc

$$E_0 = \{(x, -x, -x); \quad x \in \mathbb{R}\} =< (1, -1, -1) > .$$

$$E_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

On obtient le système

$$\begin{cases} x + y = x \\ -x - z = y \Leftrightarrow x = -z, y = 0 \\ -y + z = z \end{cases}$$

Donc

$$E_1 = \{(-z, 0, z); \quad x \in \mathbb{R}\} =< (-1, 0, 1) > .$$

et $(-1, 0, 1)$ *est libre donc forme une base de* E_1*, alors* $dimE_1 = 1 \neq deg(1) = 2$ *par conséquent B n'est pas diagonalisable.*

3. Montrons que B est trigonalisable.
   Le polynôme caractéristique de B est scindé, donc B est trigonalisable.

4. Complétons une base de E_1 et déterminons P la matrice de passage.
   le' sous espace E_1 *est engendré par le vecteur* $v_1 = (-1, 0, 1)$*. Pour compléter une base de* $\mathbb{R}^3$*, cherchons un vecteur* $v_2 = (x, y, z)$ *vérifiant le système*

$$(B - I_3)v_2 = v_1.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   On obtient le système

$$\begin{cases} y = -1 \\ -x - y - z = 0 \quad \Leftrightarrow y = -1, x = 1 - z \\ -y = 1 \end{cases}$$

   On pose z=0, on obtient $x = 1$*, donc* $v_2 = (1, -1, 0)$*.*
   Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que* $\alpha(-1, 0, 1) + \beta(1, -1, 0) = (0, 0, 0)$*, donc* $\alpha = \beta = 0$*, d'où* v_1 *et* v_2 *forment une base de* E_1*.*
   La matrice de passage P est égale à

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Calculons P^{-1} et Déterminons la matrice sous la forme de Jordan J

On a

$$detP = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{L_1+L_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Donc P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{detP}{}^t(Co(P)) = \frac{1}{1}{}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$J = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3 Applications de trigonalisation

Les applications de trigonalisation sont les mêmes que celles de diagonalisation déjà vue dans le chapitre 4, avec des petites différences dans les techniques de calcules.

1.3.1 Application aux puissances d'une matrice carrée

Voici une première application de la trigonalisation d'une matrice carrée. Il est facile de calculer la puissance k-ème d'une matrice diagonale puisqu'il suffit d'élever à la puissance k chacun des termes diagonaux :

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} \alpha_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1}^k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n^k \end{pmatrix}.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour un nombre naturelle k on a

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k\ fois}.$$

Si A est trigonalisable, alors il existe une matrice sous la forme de Jordan tel que

$$J = P^{-1}AP.$$

Donc

$$\begin{aligned} A^k &= \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k\ fois} \\ &= \underbrace{(PJP^{-1}) \times (PJP^{-1}) \times \ldots \times (PJP^{-1})}_{k\ fois} \\ &= PJI_nJI_n \ldots I_nJP^{-1} \\ &= P\underbrace{J \times J \times \ldots \times J}_{k\ fois}P^{-1}, \\ &= PJ^kP^{-1}. \end{aligned}$$

La matrice J est sous la forme de Jordan, donc il sécrit

$$J = D + N$$

avec D est une matrice diagonale et N est une matrice nilpotente. Donc

$$J^k = (D+N)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i N^i D^{k-i}.$$

D'où

$$A^n = P \sum_{i=0}^{n} C_n^i N^i D^{n-i} P^{-1}.$$

Exemple 1.3.1.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.. *On veut calculer* A^n, $n \in \mathbb{N}$.
D'après l'exemple (1.3.2), *A est trigonalisable et*

$$A = P^{-1}JP$$

avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $J = D + N$, *avec* $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
J^n &= (D+N)^n \\
&= \sum_{i=0}^{1} C_k^i N^i D^{k-i} = D^n + nND^{n-1}, \quad (car\ N^k = 0, \forall k \geq 2) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
A^n &= PJ^nP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1-n \\ -1 & 0 & -1 \\ n-1 & -1 & n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

1.3.2 Application aux systèmes des suites récurrentes

Soient $(U_{1_n}), (U_{2_n}), \ldots, (U_{k_n})$ k suites, et soit le système des suites récurrentes

$$\begin{cases} U_{1_{n+1}} = a_{11}U_{1_n} + a_{12}U_{2_n} + \cdots + a_{1k}U_{k_n} \\ U_{2_{n+1}} = a_{21}U_{1_n} + a_{22}U_{2_n} + \cdots + a_{2k}U_{k_n} \\ \quad \vdots \\ U_{k_{n+1}} = a_{k1}U_{1_n} + a_{k2}U_{2_n} + \cdots + a_{kk}U_{k_n} \end{cases} \tag{1.1}$$

d'écrire le système sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} U_{1_{n+1}} \\ U_{2_{n+1}} \\ \vdots \\ U_{k_{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{12} \\ a_{12} & a_{12} & \ldots & a_{12} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1_n} \\ U_{2_n} \\ \vdots \\ U_{k_n} \end{pmatrix}.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} U_{1_n} \\ U_{2_n} \\ \vdots \\ U_{k_n} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{12} \\ a_{12} & a_{12} & \ldots & a_{12} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{12} \end{pmatrix}$. Donc le système (1.1) s'écrie

$$X_{n+1} = AX_n.$$

Qui nous donne :

$$X_n = A^n X_0.$$

Si A est trigonalisable, alors il existe une matrice sous la forme de Jordan J et une matrice inversible P tels que

$$A = PJP^{-1}.$$

Donc

$$X_n = A^n X_0 = PJ^n P^{-1} X_0,$$

La matrice J est sous la forme de Jordan, donc il s'écrit

$$J = D + N$$

avec D est une matrice diagonale et N est une matrice nilpotente. Donc

$$J^n = (D+N)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i N^i D^{n-i}.$$

D'où

$$X_n = P \sum_{i=0}^{n} C_n^i N^i D^{n-i} P^{-1} X_0.$$

Exemple 1.3.2.

Soit le système des suites récurrentes suivant :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + v_n - 3w_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = 2w_n \end{cases} \tag{1.2}$$

avec $u_0 = 1, v_0 = 0$ *et* $w_0 = -1$.

Le système (1.2) *s'écrit sous la forme matricielle*

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Donc on aura*

$$X_{n+1} = AX_n.$$

1. **Déterminons le polynôme caractéristique de A :**

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -3 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)^2.$$

Les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(\lambda)$, ce sont donc 2 *(simple) et* 3 *(double). On a $P_A(\lambda)$ est scindé donc A est trigonalisable.*

2. **Déterminons les sous espaces propres :**

$$E_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \right\}.$$

On obtient le système

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 2x \\ -x + 2y + z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow x = z = y$$

Donc

$$E_2 = \{(x,x,x); \quad x \in \mathbb{R}\} =< (1,1,1) > .$$

$$E_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} \right\}.$$

On obtient le système

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 3x \\ -x + 2y + z = 3y \\ 2z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow y = -x, z = 0$$

Donc

$$E_3 = \{(x,-x,0); \quad x \in \mathbb{R}\} =< (1,-1,0) > .$$

et $(1,-1,0)$ est libre donc forme une base de E_3, alors $dim E_3 = 1 \neq dg(1) = 2$ par conséquent A n'est pas diagonalisable.

3. **Complétons une base de E_3 et déterminons P la matrice de passage :**
le' sous espace E_3 est engendré par le vecteur $v_1 = (1,-1,0)$. Pour compléter une base de $\mathbb{R}^3$, cherchons un vecteur $v_2 = (x,y,z)$ vérifiant le système

$$(B - 3I_3)v_2 = v_1.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient le système

$$\begin{cases} x+y-3z=1 \\ -x-y+z=-1 \Leftrightarrow z=0, x=1-y \\ \quad -z=0 \end{cases}$$

On pose y=0, on obtient $x=1$, *donc* $v_2=(1,0,0)$. *Soit* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *tels que* $\alpha(1,0,0)+\beta(1,-1,0)=(0,0,0)$, *donc* $\alpha=\beta=0$, *d'où* v_1 *et* v_2 *forment une base de* E_3.
La matrice de passage P est égale à

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. **Calculons P^{-1} et déterminons la matrice sous la forme de Jordan J :**

On a $detP=-1$, *donc P est inversible et*

$$P^{-1}=\frac{1}{detP}{}^t(Co(P))=\frac{1}{1}{}^t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$J=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a $J=D+N$, *avec* $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $N=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} J^n &= (D+N)^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i N^i D^{n-i} = D^n + nND^{n-1}, \quad (car\ N^k=0, \forall k\geq 2) \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} A^n &= PJ^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n3^{n-1}+3^n & n3^{n-1} & 2^n - 2n3^{n-1} - 3^n \\ -n3^{n-1} & 3^n - n3^{n-1} & 2^n - 3^n + 2\times 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement la solution de (1.2) *est*

$$\begin{aligned} X_n &= A^nX_0 \\ &= \begin{pmatrix} n3^{n-1}+3^n & n3^{n-1} & 2^n - 2n3^{n-1} - 3^n \\ -n3^{n-1} & 3^n - n3^{n-1} & 2^n - 3^n + 2\times 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+n)3^n - 2^n \\ 3n - (n+2)3^{n-1} - 2^n \\ -2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.3.3 Application aux systèmes différentiels

Voici une autre application de la trigonalisation d'une matrice carrée. Tout d'abord nous donnons la définition de l'exponentielle d'une matrice sous la forme de Jordan.

1.3.3.1 Exponentielle d'une matrice sous la forme de Jordan

Définition 1.3.1. *Soit A une matrice carrée d'ordre n et t un réel. On définit une nouvelle matrice notée e^{tA} par*

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

En particulier, lorsque $t = 1$, la matrice e^A s'appelle exponentielle de la matrice A.

- Si A est une matrice sous la forme de Jordan, c'est-à-dire diagonale par blocs,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & (0) \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & A_p \end{pmatrix},$$

alors,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{tA_1} & & & (0) \\ & e^{tA_2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & e^{tA_p} \end{pmatrix}.$$

- Si A est un bloc de Jordan d'ordre n telle que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

  alors

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \frac{t^2}{2}e^{t\lambda} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)}e^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & e^{t\lambda} & \ddots & \frac{t^2}{2}e^{t\lambda} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & te^{t\lambda} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.3.3.

- *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *un bloc de Jordan d'ordre 2, alors*

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

- *Soit* $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ *un bloc de Jordan d'ordre 3, alors*

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{5t} & te^{5t} & \frac{t^2}{2}e^{5t} \\ 0 & e^{5t} & te^{5t} \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{pmatrix}.$$

- *Soit* $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ *un bloc de Jordan d'ordre 4, alors*

$$e^{tC} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} & \frac{t^2}{2}e^{-3t} & \frac{t^3}{6}e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} & te^{-3t} & \frac{t^2}{2}e^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} & te^{-3t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.3.4.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *une matrice sous la forme de Jordan, alors*

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}.$$

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *une matrice sous la forme de Jordan, alors*

$$B = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} & te^{4t} & \frac{t^2}{2}e^{4t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix}.$$

1.3.3.2 Résolution des systèmes différentiels

soit le système différentiel

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1k}x_k(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2k}x_k(t) \\ \qquad \vdots \cdots \\ x_k'(t) = a_{k1}x_1(t) + a_{k2}x_2(t) + \cdots + a_{kk}x_k(t) \end{cases} \tag{1.3}$$

où les a_{ij} sont des réels ou des complexes.

d'écrire le système sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_k'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}.$$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$.

Donc le système (1.3) s'écrit

$$X'(t) = AX(t).$$

Qui nous donne :

$$X(t) = e^{tA}X_0.$$

Exemple 1.3.5. *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} x_1'(t) = 4x(t) + y(t) + 3z(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = 2z(t) \end{cases} \tag{1.4}$$

avec $(x(0), y(0), z(0)) = (\alpha, \beta, \gamma)$*. D'écrire le système* (1.4) *sous la forme matricielle :*

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$*. Donc le système* (1.4) *s'écrire*

$$X'(t) = AX(t).$$

Qui nous donne :

$$X(t) = e^{tA}X_0.$$

D'après l'exemple (1.3.2)*, A est trigonalisable, alors il existe une matrice sous la forme de Jordan J et une matrice inversible P tels que*

$$A = PJP^{-1}$$

avec

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{At}X_0 \\ &= Pe^{Jt}P^{-1}X_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1+t)e^{3t} & te^{3t} & -(1+2t)e^{3t} + e^{2t} \\ -te^{3t} & (1-t)e^{3t} & (2t-1)e^{3t} + e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\alpha - \gamma + (\alpha + \beta - 2\gamma)t)e^{3t} + \gamma e^{2t} \\ (\beta - \gamma + (-\alpha - \beta + 2\gamma)t)e^{3t} + \gamma e^{2t} \\ \gamma e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$