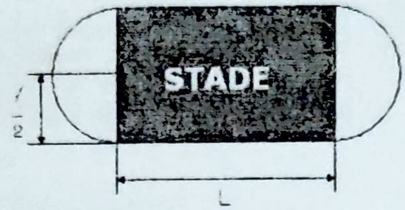
Centre Universitaire de Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Domaine : 3ème année mathématiques

Série de TD N 01

Module : *Optimisation sans contraintes*

Exercice N1
On dipose de 40 m de clôture pour délimiter un terrain rectangulaire. Quelles sont les dimensions du terrain pour lesquelles son aire est maximale ?

Exercice N2
Un stade olympique à la forme d'un rectangle avec deux demi-cercles aux extrémités. La longueur de la piste est imposée et mesure 400 mètres. Quelles dimensions doit-on donner au stade pour que la surface rectangulaire soit maximale ?



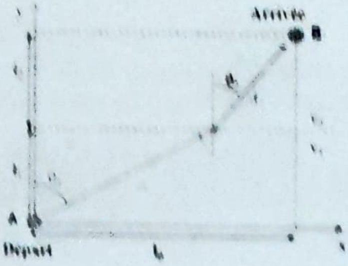
Exercice N3
Un soudeurs veut réaliser une citerne d'eau cylindrique de volume donné V_0 et de surface minimale. Modéliser ce problème

Exercice N4 (Production) :
Dans une usine d'éléments préfabriqués, un atelier produit deux types A et B d'éléments.

- ✓ En raison de la demande, il est nécessaire de produire chaque jour 150 à 400 éléments A et 250 à 600 éléments B.
- ✓ La demande en éléments B est supérieure ou égale aux 4/3 de la demande en éléments A et ne dépasse pas son triple.
- ✓ Pour fabriquer un élément A, on utilise 2,5 m de fil de fer et 12 kg de plâtre.
- ✓ Pour un élément B, on a besoin de 7,5 m de fil de fer et de 9 kg de plâtre.
- ✓ Les fournisseurs ne peuvent livrer plus de 7,2 tonnes de plâtre et plus de 4500 m de fil de fer par jour.
- ✓ La vente d'un élément A rapporte 4 DA et celle d'un élément B 2,50 DA.

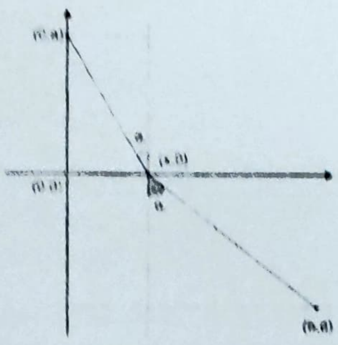
Modéliser le probléme afin d'avoire le nombre de pièces de chaque types qu'il faut produire par jour pour que le bénéfice soit maximal ?

Exercice N5
Un maître nageur, situé en un point A d'une plage, souhaite porter secours le plus rapidement possible à un vacancier (situé en B) sur le point de se noyer à quelques brasses du bord de mer. On note v_1 la vitesse (supposés constants) du maître nageur sur la plage et v_2 sa vitesse dans l'eau (où il nage). Donner le modèle mathématique qu'il lui permet d'arriver en un temps minimal.



Exercice 6

Considérons le principe de Fermat concernant la propagation de la lumière : "Dans un milieu non homogène, un rayon de lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit minimale." Lorsque la lumière passe d'un milieu à un autre, prouver la loi de la réfraction suivante : (la direction du rayons lumineux satisfait la relation) $\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$, où α_1 et α_2 sont les angles de réfraction, v_1 et v_2 sont les vitesses de la lumière dans les deux milieux, respectivement. Supposons que la lumière se déplace du point $(0,a)$ du premier milieu au point (b,d), $b > 0$ du second (voir la figure ci-dessous).



Exercice 7

Le tableau suivant indique le nombre d'heures nécessaires à chaque Expert $E_i (i = 1, \ldots, 4)$ pour réaliser la tâche $T_j (j = 1, \ldots, 3)$. Un Expert ne peut réaliser qu'une seule tâche. On veut savoir quel Expert affecter à chaque tâche pour minimiser le nombre total d'heures de service.

	T1	T2	T3
E1	160	220	280
E2	180	240	230
E3	190	240	235
E4	170	250	240

Modéliser le problème (Prendre x_{ij} la variable de décision représentant l'affectation de l'expert E_i à la tâche T_j avec $x_{ij} = 1$ si E_i est affecté à T_j et $x_{ij} = 0$ sinon).

Exercice N°8

Une entreprise envisage plusieurs sites de construction pour des usines qui serviront à approvisionner ses clients. À chaque site potentiel i correspond un coût de construction a_i, une capacité de production u_i, un coût de production unitaire b_i et des coûts de transport c_{ij} des usines vers les clients.
Soit y_i une variable binaire prenant la valeur 1 si un entrepôt est construit sur le site i, d_j la demande de marché (client) j et x_{ij} la quantité produite à l'usine i et destinée au marché j.

Modéliser ce problème sous forme d'un programme linéaire mixte, en expliquant chaque élément du modèle

Exercice N°9

- Montrer que tout sous-espace vectoriel de R^n est convexe.
- Montrer qu'un intervalle de R est convexe.

Exercice N°10

Lesquels de ces ensembles sont convexes ?
- $S = \{(x_1, x_2)\backslash x_1^2 + x_2^2 \leq 12\}$;
- $S = \{(x_1, x_2)\backslash (x_1, x_2) = (2, 3),\quad (x_1, x_2) = (1, 0)\}$;
- $S = \{(x_1, x_2)\backslash x_1 \geq 2,\quad x_1 \leq 10\}$.

Exercice N°11

Soit $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable.
Montrer que f est convexe si et seulement si $\nabla^2 f(x) \geq 0$, $\forall x \in S$.

Exercice N°12

Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, avec $F(x) = \frac{1}{2}x^T Dx + c^T x$
et D est une matrice symétrique.
- Montrer que F est convexe si $D \geq 0$ et concave si $D \leq 0$;
- étudier la convexité de F pour $D = \begin{pmatrix} \alpha & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \\ 0 & 9 & 18 \end{pmatrix}$.