Centre universitaire Abdelhafid Boussouf -Mila
Institut de Sciences et Technologies
Département de mathématiques et informatique
$3^{\text{ième}}$ Année mathématiques

# Matière: Optimisation sans contraintes

## Chapitre 2: Minimisation sans contraintes

Présentée par:
AZI Mourad

October 30, 2022

# Plan de cours



Problème de minimisation sans contraintes

# Plan de cours

# Plan de cours

# Plan de cours

# Problème de minimisation sans contraintes



Considérons le problème de minimisation (optimisation) non linéaire sans contraintes suivant:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x), \tag{1}$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

## Définition 2.1(Point minimum global)

$x^*$ est appelée point minimum global du problème (1) si

$$f(x^*) \leq (x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

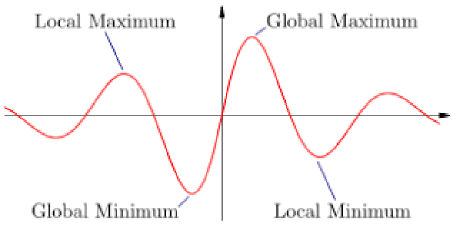
et on note $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = f(x^*)$.

## Définition 2.2(Point minimum local)

$x^* \in \mathbb{R}^n$ est appelé minimum local du problème (1) s'il existe un réel $\varepsilon > 0$, tel que :

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in B(x^*, \varepsilon),$$

où $B(x^*, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x - x^*\| \leq \varepsilon\}$ est la boule de centre $x^*$ et de rayon $\varepsilon$.



**Théorème 2.1 (Existence "Weierstrass")**

Soit $f$ une fonction continue sur un ensemble $S$ non vide fermé et borné, alors $f$ admet un point minimum global et un point maximum global sur $S$, c'est-à-dire $\exists x_1^*,\ \ x_2^* \in S$ tel que:

$$\forall x \in S,\ \ f(x) \geq f(x_1^*),\ \ f(x) \leq f(x_2^*).$$

## Définition 2.3 (Fonctions coercive)

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non borné et $f : X \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est coercive sur $X$ si on a

$$\lim_{x \in X, ||x|| \mapsto +\infty} f(x) = +\infty. \tag{2}$$

## Théorème 2.2 (atteignement sous la coercivité)

Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ tel que $f$ est coercive:

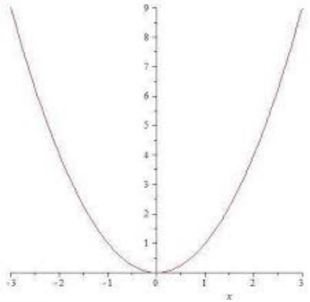
$$\lim_{||x|| \mapsto +\infty} f(x) = +\infty, \tag{3}$$

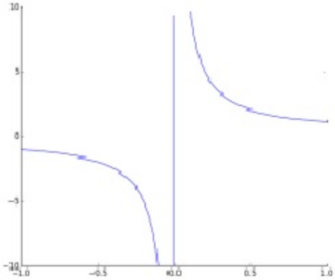
alors $\exists x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \ f(x) \geq f(x^*).$$

# Résultats d'existence





# Plan de cours



Problème de minimisation sans contraintes

Résultats d'existence

Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité

- Conditions nécessaires
- Conditions suffisantes

Minimisation des fonctions convexes

- Minimisation des fonctions convexes différentiable

# Condition nécessaire du premier ordre



**Théorème 2.3(Condition nécessaire du premier ordre)**

Soit $x^*$ est un minimum local (global) pour le problème (1), et si de plus $f$ est continûment différentiable sur un ensemble $S$-ouvert contenant $x^*$,

- alors

Un point vérifiant la condition (4) est appelé point stationnaire.

# Condition nécessaire du premier ordre



## Théorème 2.3(Condition nécessaire du premier ordre)

Soit $x^*$ est un minimum local (global) pour le problème (1), et si de plus $f$ est continûment différentiable sur un ensemble $S$-ouvert contenant $x^*$,

- alors

$$\nabla f(x^*) = 0. \tag{4}$$

Un point vérifiant la condition (4) est appelé point stationnaire.

# Condition nécessaire du premier ordre

## Théorème 2.3(Condition nécessaire du premier ordre)

Soit $x^*$ est un minimum local (global) pour le problème (1), et si de plus $f$ est continûment différentiable sur un ensemble $S$-ouvert contenant $x^*$,

- alors

$$\nabla f(x^*) = 0. \tag{4}$$

Un point vérifiant la condition (4) est appelé point stationnaire.

# Condition nécessaire du second ordre



### Théorème 2.4(Condition nécessaire du second ordre)

Soit $x^*$ un minimum local (global) pour le problème (1) de $f$ sur $\mathbb{R}^n$ et si de plus $f$ est deux fois continûment différentiable sur $S$-ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, contenant $x^*$,

- alors

# Condition nécessaire du second ordre



## Théorème 2.4(Condition nécessaire du second ordre)

Soit $x^*$ un minimum local (global) pour le problème (1) de $f$ sur $\mathbb{R}^n$ et si de plus $f$ est deux fois continûment différentiable sur $S$-ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, contenant $x^*$,

- alors

$$\nabla^2 f(x^*) \geq 0. \tag{5}$$

# Plan de cours



Problème de minimisation sans contraintes

Résultats d'existence

Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité

- Conditions nécessaires
- Conditions suffisantes

Minimisation des fonctions convexes

- Minimisation des fonctions convexes différentiable

# Conditions suffisantes d'optimalité



## Théorème 2.5 (Conditions suffisantes d'optimalité)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment differentiable sur $S$-ouvert $\subset \mathbb{R}^n, f \subset C^2(S)$.

Supposons que pour $x^* \in S$ les conditions suivantes sont vérifiées:

- $\nabla f(x^*) = 0$ (stationnarité);

## Conditions suffisantes d'optimalité



**Théorème 2.5 (Conditions suffisantes d'optimalité)**

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment differentiable sur $S$-ouvert $\subset \mathbb{R}^n, f \subset C^2(S)$.

Supposons que pour $x^* \in S$ les conditions suivantes sont vérifiées:

- $\nabla f(x^*) = 0$ (stationnarité);
- $\nabla^2 f(x^*) > 0$.

# Conditions suffisantes d'optimalité



## Théorème 2.5 (Conditions suffisantes d'optimalité)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment differentiable sur $S$-ouvert $\subset \mathbb{R}^n, f \subset C^2(S)$.

Supposons que pour $x^* \in S$ les conditions suivantes sont vérifiées:

- $\nabla f(x^*) = 0$ (stationnarité);
- $\nabla^2 f(x^*) > 0$.

Alors $x^*$ est un minimum local.

## Théorème 2.6

Soit $f$ une fonction réelle continûment différentiable, définie sur un ensemble convexe $X \in \mathbb{R}^n$. Alors $f$ est convexe si et seulement si

$$f(x) - f(y) \geq (x-y)^T \nabla f(y), \forall x, y \in X. \qquad (6)$$

**Théorème 2.7 (L'ensemble des points minimums)**

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
L'ensemble $M$ des points minimums de $f$ est un ensemble convexe.

## Théorème 2.8

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, alors tout point minimum local est global.

## Théorème 2.9

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe, alors $f$ atteint sa valeur minimale en un point unique.

# Plan de cours



Problème de minimisation sans contraintes

Résultats d’existence

Conditions nécessaires et suffisantes d’optimalité
- Conditions nécessaires
- Conditions suffisantes

Minimisation des fonctions convexes
- Minimisation des fonctions convexes différentiable

## Théorème 2.10

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et continûment différentiable, alors $f$ atteint sa valeur minimale en un point $x^*$ si et seulement si

$$\nabla f(x^*) = 0. \tag{7}$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = f(x^*) \Leftrightarrow \nabla f(x^*) = 0.$$