Université Abdelhafid Boussouf - Mila $2024 - 2025$
Institut des Mathématiques et informatique
Département des Mathématiques **Master 1 : MMTD**

Série no 2 : Gestion des filles d'attente

Exercice 1. *Dans un système d'attente avec un seul serveur, les arrivées de clients suivent un processus de Poisson de taux $\lambda = 3$ clients par minute.*

- *Déterminez l'instant d'arrivée de la 10-ième personne.*
- *Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où X_i est le temps inter-arrivée entre la $(i-1)$-ième et la i-ième personne. Calculer l'espérance et la variance de cette somme.*

Exercice 2. *Dans un système de file d'attente, le temps d'attente d'un client W_{n+1} pour être servi est donné par la formule de Lindley suivante :*

$$W_{n+1} = \max(W_n + S_n - T_{n+1}, 0),$$

Où, $W_1 = 0$, $S_n = 4$ min et $T_n = 3$ min (pour chaque client).

1. *Calculez les temps d'attente W_2, W_3, et W_4 des clients 2, 3, et 4.*
2. *Si le temps de service passe à $S_n = 5$ minutes, recalculez W_2, W_3, et W_4.*
3. *Établissez une formule générale pour W_n en fonction de W_{n-1}, S_{n-1}, et T_n. Ensuite, en utilisant les valeurs de $S_n = 4$ minutes et $T_n = 3$ minutes, trouvez une expression récurrente pour W_n.*

Exercice 3. *Dans une banque, les clients arrivent selon un processus de Poisson avec un taux d'arrivée de $\lambda = 3$ clients par minute. La banque dispose d'un seul guichet, et le temps de service est exponentiellement distribué avec un taux de service de $\mu = 5$ clients par minute.*

1. *Calculer le taux d'occupation ρ de la file d'attente et déterminer si le système peut atteindre un état stationnaire.*
2. *Déterminer la probabilité de stationnarité de chaque état n, c'est-à-dire la probabilité qu'il y ait exactement n clients dans la banque.*
3. *Calculer le nombre moyen de clients dans la banque (file et service compris).*
4. *Déterminer le temps moyen passé par un client dans la banque, en incluant son attente et son temps de service.*

Exercice 4. *Dans un système de file d'attente $M/M/1$, la file d'attente est composée d'un seul serveur ayant un taux de service de $\mu = 5$ clients par minute. Les arrivées des clients suivent un processus de Poisson avec un taux moyen d'arrivée $\lambda = 3$ clients par minute.*

1. *Calculez le taux d'occupation ρ du serveur. En déduire si le système est en régime stationnaire et justifier pourquoi.*
2. *Calculez l'espérance du temps d'attente $\mathbb{E}(W)$ dans la file d'attente pour un client.*
3. *Déterminez la probabilité $P(T > 1)$ du temps total de séjour (temps d'attente plus temps de service).*
4. *Calculez l'espérance du nombre de clients présents dans le système $\mathbb{E}(Q)$ ainsi que dans la file d'attente $\mathbb{E}(L)$.*
5. *Calculez la probabilité que le temps d'attente d'un client soit inférieur à $t = 0.25$ minute.*

Solution Exercice 1

Dans un système d'attente avec un seul serveur, les arrivées de clients suivent un processus de Poisson de taux $\lambda = 3$ clients par minute.

— **Détermination de l'instant d'arrivée de la 10-ième personne**
Le temps d'arrivée de la n-ième personne, noté T_n, est donné par la somme des temps inter-arrivées :

$$T_{10} = \sum_{i=1}^{10} X_i = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{3} \ln(U_i) = 5,39 \text{ minutes}.$$

— **Espérance et variance de la somme des temps inter-arrivées S_n**
Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où chaque $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$. L'espérance de S_n est :

$$E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n \times \frac{1}{\lambda} = \frac{n}{\lambda}.$$

La variance de S_n est :

$$\text{Var}(S_n) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) = n \times \frac{1}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda^2}.$$

Pour $n = 10$ et $\lambda = 3$, on a :

$$E(S_{10}) = \frac{10}{3} \text{ minutes}, \quad \text{Var}(S_{10}) = \frac{10}{9} \text{ minutes}^2.$$

Solution Exercice 3

1. **Calcul du taux d'occupation**
Le taux d'occupation ρ est donné par :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{5} = 0.6$$

Puisque $\rho < 1$, le système peut atteindre un état stationnaire.

2. **Probabilités de stationnarité**
La probabilité de stationnarité de chaque état n dans un modèle $M/M/1$ est donnée par :

$$\pi_n = (1-\rho)\rho^n$$

En substituant $\rho = 0.6$, on obtient :

$$\pi_n = (1-0.6)(0.6)^n = 0.4 \times (0.6)^n$$

3. **Nombre moyen de clients dans la banque**
Le nombre moyen de clients dans un système $M/M/1$ est donné par :

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.6}{1-0.6} = \frac{0.6}{0.4} = 1.5$$

4. **Temps moyen passé par un client dans la banque**
   Le temps moyen dans le système, incluant l'attente et le service, est donné par :

$$W = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{5 \times (1-0.6)} = \frac{1}{5 \times 0.4} = \frac{1}{2} = 2 \text{ minutes}$$

Solution Exercice 2

1. Calcul du temps d'attente pour les premiers clients
   - Pour le premier client, $W_1 = 0$.
   - Calcul de W_2 : $W_2 = \max(W_1 + S_1 - T_2, 0) = \max(0 + 4 - 3, 0) = \max(1, 0) = 1$
   - Calcul de W_3 : $W_3 = \max(W_2 + S_2 - T_3, 0) = \max(1 + 4 - 3, 0) = \max(2, 0) = 2$
   - Calcul de W_4 : $W_4 = \max(W_3 + S_3 - T_4, 0) = \max(2 + 4 - 3, 0) = \max(3, 0) = 3$
2. Si le temps de service passe à $S_n = 5$ minutes, nous recalculons les temps d'attente.
   - Calcul de W_2 : $W_2 = \max(W_1 + S_1 - T_2, 0) = \max(0 + 5 - 3, 0) = \max(2, 0) = 2$
   - Calcul de W_3 : $W_3 = \max(W_2 + S_2 - T_3, 0) = \max(2 + 5 - 3, 0) = \max(4, 0) = 4$
   - Calcul de W_4 : $W_4 = \max(W_3 + S_3 - T_4, 0) = \max(4 + 5 - 3, 0) = \max(6, 0) = 6$
3. La formule de Lindley pour W_{n+1} : En utilisant $S_n = 4$ et $T_n = 3$, La formule de Lindley devient :

$$W_{n+1} = \max(W_n + 4 - 3, 0) = \max(W_n + 1, 0)$$

   Ainsi, la relation récurrente pour W_n est :

$$W_n = W_{n-1} + 1$$

   Avec $W_1 = 0$, on obtient une formule explicite pour W_n :

$$W_n = n - 1$$

   Les temps d'attente W_n augmentent donc linéairement en fonction de n.

Solution Exercice 4

La probabilité que le temps d'attente soit inférieur à un seuil t est $P(W \leq t) = 1 - e^{-\mu(1-\rho)t}$.

1. **Taux d'occupation du serveur et conditions de stabilité**
   — Le taux d'occupation du serveur est donné par :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{5} = 0.6.$$

   — Le système est en régime stationnaire si $\rho < 1$. Ici, $\rho = 0.6$, donc le système est stable et peut atteindre un régime stationnaire.
2. **Temps moyen d'attente dans la file d'attente**
   — L'espérance du temps d'attente dans la file d'attente pour un client est :

$$\mathbb{E}(W) = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{0.6}{5 \times (1-0.6)} = \frac{0.6}{5 \times 0.4} = \frac{0.6}{2} = 0.3 \text{ minute.}$$

3. **Probabilité que le temps de séjour soit supérieur à un certain seuil**
   — La probabilité que le temps total de séjour T dans le système soit supérieur à $t = 1$ minute est :

$$P(T > t) = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-5\times(1-0.6)\times 1} = e^{-5\times 0.4} = e^{-2} \approx 0.1353.$$

4. **Nombre moyen de clients dans le système et dans la file d'attente**
   — L'espérance du nombre de clients présents dans le système est donnée par :

$$\mathbb{E}(Q) = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.6}{1-0.6} = \frac{0.6}{0.4} = 1.5 \text{ clients.}$$

   — L'espérance du nombre de clients dans la file d'attente est :

$$\mathbb{E}(L) = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(0.6)^2}{0.4} = \frac{0.36}{0.4} = 0.9 \text{ clients.}$$

5. **Probabilité de temps d'attente**
   — La probabilité que le temps d'attente W soit inférieur à $t = 0.25$ minute est :

$$P(W \leq 0.25) = 1 - \rho e^{-(\mu-\rho)t} = 1 - 0.6e^{-(5-3)} = 1 - 0.6e^{-2} \approx 1 - 0.0812 = 0.9188.$$