Factorisation LU (Détails)

La méthode repose sur la décomposition de la matrice A :

$$A = L\,U$$

Où L est une matrice triangulaire inférieure et
U est une matrice triangulaire supérieure.

Le système $Ax = b$ devient $L\,U\,X = b$

en posant $U\,X = Y$

On aura $L\,Y = b$

Pour résoudre $A\,x = b$:

On résout le système $L\,Y = b$ pour trouver Y

puis le système $U\,X = Y$ pour trouver X , solution de $Ax = b$

→ déterminer les matrices L et U

Factorisation LU (Détails)

Remarque :

En décomposant la matrice $A = LU$,

Le déterminant de la matrice A est donné par la propriété :

$$\det A = \det(LU) = detL.\,detU$$

$$detA = \prod_{i=1}^{i=n} l_{ii}.\prod_{i=1}^{i=n} u_{ii}.$$

Factorisation LU (Détails)

En développant l'équation matricielle A = L U

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

$a_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} l_{ik} u_{kj}$ avec $l_{ik} = 0$ pour $k > i$ et $u_{kj} = 0$ pour $k > j$,

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{k=4} l_{1k} u_{k1} = l_{11} u_{11} + l_{12} u_{21} + l_{13} u_{31} + l_{14} u_{41}$$

$$a_{12} = \sum_{k=1}^{k=4} l_{1k} u_{k2} = l_{11} u_{12} + l_{12} u_{22} + l_{13} u_{32} + l_{14} u_{42}$$

$$a_{23} = \sum_{k=1}^{k=4} l_{2k} u_{k3} = l_{21} u_{13} + l_{22} u_{23} + l_{23} u_{33} + l_{24} u_{43}$$

$$a_{24} = \sum_{k=1}^{k=4} l_{2k} u_{k4} = l_{21} u_{14} + l_{22} u_{24} + l_{23} u_{34} + l_{24} u_{44}$$

$$a_{32} = \sum_{k=1}^{k=4} l_{3k} u_{k2} = l_{31} u_{12} + l_{32} u_{22} + l_{33} u_{32} + l_{34} u_{42}$$

$$a_{31} = \sum_{k=1}^{k=4} l_{3k} u_{k1} = l_{31} u_{11} + l_{32} u_{21} + l_{33} u_{31} + l_{34} u_{41}$$

$$a_{43} = \sum_{k=1}^{k=4} l_{3k} u_{k3} = l_{41} u_{13} + l_{42} u_{23} + l_{43} u_{33} + l_{44} u_{43}$$

$$a_{44} = \sum_{k=1}^{k=4} l_{3k} u_{k4} = l_{41} u_{14} + l_{42} u_{24} + l_{43} u_{34} + l_{44} u_{44}$$

Factorisation LU (équations)

$$A = \begin{pmatrix} l_{11}u_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} & l_{11}u_{14} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + l_{22}u_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} & l_{21}u_{14} + l_{22}u_{24} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33}u_{33} & l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} + l_{33}u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12} + l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34} + l_{44}u_{44} \end{pmatrix}$$

$$k \leq i \quad et \quad k \leq j$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

$$u_{ij} = \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj}\right] / l_{ii} \quad \cancel{i > j}\ , i = 1,..,n \ \text{ et } \ j = i,..,n$$

$$l_{ij} = \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj}\right] / u_{jj} \quad \cancel{i < j}\ , i = 1,..,n \ \text{ et } \ j = 1,..,i$$

$$u_{11} = \frac{(a_{11})}{l_{11}} \qquad l_{21} = \frac{(a_{21})}{u_{11}} \qquad l_{32} = \frac{(a_{32} - l_{31}.u_{12})}{u_{22}} \qquad u_{33} = \frac{(a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23})}{l_{33}}$$

$$l_{11} = \frac{(a_{11})}{u_{11}} \qquad l_{31} = \frac{(a_{31})}{u_{11}} \qquad l_{42} = \frac{(a_{42} - l_{41}.u_{12})}{u_{22}} \qquad u_{34} = \frac{(a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24})}{l_{33}}$$

$$u_{12} = \frac{(a_{12})}{l_{11}} \qquad l_{41} = \frac{(a_{41})}{u_{11}} \qquad u_{23} = \frac{(a_{23} - l_{21}.u_{13})}{l_{22}} \qquad l_{43} = \frac{(a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23})}{u_{33}}$$

$$u_{13} = \frac{(a_{13})}{l_{11}} \qquad u_{22} = \frac{(a_{22} - l_{21}.u_{12})}{l_{22}} \qquad u_{24} = \frac{(a_{24} - l_{21}.u_{14})}{l_{22}} \qquad u_{44} = \frac{(a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34})}{l_{44}}$$

$$u_{14} = \frac{(a_{14})}{l_{11}} \qquad l_{22} = \frac{(a_{22} - l_{21}.u_{12})}{u_{22}} \qquad l_{33} = \frac{(a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23})}{u_{33}} \qquad l_{44} = \frac{(a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34})}{u_{44}}$$

Factorisation LU (Détails)

On a $n^2 + n$ inconnues

et seulement n^2 coefficients connus a_{ij}

→ fixer n paramètres dans les équations ci-dessus :

$$l_{ii_{i=1,..,n}} = 1$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{42} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Factorisation LU (Détails)

$$u_{ij} = \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj}\right]/1 \qquad \cancel{i > j} \qquad i = 1,..,n \;\; \text{et} \;\; j = i,..,n$$

$$l_{ij} = \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj}\right]/u_{jj} \qquad \cancel{i < j} \qquad i = 1,..,n \;\text{et}\; j = 1,..,i-1$$

$$u_{11} = a_{11} \qquad l_{21} = \frac{(a_{21})}{u_{11}} \qquad l_{32} = \frac{(a_{32} - l_{31}.u_{12})}{u_{22}} \qquad u_{33} = \frac{(a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23})}{1}$$

$$l_{11} = 1 \qquad l_{31} = \frac{(a_{31})}{u_{11}} \qquad l_{42} = \frac{(a_{42} - l_{41}.u_{12})}{u_{22}} \qquad u_{34} = \frac{(a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24})}{1}$$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{1} \qquad l_{41} = \frac{(a_{41})}{u_{11}} \qquad u_{23} = \frac{(a_{23} - l_{21}.u_{13})}{1} \qquad l_{43} = \frac{(a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23})}{u_{33}}$$

$$u_{13} = \frac{a_{13}}{1} \qquad u_{22} = \frac{(a_{22} - l_{21}.u_{12})}{1} \qquad u_{24} = \frac{(a_{24} - l_{21}.u_{14})}{1} \qquad u_{44} = \frac{(a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34})}{1}$$

$$u_{14} = \frac{a_{14}}{1} \qquad l_{22} = 1 \qquad l_{33} = 1 \qquad l_{44} = 1$$

Factorisation LU (Exemple)

Résoudre par la méthode de Factorisation le système suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Etape 1: Factorisation de la matrice *A=LU*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix}$$

En identifiant les coefficients des deux matrices,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = (1.1.1)(1.-1.-1) = 1$$

Etape 2: Résolution du système

Le système $AX = b$ devient $LUX = b$

Poser $Y = UX$, Et $LY = b$

1) Résoudre le système $LY = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Résoudre le système $\mathrm{U.X} = Y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Factorisation LU (Algorithme)

Pour i=1,2,….,n (calcul de la première ligne de U et la diagonale de L)

$$l_{ii} = 1$$

$$u_{1i} = a_{1i}$$

Fin (pour)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour i=2,3,…,n (calcul alternatif des lignes de U et lignes de L)

Pour j=1,..,i-1

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj} \right) / u_{jj}$$

Fin

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & l_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & l_{32} & 1 & 0 \\ \frac{a_{41}}{a_{11}} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

Pour j=i,..,n

$$u_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj} \right)$$

Fin

FIN

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Factorisation LU (Algorithme)

[RR,WW]=lu(A)

[R,W]=factLU(A)

```
function [l,u]=factorisationLU(A)
for i=1:size(A,1)
    l(i,i)=1
    u(1,i)=A(1,i)
end
for i=2:size(A,1)
    for j=1:(i-1)
        V=A(i,j);
        for k=1:(j-1)
            V=V- l(i,k)*u(k,j);
        end
        l(i,j)=V/u(j,j)
    end
    for j=i:size(A,2)
        V=A(i,j);
        for k=1:(i-1)
            V=V-l(i,k)*u(k,j);
        end
    end
end
end
```

Décomposition de Cholesky (Principe)

Théorème de Cholesky

Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle définie positive, il existe au-moins une matrice B triangulaire inférieure telle que

$$A = BB^t$$

Décomposition de Cholesky (Condition nécessaire et suffisante)

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$est dite définie symétrique positive si

1. $A^t = A$(A symétrique)
2. $X^t AX \geq 0;\ \forall X \ \in (\mathbb{R})^n$ (A positive)

Ou $\equiv$ ($X^t AX$=0 si et seulement si $X = 0$)

Pour montrer qu'une matrice est définie positive, les méthodes courantes sont soit :

- vérifier les valeurs propres,
- les mineurs principaux,
- utiliser la décomposition de Cholesky,
- Vérifier le déterminant (la diagonale principale résultat de la méthode de gauss ou la factorisation LU
- ou directement vérifier le produit quadratique $X^t AX \geq 0;\ \forall X \ \in (\mathbb{R})^n$!

Décomposition de Cholesky (Principe)

$$A = BB^t$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{a}_{22} & \mathrm{a}_{23} & \mathrm{a}_{24} \\ \mathrm{a}_{32} & \mathrm{a}_{33} & \mathrm{a}_{34} \\ \mathrm{a}_{42} & \mathrm{a}_{43} & \mathrm{a}_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}^t$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{a}_{22} & \mathrm{a}_{23} & \mathrm{a}_{24} \\ \mathrm{a}_{32} & \mathrm{a}_{33} & \mathrm{a}_{34} \\ \mathrm{a}_{42} & \mathrm{a}_{43} & \mathrm{a}_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {b_{11}}^2 & b_{11}b_{21} & b_{11}b_{31} \\ b_{21}b_{11} & {b_{21}}^2{b_{22}}^2 & b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} \\ b_{31}b_{11} & b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} & {b_{31}}^2 + {b_{32}}^2 + {b_{33}}^2 \end{pmatrix}$$

Décomposition de Cholesky (Equations)

- $b_{11} = \sqrt{a_{11}}$
- Pour   i=2,..,n $b_{i1} = \frac{a_{i1}}{b_{11}}$
- Pour   i=2,..,n-1 $b_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}^2}$
- Pour j=1,..,n,   i=j+1,..,n , $b_{ij} = \frac{\left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{k=j-1} b_{jk} b_{ik}\right)}{b_{jj}}$;

Décomposition de Cholesky (Exemple)

- A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

- $b_{11} = \sqrt{1} = 1; \qquad b_{21} = \frac{2}{b_{11}} = 2, \qquad b_{31} = \frac{1}{b_{11}} = 1,$

- ${b_{21}}^2 . {b_{22}}^2 = 5 \quad \rightarrow \quad b_{22} = \sqrt{5 - {b_{21}}^2} = 1$

- $b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} = 2 \quad \rightarrow \quad b_{32} = \frac{2 - b_{21}b_{31}}{b_{22}} = 0$

- ${b_{31}}^2 + {b_{32}}^2 + {b_{33}}^2 = 7 \quad \rightarrow \quad b_{33} = \sqrt{7 - {b_{31}}^2 + {b_{32}}^2} = \sqrt{6}$