Gestion des stocks

A. Bazeniar

Enseignant chercheur
Centre universitaire Abdelhafid Boussouf
Mila, Algérie

Se reporter à des manuels de base et à certaines livres de spécialités

Septembre 2024

Chapitre 3

Modèles Stochastiques

Introduction

Les modèles stochastiques en gestion des stocks permettent de prendre en compte l'incertitude liée à la demande et aux délais de livraison. Contrairement aux modèles déterministes, ces modèles intègrent des probabilités et visent à minimiser les risques de rupture tout en optimisant les coûts.

Les modèles stochastiques partagent un ensemble d'hypothèses simplificatrices :

1. Demande aléatoire mais connue statistiquement :
   - La demande n'est pas constante, mais elle suit une distribution probabiliste (souvent normale ou Poisson).
   - Les paramètres de cette distribution (moyenne et écart-type) sont supposés connus et constants sur la période d'analyse.
2. Délai de livraison aléatoire mais prévisible :
   - Le délai de réapprovisionnement peut varier, mais il suit une distribution probabiliste.
   - La moyenne et la variance de ce délai sont connues.
3. Coûts constants et connus : Les coûts liés à la commande, à la possession de stocks et aux ruptures sont constants et bien définis.
4. Indépendance des variables aléatoires : La demande et le délai de livraison sont supposés indépendants.
5. Absence de pénuries permanentes : Les pénuries sont temporaires et peuvent être comblées dès réception de nouvelles commandes.

3.1 Le système (Q, r)

Le système(Q,r) est un modèle stochastique utilisé pour gérer les stocks lorsque la demande et/ou le délai de livraison sont incertains. Ce système est largement adopté dans les environnements où les commandes sont surveillées en continu, i.e., à tout instant on connaît le niveau du stock. Ce contrôle est réalisé en utilisant des fiches de stock ou des bases de données informatisées. Et il repose sur deux paramètres clés :

- Q : Quantité fixe commandée chaque fois qu'une commande est déclenchée.
- r : Point de commande (niveau de stock auquel une commande est déclenchée).

Remarque 3.1.1. *Les cycles de réapprovisionnement du stock se diffèrent d'une période à une autre, mais la quantité commandée est toujours constante.*

Dans la gestion des stocks, les deux concepts de base qui permettent de minimiser les risques de rupture tout en optimisant les coûts de gestion des stocks sont le **point de commande** et le **stock de sécurité**. Ces deux éléments sont essentiels pour une gestion efficace des stocks, surtout dans des systèmes de réapprovisionnement avec des délais de livraison.

3.1.1 Calcul du point de commande r

Le **point de commande** r est le niveau de stock auquel une commande doit être passée pour éviter une rupture de stock pendant le délai de réapprovisionnement. L'objectif est de minimiser la probabilité de rupture de stock, tout en maintenant un stock suffisant pour répondre à la demande.

Définition et Objectif

- **Demande ponctuelle** D : La demande ponctuelle de l'article durant une unité de temps est supposée suivre une loi de probabilité (généralement normale) avec une moyenne μ_D et un écart-type σ_D.
- **Demande durant le délai de réapprovisionnement** L : La demande pendant le délai de réapprovisionnement L est notée X. La variable X suit aussi une loi normale avec une moyenne μ_X et un écart-type σ_X. Tel que $X = \sum_{i=1}^{L} D_i$,

$$\mu_X = L\mu_D, \ \sigma_X = \sqrt{L}\sigma_D. \tag{3.1}$$

Formule du point de commande

Pour déterminer r, on adopte un niveau de service $1 - \alpha$ (où α est le risque de rupture de stock), qui représente la probabilité que la demande pendant le délai X soit inférieure ou égale au stock disponible r. Cela se traduit par :

$$P(X \leq r) = 1 - \alpha.$$

L'équation ci-dessus implique que α, le risque de rupture de stock, est la probabilité que la demande X dépasse r :

$$P(X > r) = \alpha.$$

En utilisant la distribution normale, $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$, on peut standardiser X pour le transformer en une variable Z suivant une loi normale standard ($Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$) :

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}.$$

Ainsi, pour $P(X > r) = \alpha$, on a :

$$Z_{1-\alpha} = \frac{r - \mu_X}{\sigma_X}.$$

En réarrangeant cette équation, on obtient :

$$r = \mu_X + Z_{1-\alpha} \cdot \sigma_X. \tag{3.2}$$

Où :

— $\mu_X = L\mu_D$ est la moyenne de la demande durant le délai de réapprovisionnement,

— $\sigma_X = \sqrt{L}\sigma_D$ est l'écart-type de la demande pendant le délai de réapprovisionnement,

— $Z_{1-\alpha}$ est le **quantile** de la loi normale standard (centrée réduite) correspondant au niveau de service $1 - \alpha$. Par exemple, pour un niveau de service de 95%, $Z_{1-\alpha} = 1.65$.

Les valeurs de $Z_{1-\alpha}$ pour différents niveaux de service sont les suivantes :

$1 - \alpha$	$Z_{1-\alpha}$
90%	1.29
95%	1.65
97%	1.88
99%	2.33

Interprétation : Le point de commande r indique le niveau de stock auquel la commande doit être passée pour garantir un niveau de service donné, tout en prenant en compte la variabilité de la demande et le délai de réapprovisionnement.

3.1.2 Calcul de stock de sécurité SS

Le **stock de sécurité** S est une quantité d'articles supplémentaire gardée en stock pour se protéger contre l'incertitude de la demande pendant le délai de réapprovisionnement. Il sert à compenser les fluctuations imprévues de la demande ou les retards de livraison.

Définition 3.1.1. *Le stock de sécurité est défini comme la différence entre le point de commande r et la moyenne de la demande pendant le délai de réapprovisionnement :*

$$SS = r - \mu_X. \tag{3.3}$$

Le stock de sécurité est donc une fonction du niveau de service souhaité et de l'incertitude de la demande. En effet, un niveau de service plus élevé (c'est-à-dire un risque de rupture de stock plus faible) nécessitera un stock de sécurité plus élevé.

La relation avec la demande est donnée par :

$$SS = Z_{1-\alpha} \times \sigma_X.$$

Où :

— $Z_{1-\alpha}$ est le quantile de la loi normale standard correspondant au niveau de service $1-\alpha$,

— $\sigma_X = \sqrt{L}\sigma_D$ est l'écart-type de la demande pendant le délai de réapprovisionnement.

Interprétation : Le stock de sécurité permet de couvrir les risques de variations inattendues dans la demande pendant le délai de réapprovisionnement. Si la demande est très variable ou si le délai de réapprovisionnement est long, le stock de sécurité devra être plus élevé.

Exemple 3.1.1. *Chaque année, le propriétaire d'un magasin d'ordinateurs vend une moyenne de 1000 boîtes de disques. La demande annuelle des boîtes de disques est distribuée normalement avec un écart-type de 40,8 boîtes. Il s'approvisionne les disques chez un distributeur régional et le coût de lancement d'une commande est de* $50DA$. *Le coût annuel de possession d'une boîte de disques en stock est de* $10DA$. *Le délai de livraison d'une commande est supposé de deux semaines. Le propriétaire du magasin adopte une politique du point de commande.*

— *Déterminer les paramètres de ce modèle de gestion du stock pour un niveau de service de* 95%.

— *Quel est le niveau de service si on aura un stock de sécurité de 10 boites.*

Solution :

1. *Détermination des paramètres du modèle de gestion du stock pour un niveau de service de 95%*

— $s = 50DA/commande$,

— $h = 10DA/boîte/an$,

— $L = 2$ *semaines.*

Considérons la variable aléatoire D : "demande annuelle des boîtes de disques" ; $D \sim N(\mu_D, \sigma_D)$, *avec :*

$$\mu_D = 1000 \text{ boîtes/an}, \quad \sigma_D = 40,8 \text{ boîtes/an}.$$

Les paramètres de la politique (Q, r) ***adoptée :***

— *La quantité de commande est calculée par la formule de Wilson :*

$$Q = \sqrt{\frac{2h\mu_D}{c_s}} = \sqrt{\frac{2 \times 50 \times 1000}{10}} = 100 \text{ boîtes}.$$

— *Calcul du point de commande r pour un niveau de service* $1 - \alpha = 95\%$ *:*

Soit la variable aléatoire X : "la demande des boîtes de disques durant $L = 2$ *semaines";* $X = L \times D \sim N(\mu_X, \sigma_X)$, *tels que :*

$$\mu_X = L\mu_D = 2 \times 1000 = 38 \text{ boîtes},$$

$$\sigma_X = \sqrt{L}\sigma_D = \sqrt{2} \times 40,8 = 8 \text{ boîtes}.$$

Pour $1 - \alpha = 95\%$, *on a* $Z_{1-\alpha} = 1.65$, *d'où :*

$$r = \mu_X + Z_{1-\alpha} \times \sigma_X = 38 + 8 \times 1.65 = 51.2 \text{ boîtes} \quad \Rightarrow \quad r = 51 \text{ boîtes}.$$

Le niveau du stock de sécurité est donc :

$$SS = r - \mu_X = 51 - 38 = 13 \text{ boîtes}.$$

La politique de cette entreprise est de commander 100 boîtes de disque chaque fois que le niveau du stock baisse à 51 unités.

2. *Calcul du niveau de service offert si le propriétaire du magasin désire avoir un stock de sécurité de 10 boîtes On a :*

$$SS = r - \mu_X = \sigma_X Z_{1-\alpha}$$
$$\Rightarrow Z_{1-\alpha} = \frac{S}{\sigma_X} = \frac{10}{8} = 1.25.$$

À partir de la table de la loi normale centrée et réduite, on obtient $1 - \alpha = 0.8944$, *soit un niveau de service de :*

$$1 - \alpha = 89.44\% \quad \Rightarrow \quad \text{Niveau de service} = 89.44\%.$$

3.1.3 Optimisation des Coûts

L'optimisation du **coût total de gestion des stocks** repose sur la gestion conjointe du point de commande et du stock de sécurité, tout en minimisant les coûts associés au réapprovisionnement, à la gestion du stock et aux ruptures de stock.

Coûts associés :

— **Coût de commande** C_L : Coût associé au passage d'une commande.
— **Coût de possession** C_P : Coût lié à la conservation d'articles en stock.
— **Coût de rupture de stock** C_r : Coût associé à une rupture de stock (perte de vente, pénalités).

Le coût total de gestion des stocks est donc la somme de ces trois coûts :

$$C_T = C_L + C_P + C_r$$

Où :

$$C_L = \frac{D}{Q} s$$

$$C_P = \left(\frac{Q}{2} + r - \mu_X \right) h$$

$$C_r = \pi \frac{D}{Q} \int_r^{\infty} (X - r) f(x)\, dx$$

En optimisant cette fonction de coût en fonction de Q et r, on obtient le niveau de commande et le point de commande qui minimisent les coûts totaux.

L'objectif ici est de calculer le point de commande r qui minimise la fonction coût $C_T(Q, r)$. Si l'on fixe la quantité de commande Q, alors le point minimum r de la fonction C_T vérifie :

$$\frac{\partial C_T}{\partial r} = h - \frac{D\pi}{Q} \int_r^{\infty} f(x)\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_r^{\infty} f(x)\, dx = \frac{hQ}{\pi D}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = P(X > r) = \frac{hQ}{\pi D}.$$

Donc, le niveau de service $1 - \alpha = 1 - \frac{hQ}{\pi D}$. Avec, π est le coût de rupture de stock.

Exemple 3.1.2. *(Exemple précédent)*

Calculer le stock de sécurité si le coût annuel de rupture d'une boîte de disque est de $10 DA$.

Solution : *On a :*

$$\pi = 10\, DA\, /\, an.$$

Le risque de rupture de stock est :

$$\alpha = \frac{Q \times h}{\pi D} = \frac{100 \times 10}{10 \times 1000} = 0.1 \quad \Rightarrow \quad 1 - \alpha = 1 - 0.1 = 0.9.$$

Pour ce niveau de service, son quartile associé est $Z_{1-\alpha} = Z_{0.90} = 1.29$. *Donc, le point de commande est :*

$$r = \mu_X + \sigma_X Z_{1-\alpha} = 38 + 8 \times 1.29 = 48.32 \quad \Rightarrow \quad r = 48\, boîtes.$$

Le niveau du stock de sécurité est :

$$SS = r - \mu_X = 48 - 38 = 10\, boîtes.$$

3.2 Le système (R, T) (modèle de révision périodique)

Le système (R, T), ou méthodes de révision périodique, est un modèle de gestion des stocks souvent utilisé dans des environnements où les commandes sont passées à intervalles réguliers T. Avec une telle méthode, le niveau de stock est examiné à un moment spécifié, et une commande est passée pour atteindre un niveau de stock cible R, avec un délai de livraison L. Par exemple, un magasin pourrait examiner ses rayons chaque soir et passer des commandes pour remplacer les articles vendus pendant la journée. Ce modèle doit répondre aux questions :

— Quel est le niveau de stock cible R qu'on doit maintenir pour garantir un niveau de service souhaité ?

— Quel est le montant de la commande nécessaire pour chaque période de révision ?

Ce modèle repose sur deux paramètres principaux :

— R : Le niveau de stock cible (ou stock maximum après réapprovisionnement).

— T : L'intervalle de temps entre deux réapprovisionnements.

Fonctionnement du système (R, T)

1. À chaque intervalle T, le stock est évalué.
2. Une commande est passée pour ramener le stock au niveau R, en prenant en compte le stock disponible et les commandes en transit.
3. Le réapprovisionnement est reçu après un délai L (*lead time*).

Hypothèses du modèle (R, T)

— La demande suit une distribution aléatoire, souvent supposée normale ou de Poisson.

— Les commandes sont passées à des intervalles fixes (T).

— Le délai de livraison L est connu et constant.

— Le coût unitaire, le coût de commande et le coût de stockage sont fixes.

Notations

— D : Demande moyenne pendant une période donnée.

— σ_D : Écart-type de la demande pendant une période donnée.

— L : Délai de livraison.

— $S(t)$: Stock disponible au temps t.

— R : Niveau cible de stock.

— T : Période de révision (période entre deux commandes).

3.2.1 Calcul du niveau de stock cible R

Le niveau R est déterminé en fonction de la demande anticipée pendant $T + L$ (période de révision plus délai de livraison) et d'un stock de sécurité SS pour gérer les incertitudes :

$$R = D_{T+L} + SS$$

où :

$$D_{T+L} = D \cdot (T + L)$$

et

$$SS = Z \cdot \sigma_{D_{T+L}}, \quad \sigma_{D_{T+L}} = \sigma_D \cdot \sqrt{T+L}.$$

3.2.2 Stock de sécurité

Le stock de sécurité SS est dimensionné pour atteindre un niveau de service cible P_s (probabilité de ne pas être en rupture pendant $T+L$) :

$$SS = Z \cdot \sigma_{D_{T+L}} = Z \cdot \sigma_D \cdot \sqrt{T+L}.$$

Donc,

$$R = D_{T+L} + Z \cdot \sigma_{D_{T+L}} = D_{T+L} + Z \cdot \sigma_D \cdot \sqrt{T+L}. \tag{3.4}$$

Cela suppose que le délai de réapprovisionnement est inférieur à la durée du cycle. Si ce n'est pas le cas, la commande doit également prendre en compte le stock déjà en commande, de sorte que :

$$\text{Quantité de commande} = \text{Niveau de stock cible} - \text{Stock disponible} - \text{Stock en commande}$$

3.2.3 Analyse des coûts dans le système (R, T)

Le système (R, T) doit minimiser les coûts totaux suivants :

1. Coût de commande (C_c) :

$$C_c = \frac{C_o}{T}$$

où C_o est le coût fixe de commande.

2. Coût de possession (C_p) :

$$C_p = h \cdot \frac{R}{2}$$

où h est le coût unitaire de stockage.

3. Coût de rupture (C_b) :

$$C_b = C_s \cdot \text{Probabilité de rupture}.$$

L'objectif est de minimiser la fonction de coût total :

$$C_{\text{total}} = C_c + C_p + C_b.$$

Exemple 3.2.1. ***Données :***

— *Demande moyenne* $D = 100$ *unités/semaine.*
— *Écart-type de la demande* $\sigma_D = 10$ *unités/semaine.*
— *Délai de livraison* $L = 2$ *semaines.*
— *Période de révision* $T = 4$ *semaines.*
— *Coût fixe de commande* $C_o = 50\,DA$*.*
— *Coût unitaire de stockage* $h = 2\,DA\,/\,unité\,/\,semaine$*.*
— *Niveau de service cible* $P_s = 95\%$ *(*$z = 1.645$*).*

Calculs :

1. *Demande moyenne sur* $T + L$ *:*

$$D_{T+L} = D \cdot (T + L) = 100 \cdot (4 + 2) = 600\,unités.$$

2. *Écart-type sur* $T + L$ *:*

$$\sigma_{D_{T+L}} = \sigma_D \cdot \sqrt{T + L} = 10 \cdot \sqrt{6} = 24.49\,unités.$$

3. *Stock de sécurité :*

$$SS = z \cdot \sigma_{D_{T+L}} = 1.645 \cdot 24.49 = 40.28\,unités.$$

4. *Niveau* R *:*

$$R = D_{T+L} + SS = 600 + 40.28 = 640.28\,unités.$$

5. *Coût de commande :*

$$C_c = \frac{C_o}{T} = \frac{50}{4} = 12.5\,DA/semaine.$$

6. *Coût de possession :*

$$C_p = h \cdot \frac{R}{2} = 2 \cdot \frac{640.28}{2} = 640.28\,DA/semaine.$$