

RÉGULATION ET ASSERVISSEMENT

Yassine Ariba

Dpt GEI - Icam, Toulouse.



version 1.0

1 Modélisation

- Exemples introductifs
- Notion de système
- Fonction de transfert
- Schéma fonctionnel

2 Réponse d'un système

- Réponse temporelle
- Réponse fréquentielle
- Résumé

3 L'Automatique

- Définition
- Applications
- Architecture de commande
- Notion de stabilité
- Objectif du cours

4 Stabilité et performances d'un asservissement

- Stabilité
- Précision
- Rapidité
- Marges de stabilité

5 Synthèse de correcteurs

- Introduction
- Synthèse directe
- Action proportionnelle
- Action intégrale
- Action dérivée
- Combinaisons d'actions
- Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Qu'est ce que la modélisation ?

Dans toutes les disciplines, l'étude d'un processus physique/dispositif/mécanisme nécessite d'établir *un modèle* :

Qu'est ce que la modélisation ?

Dans toutes les disciplines, l'étude d'un processus physique/dispositif/mécanisme nécessite d'établir *un modèle* :

- pour comprendre et analyser le dispositif,
- pour pouvoir prédire son comportement,
- pour utiliser des outils de simulation.

Qu'est ce que la modélisation ?

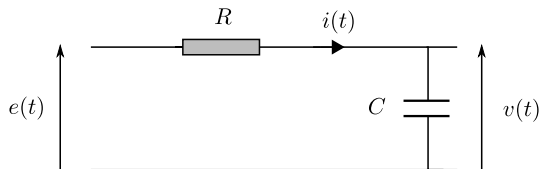
Dans toutes les disciplines, l'étude d'un processus physique/dispositif/mécanisme nécessite d'établir *un modèle* :

- pour comprendre et analyser le dispositif,
- pour pouvoir prédire son comportement,
- pour utiliser des outils de simulation.

 un modèle est toujours une représentation approchée de la réalité.

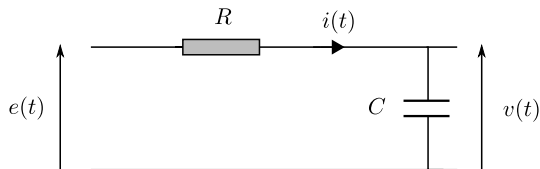
Exemple : le circuit RC

Considérons un circuit électronique



Exemple : le circuit RC

Considérons un circuit électronique

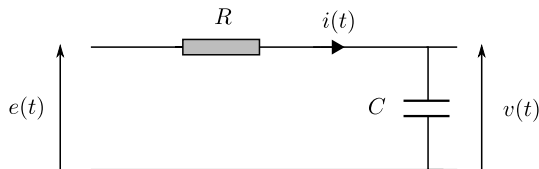


Appliquons la loi des mailles

$$e(t) = Ri(t) + v(t) \quad \text{sachant que} \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}.$$

Exemple : le circuit RC

Considérons un circuit électronique



Appliquons la loi des mailles

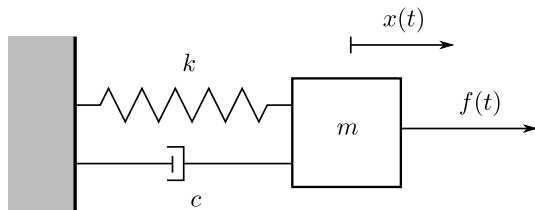
$$e(t) = Ri(t) + v(t) \quad \text{sachant que} \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}.$$

Nous avons le modèle :

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = e(t)$$

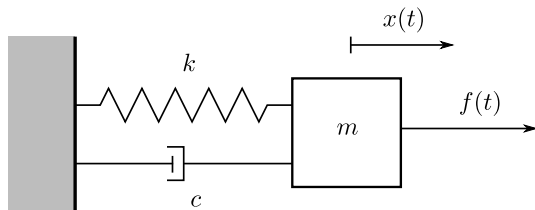
Exemple : structure masse-ressort

Considérons une structure mécanique



Exemple : structure masse-ressort

Considérons une structure mécanique

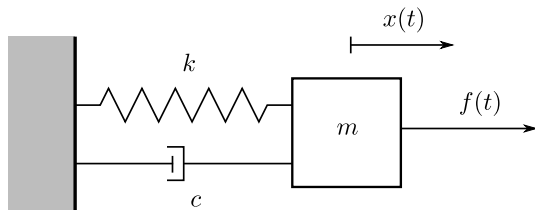


Appliquons le principe fondamental de la dynamique

$$m\ddot{x}(t) = f(t) + f_{\text{ressort}}(t) + f_{\text{amort}}(t).$$

Exemple : structure masse-ressort

Considérons une structure mécanique



Appliquons le principe fondamental de la dynamique

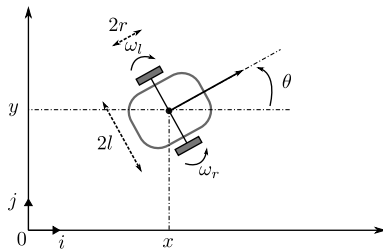
$$m\ddot{x}(t) = f(t) + f_{\text{ressort}}(t) + f_{\text{amort}}(t).$$

Nous avons le modèle :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

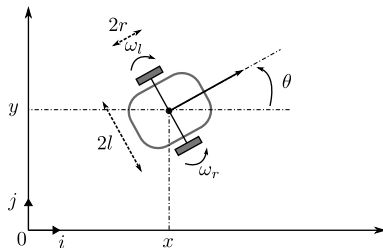
Exemple : base mobile

Considérons un robot à deux roues motrices indépendantes



Exemple : base mobile

Considérons un robot à deux roues motrices indépendantes

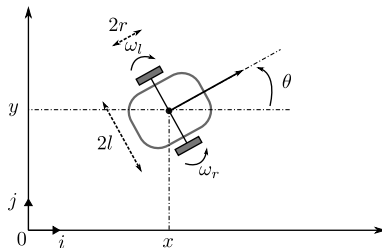


On montre que les vitesses de translation et rotation du mobile sont

$$v = r \frac{\omega_r + \omega_l}{2} \quad \text{et} \quad \omega = r \frac{\omega_r - \omega_l}{2l}$$

Exemple : base mobile

Considérons un robot à deux roues motrices indépendantes



On montre que les vitesses de translation et rotation du mobile sont

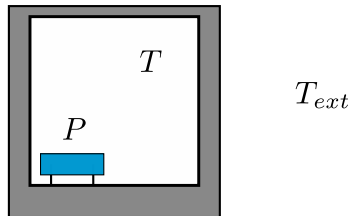
$$v = r \frac{\omega_r + \omega_l}{2} \quad \text{et} \quad \omega = r \frac{\omega_r - \omega_l}{2l}$$

Nous avons le modèle :

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega \end{cases}$$

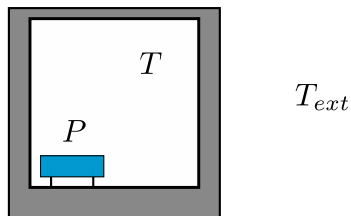
Exemple : échanges thermiques dans une enceinte

Considérons les variations de température à l'intérieur d'une enceinte



Exemple : échanges thermiques dans une enceinte

Considérons les variations de température à l'intérieur d'une enceinte

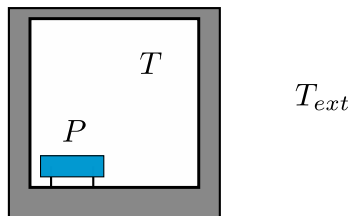


La déperdition et le bilan énergétique s'écrivent

$$P_{pertes} = k(T - T_{ext}) \quad \text{et} \quad P - P_{pertes} = c \frac{dT}{dt}$$

Exemple : échanges thermiques dans une enceinte

Considérons les variations de température à l'intérieur d'une enceinte



La déperdition et le bilan énergétique s'écrivent

$$P_{pertes} = k(T - T_{ext}) \quad \text{et} \quad P - P_{pertes} = c \frac{dT}{dt}$$

Nous avons le modèle :

$$P = k(T - T_{ext}) + c\dot{T}$$

Exemple : dynamique des populations

Considérons l'évolution de la taille N d'une population

Exemple : dynamique des populations

Considérons l'évolution de la taille N d'une population

Premier modèle :

$$\dot{N}(t) = \alpha N(t) - \beta N(t)$$

avec

- α : taux de naissances
- β : taux de décès

Exemple : dynamique des populations

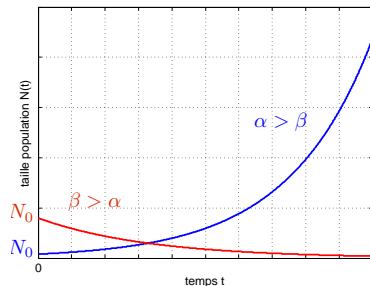
Considérons l'évolution de la taille N d'une population

Premier modèle :

$$\dot{N}(t) = \alpha N(t) - \beta N(t)$$

avec

- α : taux de naissances
- β : taux de décès



Exemple : dynamique des populations

Considérons l'évolution de la taille N d'une population

Premier modèle :

$$\dot{N}(t) = \alpha N(t) - \beta N(t)$$

avec

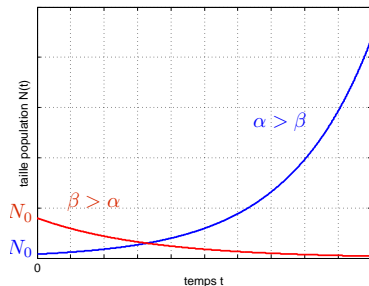
- α : taux de naissances
- β : taux de décès

Second modèle :

$$\dot{N}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right)$$

avec

- $r = \alpha - \beta$
- K : nombre max d'individus



Exemple : dynamique des populations

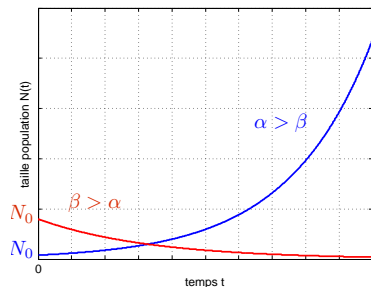
Considérons l'évolution de la taille N d'une population

Premier modèle :

$$\dot{N}(t) = \alpha N(t) - \beta N(t)$$

avec

- α : taux de naissances
- β : taux de décès

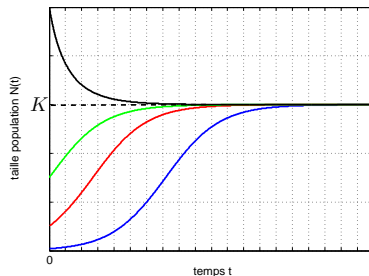


Second modèle :

$$\dot{N}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right)$$

avec

- $r = \alpha - \beta$
- K : nombre max d'individus



Modèles mathématiques

Ici, les modèles sont des *équations différentielles*

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = e(t)$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega \end{cases}$$

$$P = k(T - T_{ext}) + c\dot{T}$$

$$\dot{N}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right)$$

Modèles mathématiques

Ici, les modèles sont des *équations différentielles*

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = e(t) \quad \Rightarrow \quad \text{linéaire}$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad \Rightarrow \quad \text{linéaire}$$

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega \end{cases}$$

$$P = k(T - T_{ext}) + c\dot{T} \quad \Rightarrow \quad \text{linéaire}$$

$$\dot{N}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right)$$

Modèles mathématiques

Ici, les modèles sont des *équations différentielles*

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = e(t) \quad \Rightarrow \quad \text{linéaire}$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad \Rightarrow \quad \text{linéaire}$$

$$\begin{cases} \dot{x} & = & v \cos \theta \\ \dot{y} & = & v \sin \theta \\ \dot{\theta} & = & \omega \end{cases}$$

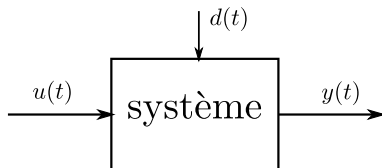
$$P = k(T - T_{ext}) + c\dot{T} \quad \Rightarrow \quad \text{linéaire}$$

$$\dot{N}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right)$$

★ même formalisme mathématique.

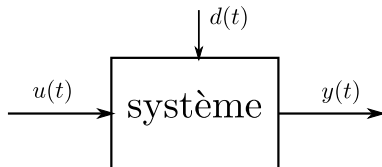
Approche système

L'automaticien adopte une approche *générique*



Approche système

L'automaticien adopte une approche *générique*



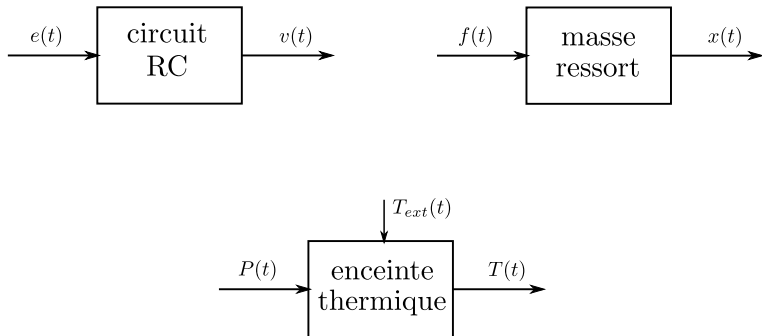
l'entrée - $u(t)$ - représente le signal de commande qui va agir sur le système.

la sortie - $y(t)$ - caractérise le comportement du système. Il est la réponse du système à une excitation extérieure.

la perturbation - $d(t)$ - représente les signaux d'entrée incontrôlés affectant le système. Il spécifie les interactions avec son environnement.

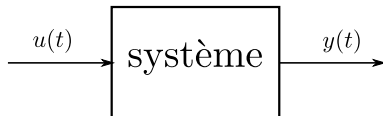
Approche système

Même formalisme pour chaque cas :



Les systèmes linaires invariants

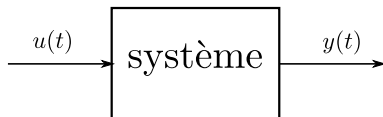
Dans de ce cours, on s'intéresse exclusivement aux SLI



Relation entrée-sortie : $u(t) \rightarrow y(t)$

Les systèmes linaires invariants

Dans de ce cours, on s'intéresse exclusivement aux SLI



Relation entrée-sortie : $u(t) \rightarrow y(t)$

\Rightarrow **équations différentielles linéaires
à coefficients constants**

La transformée de Laplace

La transformée de Laplace (TL) d'une fonction $f(t)$ est la fonction du nombre complexe s :

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

On note : $\hat{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ et $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\}$.

La transformée de Laplace

La transformée de Laplace (TL) d'une fonction $f(t)$ est la fonction du nombre complexe s :

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

On note : $\hat{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ et $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\}$.

Propriétés :

- Linéarité : $\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\hat{f}(s) + b\hat{g}(s)$, a et b constants.
- Dérivation : $\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = s\hat{f}(s) - f(0)$.
- Intégration : $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\theta)d\theta\right\} = \frac{1}{s}\hat{f}(s)$.
- Valeur finale : $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{f}(s)$.

Table des transformées

Rappelons que les fonctions temporelles $f(t)$ ci-dessous ne sont définies que pour $t \geq 0$.

Fonction	Dom. temporel $f(t)$	Trans. de Laplace $\hat{f}(s)$
échelon	1	$\frac{1}{s}$
rampe	t	$\frac{1}{s^2}$
puissance n-ième	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
exponentielle décroissante	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

Table des transformées

Rappelons que les fonctions temporelles $f(t)$ ci-dessous ne sont définies que pour $t \geq 0$.

Fonction	Dom. temporel $f(t)$	Trans. de Laplace $\hat{f}(s)$
sinus	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
cosinus	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
décroissance exponentielle d'un sinus	$e^{-at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$
décroissance exponentielle d'un cosinus	$e^{-at} \cos(bt)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$
décroissance exponentielle d'une puissance n-ième	$\frac{t^n}{n!} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$

Fonctions de transfert

La TL permet de déterminer la fonction de transfert d'un système.

$$5y^{(3)}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

Fonctions de transfert

La TL permet de déterminer la fonction de transfert d'un système.

$$5y^{(3)}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$5s^3\hat{y}(s) + 2s^2\hat{y}(s) + s\hat{y}(s) + 4\hat{y}(s) = s\hat{u}(s) + 2\hat{u}(s)$$

$$\downarrow$$

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{s + 2}{5s^3 + 2s^2 + s + 4}$$

Fonctions de transfert

La TL permet de déterminer la fonction de transfert d'un système.

$$5y^{(3)}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

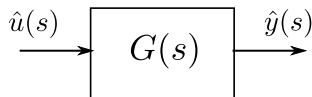
$$5s^3\hat{y}(s) + 2s^2\hat{y}(s) + s\hat{y}(s) + 4\hat{y}(s) = s\hat{u}(s) + 2\hat{u}(s)$$

$$\downarrow$$

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{s + 2}{5s^3 + 2s^2 + s + 4}$$

Nouvelle relation entre la sortie et l'entrée

$$\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$$



Fonctions de transfert

Cas général :

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

Fonctions de transfert

Cas général :

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$a_n s^n \hat{y}(s) + \dots + a_1 s \hat{y}(s) + a_0 \hat{y}(s) = b_m s^m \hat{u}(s) + \dots + b_1 s \hat{u}(s) + b_0 \hat{u}(s)$$

Fonctions de transfert

Cas général :

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$a_n s^n \hat{y}(s) + \dots + a_1 s \hat{y}(s) + a_0 \hat{y}(s) = b_m s^m \hat{u}(s) + \dots + b_1 s \hat{u}(s) + b_0 \hat{u}(s)$$

$$\downarrow$$

Fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

Fonctions de transfert

Cas général :

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$a_n s^n \hat{y}(s) + \dots + a_1 s \hat{y}(s) + a_0 \hat{y}(s) = b_m s^m \hat{u}(s) + \dots + b_1 s \hat{u}(s) + b_0 \hat{u}(s)$$

$$\downarrow$$

Fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

La fonction de transfert est définie comme le rapport entre la TL de la sortie sur la TL de l'entrée, pour des conditions initiales nulles.

Fonctions de transfert

Autre exemple :

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) - 2y(t) = 6u(t)$$

Fonctions de transfert

Autre exemple :

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) - 2y(t) = 6u(t)$$

↓ \mathcal{L}

$$s^2\hat{y}(s) + 4s\hat{y}(s) - 2\hat{y}(s) = 6\hat{u}(s)$$

↓

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{6}{s^2 + 4s - 2}$$

Définitions :

- L'**ordre** d'un système est le degré du polynôme du dénominateur (n).
- Le système est dit **strictement propre** (**propre**), si $n > m$ ($n = m$).
- Les **pôles** sont les racines du dénominateur.
- Les **zéros** sont les racines du numérateur.

Définitions :

- L'**ordre** d'un système est le degré du polynôme du dénominateur (n).
- Le système est dit **strictement propre (propre)**, si $n > m$ ($n = m$).
- Les **pôles** sont les racines du dénominateur.
- Les **zéros** sont les racines du numérateur.

Exemple : système masse-ressort

La relation entre la force et la position de la masse est décrite par l'équation

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t).$$

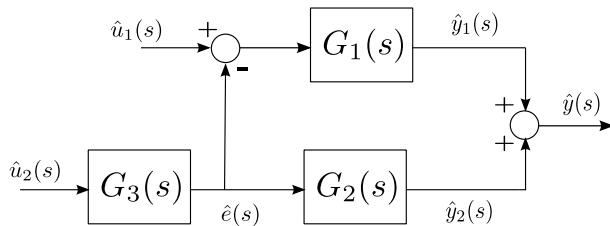
Sa fonction de transfert s'écrit

$$\frac{\hat{x}(s)}{\hat{f}(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}.$$

C'est un système : d'ordre deux ; sans zéro ; les 2 pôles sont solutions de $ms^2 + cs + k = 0$.

Schéma fonctionnel

Représentation graphique des systèmes complexes



Le formalisme des fonctions de transfert est très pratique pour ce type de représentation.

Schéma fonctionnel

Mise en série de deux systèmes

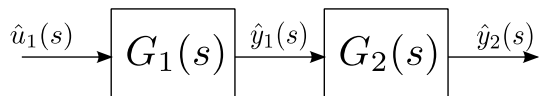
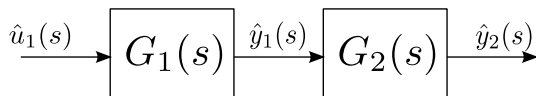


Schéma fonctionnel

Mise en série de deux systèmes



$$\begin{aligned}\hat{y}_2(s) &= G_2(s)\hat{y}_1(s) \\ &= G_2(s)G_1(s)\hat{u}_1(s)\end{aligned}$$

Transfert équivalent :

$$F(s) = G_2(s) \times G_1(s)$$

Schéma fonctionnel

Mise en parallèle de deux systèmes

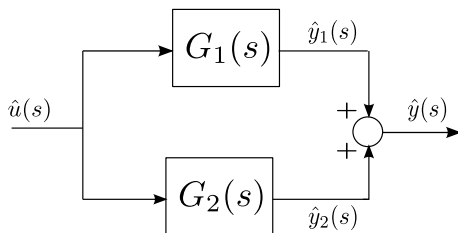
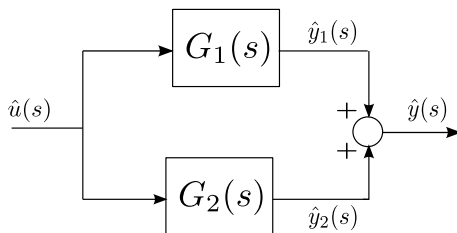


Schéma fonctionnel

Mise en parallèle de deux systèmes



$$\begin{aligned}\hat{y}(s) &= \hat{y}_1(s) + \hat{y}_2(s) \\ &= (G_1(s) + G_2(s))\hat{u}(s)\end{aligned}$$

Transfert équivalent :

$$F(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

Schéma fonctionnel

Interconnexion feedback

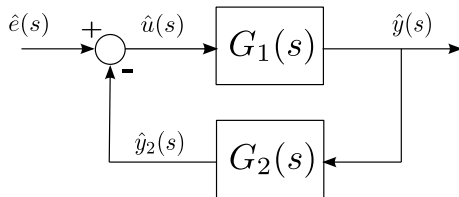
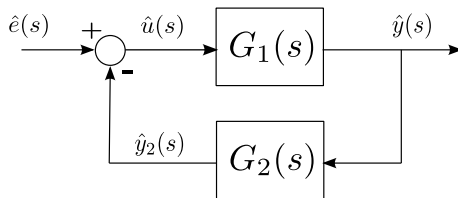


Schéma fonctionnel

Interconnexion feedback



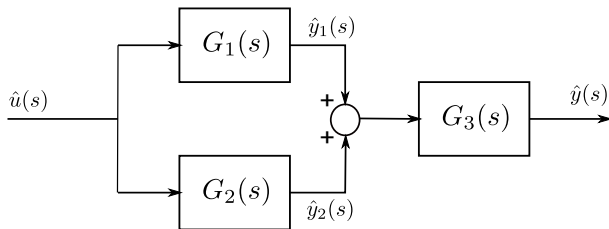
$$\hat{y}(s) = G_1(s)\hat{u}(s)$$

$$\hat{u}(s) = \hat{e}(s) - G_2(s)\hat{y}(s)$$

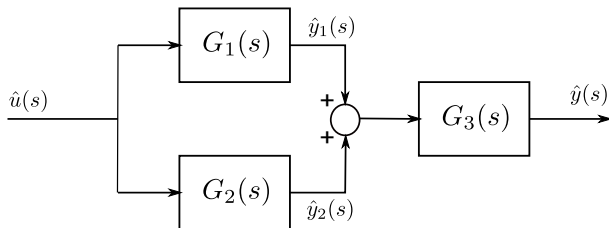
Transfert équivalent :

$$F(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

Exemple 1



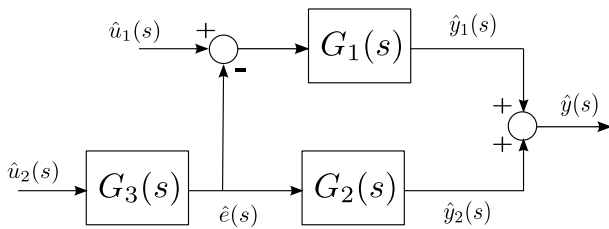
Exemple 1



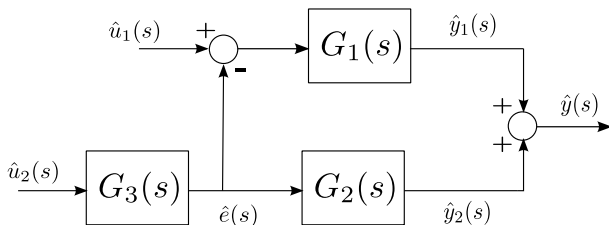
Transfert équivalent :

$$\hat{y}(s) = G_3(s) \underbrace{(G_1(s) + G_2(s))}_{F(s)} \hat{u}(s)$$

Exemple 2



Exemple 2



Transfert équivalent :

$$\hat{y}(s) = F_1(s)\hat{u}_1(s) + F_2(s)\hat{u}_2(s)$$

avec

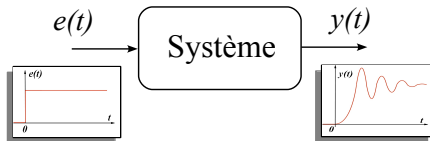
$$F_1(s) = G_1(s) \quad \text{et} \quad F_2(s) = (G_2(s) - G_1(s))G_3(s)$$

Sommaire

- 1 Modélisation
 - Exemples introductifs
 - Notion de système
 - Fonction de transfert
 - Schéma fonctionnel
- 2 Réponse d'un système
 - Réponse temporelle
 - Réponse fréquentielle
 - Résumé
- 3 L'Automatique
 - Définition
 - Applications
 - Architecture de commande
 - Notion de stabilité
 - Objectif du cours
- 4 Stabilité et performances d'un asservissement
 - Stabilité
 - Précision
 - Rapidité
 - Marges de stabilité
- 5 Synthèse de correcteurs
 - Introduction
 - Synthèse directe
 - Action proportionnelle
 - Action intégrale
 - Action dérivée
 - Combinaisons d'actions
 - Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

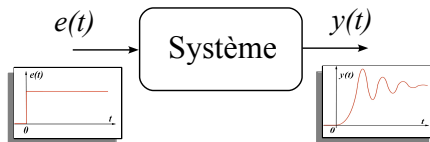
Réponse temporelle

Calcul explicite de la sortie $y(t)$ à une entrée $e(t)$ donnée.



Réponse temporelle

Calcul explicite de la sortie $y(t)$ à une entrée $e(t)$ donnée.



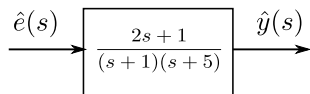
Résolution avec les fonctions de transfert :

- ❶ Exprimer la sortie $\hat{y}(s) = G(s)\hat{e}(s)$.
- ❷ Effectuer une décomposition en éléments simples de $\hat{y}(s)$.
- ❸ Appliquer la transformée de Laplace inverse (à l'aide de la table)

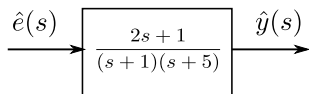
$$\hat{y}(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

pour obtenir le signal dans le domaine temporel.

Exemple : calculons la réponse à un échelon unité du système suivant



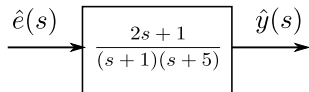
Exemple : calculons la réponse à un échelon unité du système suivant



Exprimons le signal de sortie

$$\hat{y}(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+5)} \hat{e}(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+5)} \frac{1}{s}$$

Exemple : calculons la réponse à un échelon unité du système suivant



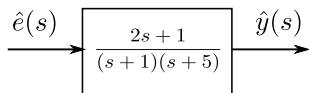
Exprimons le signal de sortie

$$\hat{y}(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+5)} \hat{e}(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+5)} \frac{1}{s}$$

La réponse se décompose en

$$\hat{y}(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+5}$$

Exemple : calculons la réponse à un échelon unité du système suivant



Exprimons le signal de sortie

$$\hat{y}(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+5)} \hat{e}(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+5)} \frac{1}{s}$$

La réponse se décompose en

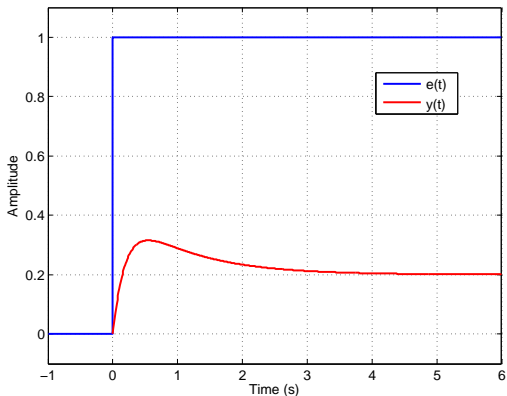
$$\hat{y}(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+5}$$

Le calcul des coefficients donne :

$$\begin{cases} A &= s\hat{y}(s)|_{s=0} = \frac{1}{5} \\ B &= (s+1)\hat{y}(s)|_{s=-1} = \frac{1}{4} \\ C &= (s+5)\hat{y}(s)|_{s=-5} = -\frac{9}{20} \end{cases}$$

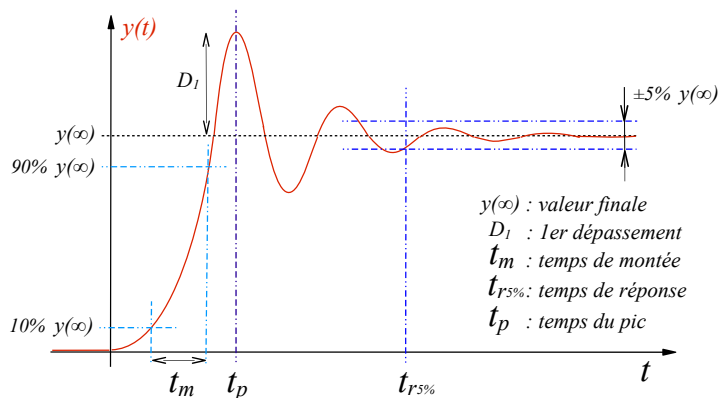
A l'aide de la table, nous obtenons la réponse temporelle

$$y(t) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{9}{20}e^{-5t}$$



Caractéristiques temporelles

Certaines caractéristiques du système sont relevés à partir de la réponse indicielle.
(\equiv réponse à un échelon)



★ Ces caractéristiques donnent des **indices de performances**.

Cas des systèmes du 1^{er} ordre

modèle canonique :

$$\hat{y}(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \hat{e}(s)$$

pour lequel on définit τ la *constante de temps* et k le *gain statique*.

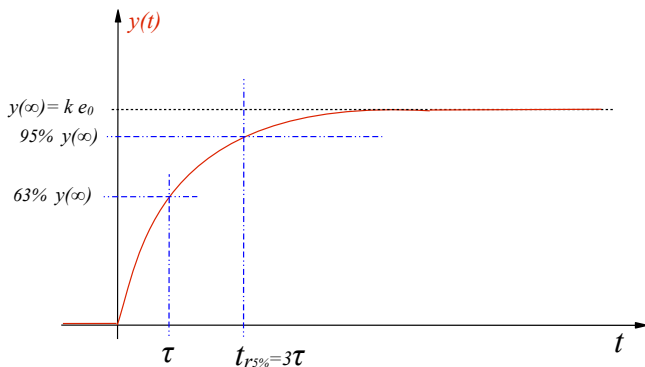
Cas des systèmes du 1^{er} ordre

modèle canonique :

$$\hat{y}(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \hat{e}(s)$$

pour lequel on définit τ la *constante de temps* et k le *gain statique*.

Réponse à un échelon d'amplitude e_0 : $y(t) = e_0 k \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$



Cas des systèmes du 2nd ordre

modèle canonique :

$$\hat{y}(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \hat{e}(s)$$

où l'on définit ζ le *coefficient d'amortissement*, ω_n la *pulsation propre* et K le *gain statique*. 3 cas pour la réponse indicielle :

Cas des systèmes du 2nd ordre

modèle canonique :

$$\hat{y}(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \hat{e}(s)$$

où l'on définit ζ le *coefficient d'amortissement*, ω_n la *pulsation propre* et K le *gain statique*. 3 cas pour la réponse indicielle :

- cas $\zeta > 1$: régime aperiodique

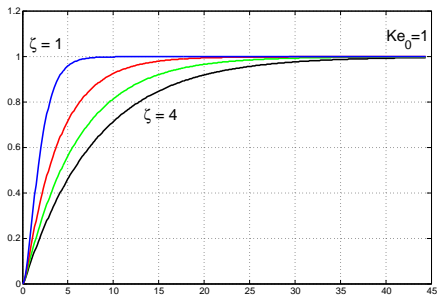
$$y(t) = Ke_0 \left[1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{-\zeta\omega_n t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{-\zeta\omega_n t} \right]$$

- cas $\zeta = 1$: régime critique

$$y(t) = Ke_0 \left[1 - (1 - p_1 t) e^{-\zeta\omega_n t} \right]$$

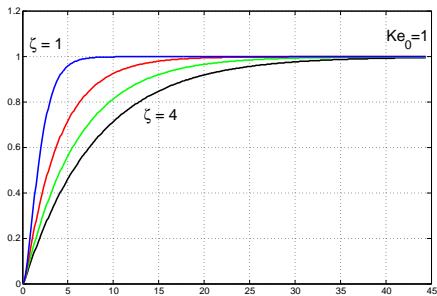
- cas $0 < \zeta < 1$: régime pseudo-périodique ($\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$)

$$y(t) = Ke_0 \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos(\omega_p t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_p t) \right) \right]$$



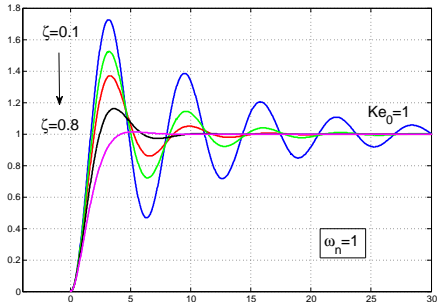
Cas $\zeta \geq 1$

- (ici : $e_0 = 1$, $K = 1$ et $\omega_n = 1$)
- pas de dépassement
- quand $\zeta \searrow$ ou $\omega_n \nearrow$, les temps de réponse et de montée \searrow



Cas $\zeta \geq 1$

- (ici : $e_0 = 1$, $K = 1$ et $\omega_n = 1$)
- pas de dépassement
- quand $\zeta \searrow$ ou $\omega_n \nearrow$, les temps de réponse et de montée \searrow



Cas $0 < \zeta < 1$

- (ici : $e_0 = 1$, $K = 1$ et $\omega_n = 1$)
- dépassement : $D_1 = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$
- dépassement à $t = \frac{\pi}{\omega_p}$
- temps de réponse : $t_{r5\%} \simeq \frac{3}{\zeta\omega_n}$

Exemple : Soit le système d'ordre 2

$$\hat{y}(s) = \frac{2}{s^2 + s + 4} \hat{u}(s)$$

Quelle est l'allure de sa réponse indicielle ?

Exemple : Soit le système d'ordre 2

$$\hat{y}(s) = \frac{2}{s^2 + s + 4} \hat{u}(s)$$

Quelle est l'allure de sa réponse indicielle ?

Identifions ses paramètres caractéristiques :

$$\omega_n = 2$$

$$K = 0.5$$

$$\zeta = 0.25$$

Exemple : Soit le système d'ordre 2

$$\hat{y}(s) = \frac{2}{s^2 + s + 4} \hat{u}(s)$$

Quelle est l'allure de sa réponse indicielle ?

Identifions ses paramètres caractéristiques :

$$\omega_n = 2$$

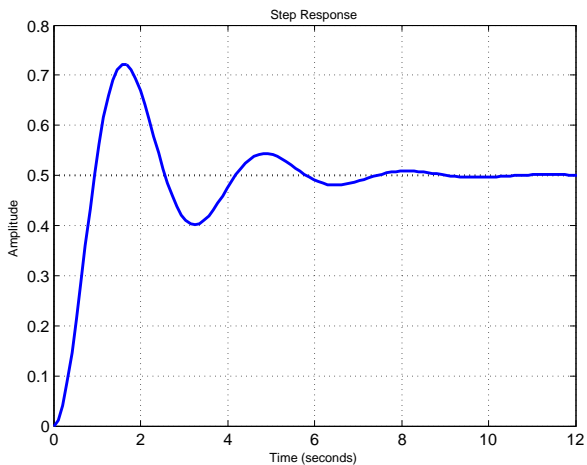
$$K = 0.5$$

$$\zeta = 0.25$$

Nous pouvons donc conclure pour la réponse

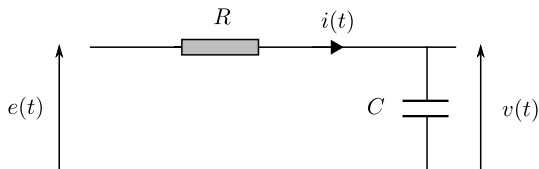
- régime pseudo-périodique,
- valeur finale $y(\infty) = 0.5$,
- premier dépassement de 44% à $t = 1.62s$,
- temps de réponse $t_{r5\%} \simeq 6s$.

Réponse indicielle :



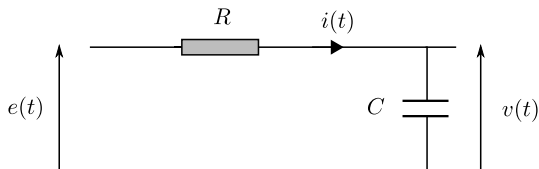
Réponse fréquentielle : exemple introductif 1

Reprenons le circuit RC



Réponse fréquentielle : exemple introductif 1

Reprenons le circuit RC

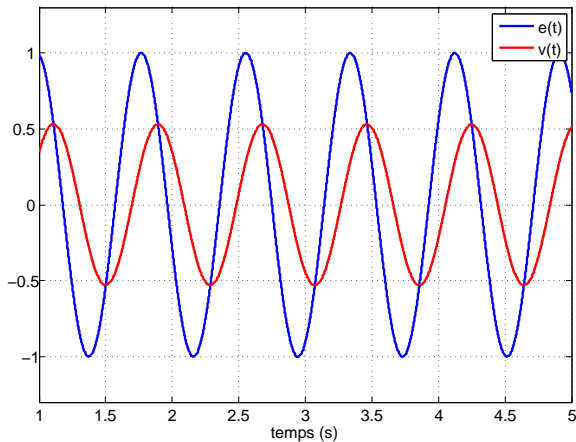


Régime sinusoïdale :

$$\begin{cases} e(t) = e_m \cos(\omega t + \phi_e) \\ v(t) = v_m \cos(\omega t + \phi_v) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \underline{e} = e_m e^{j\phi_e} \\ \underline{v} = v_m e^{j\phi_v} \end{cases}$$

Réponse fréquentielle : exemple introductif 1

Pour $R = 1k\Omega$ et $C = 200\mu F$, appliquons une tension $e(t) = \cos(8t)$.



Réponse fréquentielle : exemple introductif 1

Analysons le circuit. Loi d'Ohm : $\underline{u} = \underline{Z}i$

$$\underline{Z}_R = R \quad \text{et} \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Réponse fréquentielle : exemple introductif 1

Analysons le circuit. Loi d'Ohm : $\underline{u} = \underline{Z}i$

$$\underline{Z}_R = R \quad \text{et} \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Appliquons le pont diviseur de tension

$$\underline{v} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} \underline{e}$$

Réponse fréquentielle : exemple introductif 1

Analysons le circuit. Loi d'Ohm : $\underline{u} = \underline{Z}i$

$$\underline{Z}_R = R \quad \text{et} \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Appliquons le pont diviseur de tension

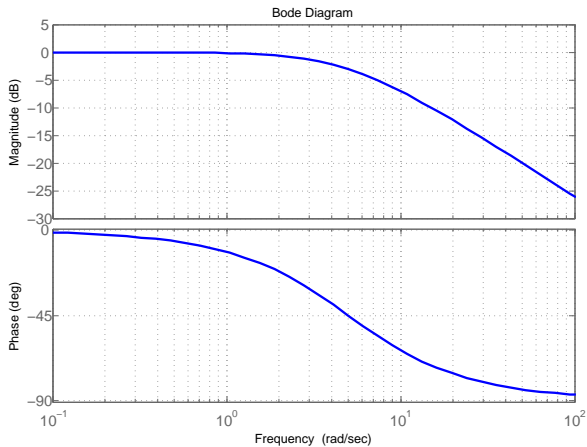
$$\underline{v} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} \underline{e}$$

La transmittance du circuit s'écrit donc :

$$\underline{T} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{j\omega RC + 1}.$$

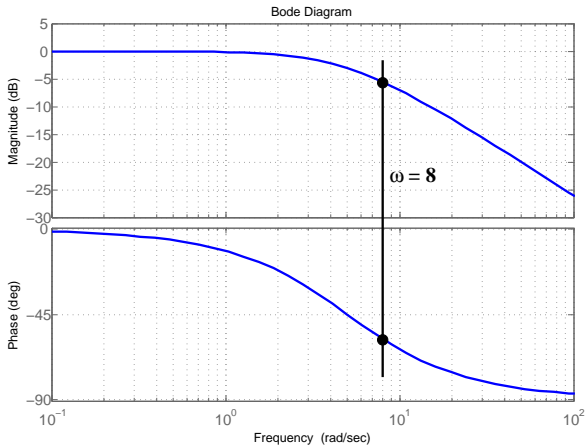
Réponse fréquentielle : exemple introductif 1

Traçons le diagramme de Bode de la transmittance

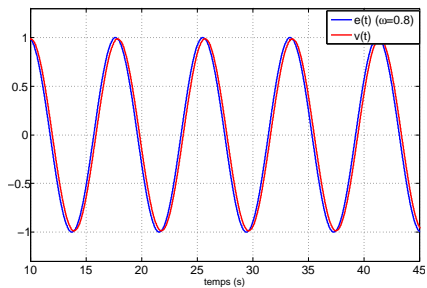


Réponse fréquentielle : exemple introductif 1

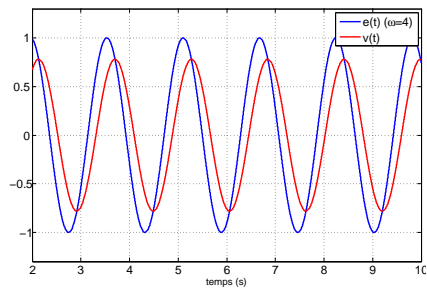
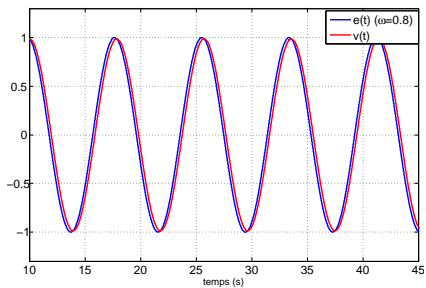
Traçons le diagramme de Bode de la transmittance



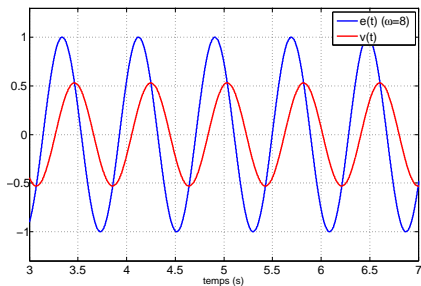
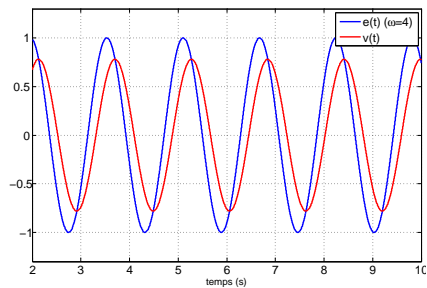
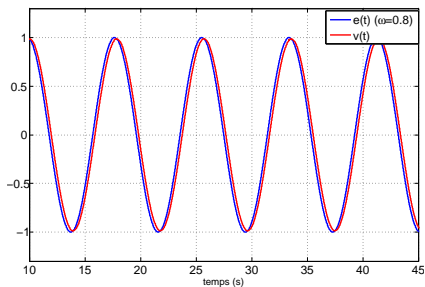
Testons les réponses du circuit pour $\omega = \{0.8, 4, 8, 40\}$



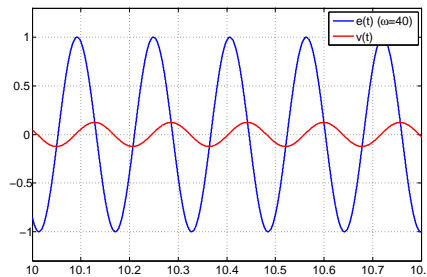
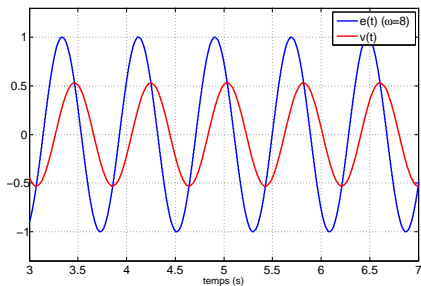
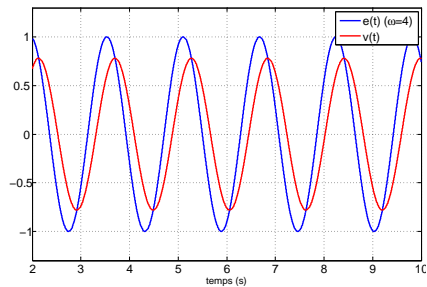
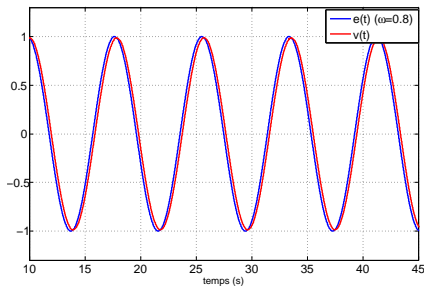
Testons les réponses du circuit pour $\omega = \{0.8, 4, 8, 40\}$

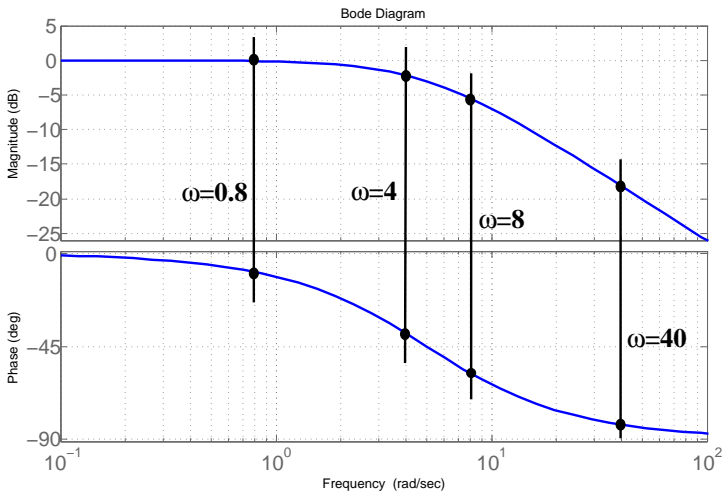


Testons les réponses du circuit pour $\omega = \{0.8, 4, 8, 40\}$



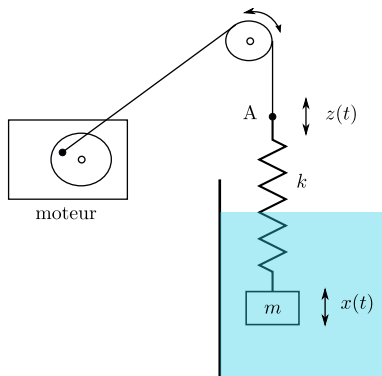
Testons les réponses du circuit pour $\omega = \{0.8, 4, 8, 40\}$



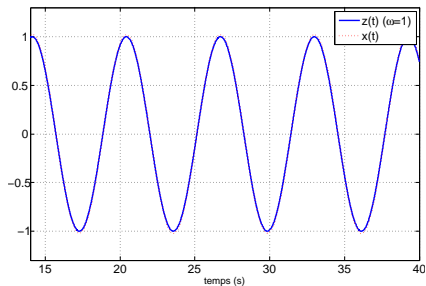


Réponse fréquentielle : exemple introductif 2

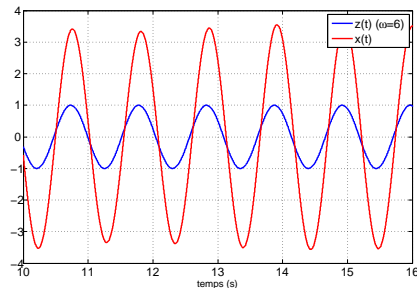
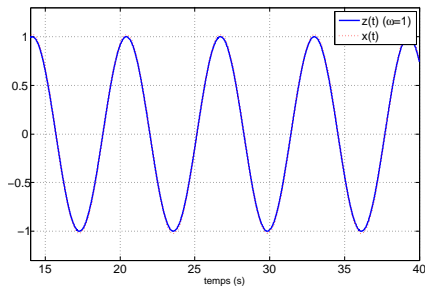
Oscillations forcées d'un pendule



Testons les réponses de la masse pour différentes oscillations du point A
 $\omega = \{1, 6, 11, 50\}$ (excitation moteur)

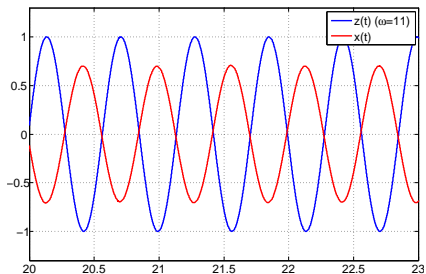
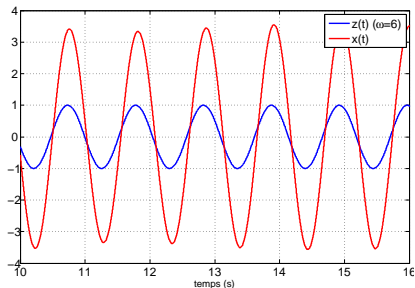
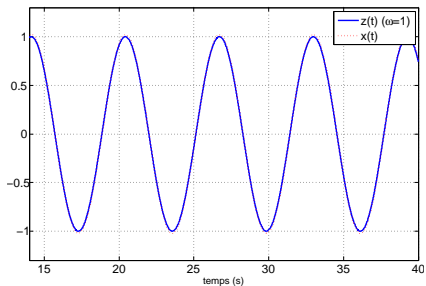


Testons les réponses de la masse pour différentes oscillations du point A
 $\omega = \{1, 6, 11, 50\}$ (excitation moteur)



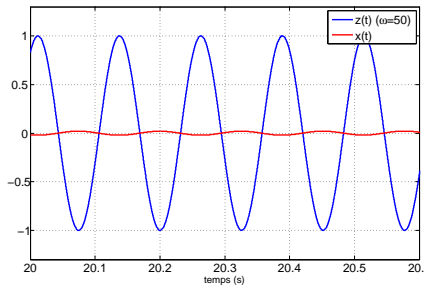
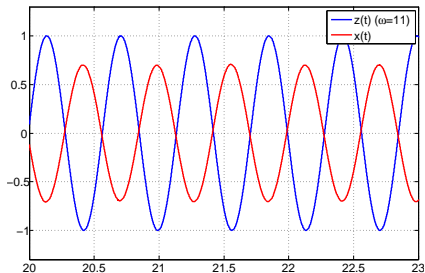
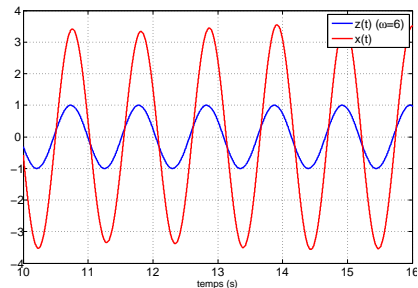
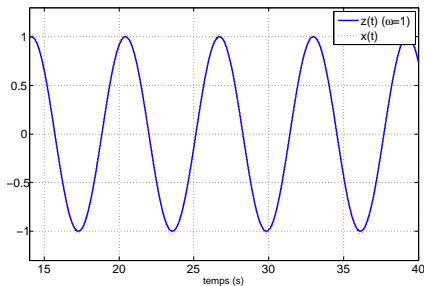
Testons les réponses de la masse pour différentes oscillations du point A

$\omega = \{1, 6, 11, 50\}$ (excitation moteur)



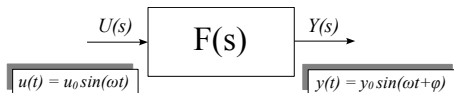
Testons les réponses de la masse pour différentes oscillations du point A

$\omega = \{1, 6, 11, 50\}$ (excitation moteur)



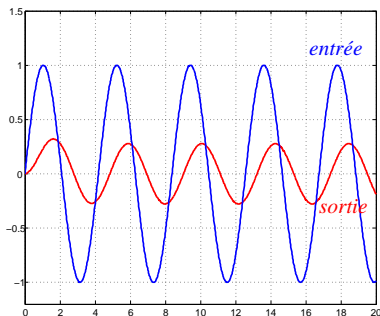
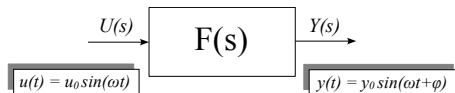
Réponse fréquentielle

L'analyse fréquentielle consiste à étudier la réponse d'un système linéaire à des entrées sinusoïdales.

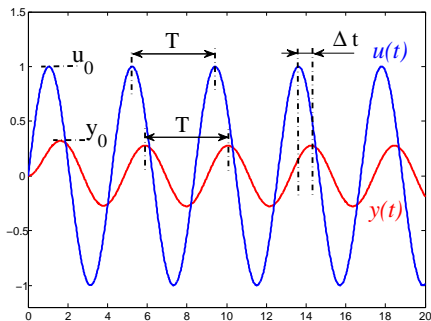


Réponse fréquentielle

L'analyse fréquentielle consiste à étudier la réponse d'un système linéaire à des entrées sinusoïdales.



Le signal de sortie est sinusoïdale, de même pulsation, d'amplitude différente et présente un déphasage.



La réponse fréquentielle est caractérisée par

- son amplification : $\frac{y_0}{u_0}$
- son déphasage : $\pm 360 \frac{\Delta t}{T}$

L'amplification et le déphasage induit par le système dépendent de la pulsation ω

Exemple : considérons le système

$$F(s) = \frac{1/2}{s + 1}$$

Observons sa réponse aux 3 entrées :

$$u_1 = \sin(0.05 t)$$

$$u_2 = \sin(1.5 t)$$

$$u_3 = \sin(10 t)$$

Exemple : considérons le système

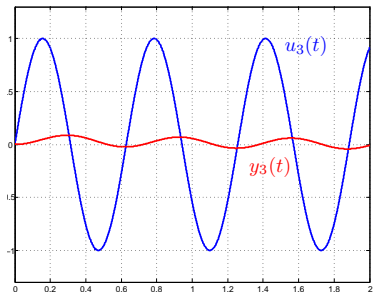
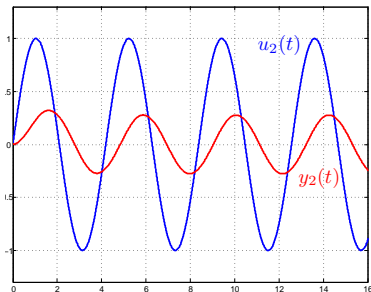
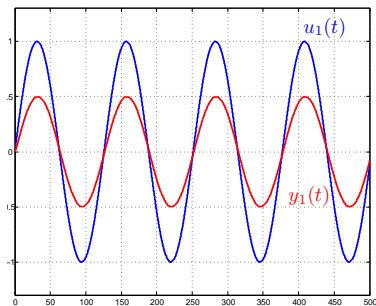
$$F(s) = \frac{1/2}{s + 1}$$

Observons sa réponse aux 3 entrées :

$$u_1 = \sin(0.05 t)$$

$$u_2 = \sin(1.5 t)$$

$$u_3 = \sin(10 t)$$



On montre que :

- l'amplification = $|F(j\omega)|$,
- le déphasage = $\arg F(j\omega)$.

$F(j\omega)$ est obtenue en remplaçant la variable de Laplace s par $j\omega$.

On montre que :

- l'amplification = $|F(j\omega)|$,
- le déphasage = $\arg F(j\omega)$.

$F(j\omega)$ est obtenue en remplaçant la variable de Laplace s par $j\omega$.

Reprenons l'exemple précédent : $F(j\omega) = \frac{1/2}{j\omega + 1}$

- pour $\omega = 0.05 \text{ rad/s}$: $|F(j0.05)| = 0.5$ et $\arg F(j0.05) = -2.86^\circ$.
- pour $\omega = 1.5 \text{ rad/s}$: $|F(j1.5)| = 0.277$ et $\arg F(j1.5) = -56.3^\circ$.
- pour $\omega = 10 \text{ rad/s}$: $|F(j10)| = 0.05$ et $\arg F(j10) = -84.3^\circ$.

$F(j\omega)$ est une fonction complexe de la pulsation ω (soit la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$).

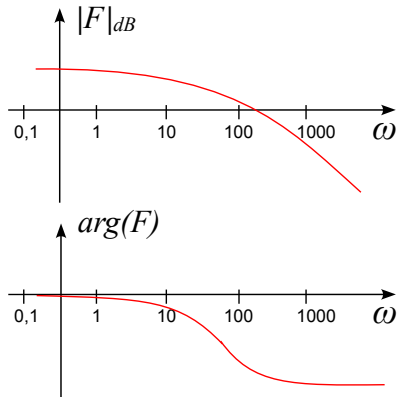
On distingue trois représentations graphiques :

- les diagrammes de Bode,
- la représentation de Nyquist,
- la représentation de Black-Nichols.

Représentation dans le diagramme de Bode

Représentation du transfert $F(j\omega)$ en fonction de ω sur deux graphes :

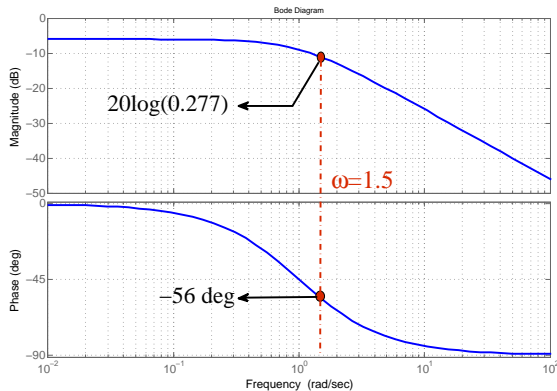
- le **diagramme de gain** qui représente le module de $F(j\omega)$ en décibel
 $\Rightarrow |F|_{dB} = 20 \log |F(j\omega)|$.
- le **diagramme de phase** qui représente l'argument de $F(j\omega)$ en degré ou radian.



Représentation dans le diagramme de Bode

Exemple : Réponse fréquentielle de $F(p) = \frac{1/2}{p + 1} \Rightarrow$ représentation de

$$F(j\omega) = \frac{1/2}{j\omega + 1}$$



Pour une sollicitation sinusoïdale de pulsation $\omega = 1.5$:

- amplification de 0.277,

Représentation dans le diagramme de Bode

Propriété : le diagramme d'une fonction donnée est obtenu à partir de la somme des tracés élémentaires.

Soit $F(p) = F_1(p) \times F_2(p) \times F_3(p)$,

- gain $\rightarrow 20\log|F(j\omega)| = 20\log|F_1(j\omega)| + 20\log|F_2(j\omega)| + 20\log|F_3(j\omega)|$,
- phase $\rightarrow \arg(F(j\omega)) = \arg(F_1(j\omega)) + \arg(F_2(j\omega)) + \arg(F_3(j\omega))$.

Représentation dans le diagramme de Bode

Propriété : le diagramme d'une fonction donnée est obtenu à partir de la somme des tracés élémentaires.

Soit $F(p) = F_1(p) \times F_2(p) \times F_3(p)$,

- gain $\rightarrow 20\log|F(j\omega)| = 20\log|F_1(j\omega)| + 20\log|F_2(j\omega)| + 20\log|F_3(j\omega)|$,
- phase $\rightarrow \arg(F(j\omega)) = \arg(F_1(j\omega)) + \arg(F_2(j\omega)) + \arg(F_3(j\omega))$.

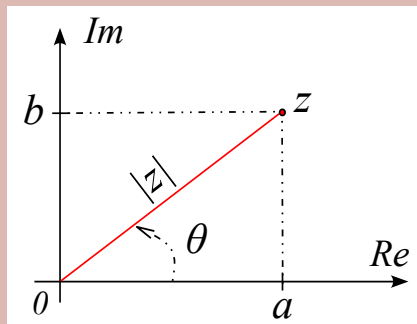
Méthodes :

- tracé asymptotique, analyse du transfert lorsque $\omega \rightarrow 0$ et $+\infty$ ainsi qu'en quelques points particuliers,
- tracé complet, à l'aide de logiciel de calcul numérique tel que MATLAB[®],
- tracé expérimental, solliciter le procédé avec des entrées sinusoïdales de différentes pulsation ω . Mesurer en sortie l'amplification/atténuation et le déphasage du signal à l'oscilloscope.

Tracés élémentaires

Rappel

Soit un nombre complexe $z = a + jb$.



- $z = |z|e^{j\theta}$

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$

Tracés élémentaires

Terme constant : $F(p) = k, (k > 0)$

Fonction de transfert complexe : $F(j\omega) = k$

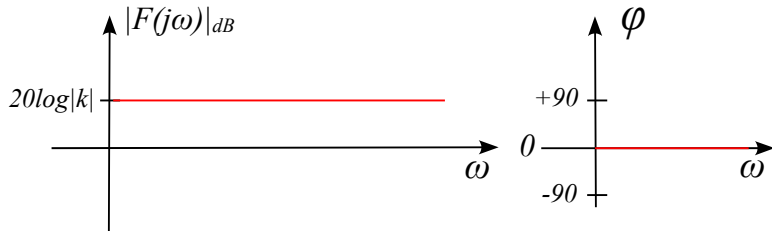
$$\begin{cases} |F(j\omega)|_{db} = 20\log(k) \\ \phi = 0 \end{cases}$$

Tracés élémentaires

Terme constant : $F(p) = k, (k > 0)$

Fonction de transfert complexe : $F(j\omega) = k$

$$\begin{cases} |F(j\omega)|_{dB} = 20\log(k) \\ \phi = 0 \end{cases}$$



Tracés élémentaires

Dérivateur : $F(p) = p$

Fonction de transfert complexe : $F(j\omega) = j\omega$

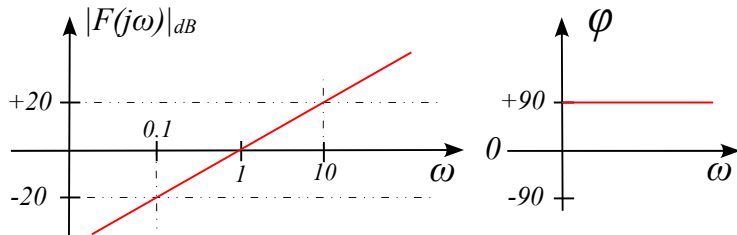
$$\left\{ \begin{array}{l} |F(j\omega)|_{db} = 20\log(\omega) \\ \phi = +90^\circ \end{array} \right.$$

Tracés élémentaires

Dérivateur : $F(p) = p$

Fonction de transfert complexe : $F(j\omega) = j\omega$

$$\begin{cases} |F(j\omega)|_{dB} = 20\log(\omega) \\ \phi = +90^\circ \end{cases}$$



Tracés élémentaires

Intégrateur : $F(p) = \frac{1}{p}$

Fonction de transfert complexe : $F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

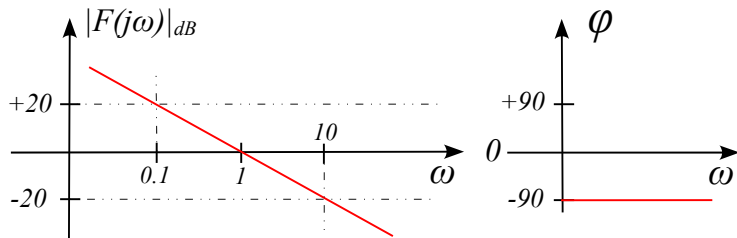
$$\left\{ \begin{array}{l} |F(j\omega)|_{db} = -20\log(\omega) \\ \phi = \arg(-j\frac{1}{\omega}) = -90^\circ \end{array} \right.$$

Tracés élémentaires

Intégrateur : $F(p) = \frac{1}{p}$

Fonction de transfert complexe : $F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

$$\begin{cases} |F(j\omega)|_{db} = -20\log(\omega) \\ \phi = \arg(-j\frac{1}{\omega}) = -90^\circ \end{cases}$$



Fonction du premier ordre

$$F(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$$

Fonction de transfert complexe : $F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$

- Module :

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{|1 + j\tau\omega|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}$$

- Argument :

$$\arg(F(j\omega)) = \arg\left(\frac{1}{1 + j\tau\omega}\right) = \arg(1) - \arg(1 + j\tau\omega) = -\arctan\frac{\tau\omega}{1}$$

$$\begin{cases} |F(j\omega)|_{db} &= -20\log(\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}) \\ \phi &= -\arctan(\tau\omega) \end{cases}$$

Fonction du premier ordre

Courbe de gain :

- $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ $|F|_{db} \rightarrow -20\log(1) = 0$
- $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ $|F|_{db} \rightarrow -20\log(\tau\omega)$
(pente à $-20dB/dec$)
- $\omega = \frac{1}{\tau}$ $|F|_{db} = -20\log(\sqrt{2}) \simeq -3dB$

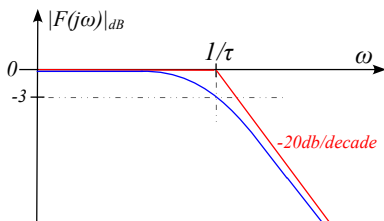
Courbe de phase :

- $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ $\phi \rightarrow 0$
- $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ $\phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$
- $\omega = \frac{1}{\tau}$ $\phi = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$

Fonction du premier ordre

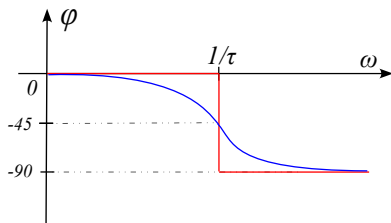
Courbe de gain :

- $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ $|F|_{dB} \rightarrow -20\log(1) = 0$
- $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ $|F|_{dB} \rightarrow -20\log(\tau\omega)$
(pente à -20dB/dec)
- $\omega = \frac{1}{\tau}$ $|F|_{dB} = -20\log(\sqrt{2}) \simeq -3\text{dB}$



Courbe de phase :

- $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ $\phi \rightarrow 0$
- $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ $\phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$
- $\omega = \frac{1}{\tau}$ $\phi = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$



Fonction du second ordre

$$F(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$$

Fonction de transfert complexe :
$$F(j\omega) = \frac{1}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}) + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} j}$$

- Module :

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\left| (1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}) + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} j \right|} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (2\zeta \frac{\omega}{\omega_n})^2}}$$

- Argument :

$$\arg(F(j\omega)) = -\arg\left((1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}) + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} j \right) = -\arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$\begin{cases} |F(j\omega)|_{db} &= -20 \log \sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (2\zeta \frac{\omega}{\omega_n})^2} \\ \phi &= -\arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \end{cases}$$

Fonction du second ordre

Courbe de gain :

- $\omega \ll \omega_n$ $|F|_{db} \rightarrow -20\log(1) = 0$
- $\omega \gg \omega_n$ $|F|_{db} \rightarrow -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$
(pente à $-40dB/dec$)
- $\omega = \omega_n$ $|F|_{db} = -20\log(2\zeta)$

Courbe de phase :

- $\omega \ll \omega_n$ $\phi \rightarrow 0$
- $\omega \gg \omega_n$ $\phi \rightarrow -\arctan \frac{2\zeta\omega_n}{-\omega} = -\pi$
- $\omega = \omega_n$ $\phi \rightarrow -\arctan \frac{2\zeta}{0} = -\frac{\pi}{2}$

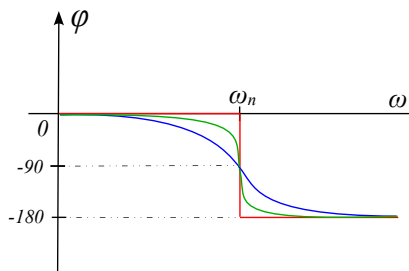
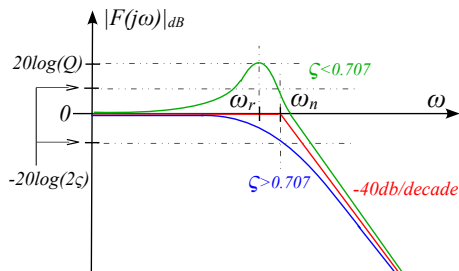
Fonction du second ordre

Courbe de gain :

- $\omega \ll \omega_n$ $|F|_{db} \rightarrow -20\log(1) = 0$
- $\omega \gg \omega_n$ $|F|_{db} \rightarrow -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$
(pente à -40dB/dec)
- $\omega = \omega_n$ $|F|_{db} = -20\log(2\zeta)$

Courbe de phase :

- $\omega \ll \omega_n$ $\phi \rightarrow 0$
- $\omega \gg \omega_n$ $\phi \rightarrow -\arctan \frac{2\zeta\omega_n}{-\omega} = -\pi$
- $\omega = \omega_n$ $\phi \rightarrow -\arctan \frac{2\zeta}{0} = -\frac{\pi}{2}$



- Résonance si $\zeta < 0.707$: $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

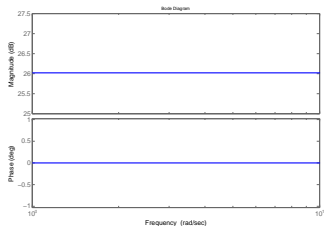
et

$$Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

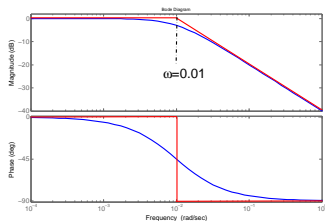
Exemple

Diagramme de Bode de la fonction de transfert $F(p) = \frac{20(10p+1)}{(100p+1)(p+1)}$

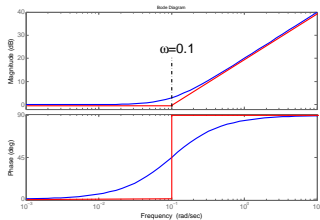
Fonction de transfert : 20



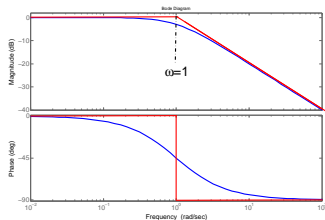
Fonction de transfert : $\frac{1}{100p+1}$



Fonction de transfert : $10p + 1$



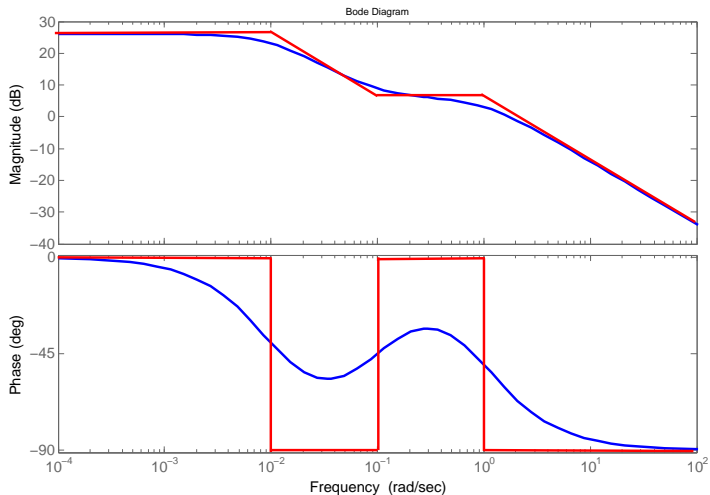
Fonction de transfert : $\frac{1}{p+1}$



Exemple

Diagramme de Bode de la fonction de transfert $F(p) = \frac{20(10p+1)}{(100p+1)(p+1)}$

Somme des tracés

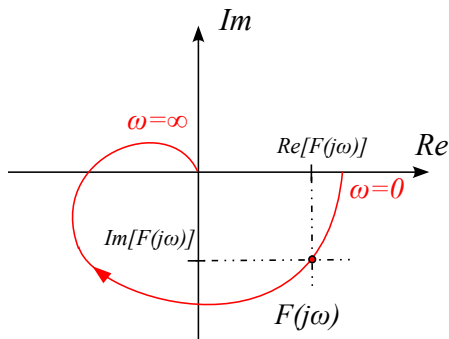


Représentation de Nyquist

Représentation graphique du transfert $F(j\omega)$ dans le plan complexe.

$$F(j\omega) = \operatorname{Re}[F(j\omega)] + j \operatorname{Im}[F(j\omega)]$$

La courbe est paramétrée par la pulsation ω et doit être orientée suivant le sens des ω croissants.

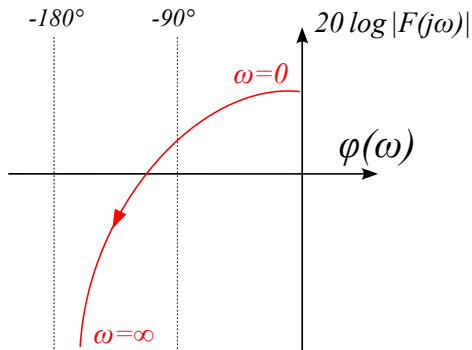


Représentation de Black-Nichols

Représentation graphique du gain par rapport au déphasage.

- En abscisses, le déphasage en degré : $\arg [F(j\omega)]$
- En ordonnées, le gain en dB : $20 \log |F(j\omega)|$

La courbe est paramétrée par la pulsation ω et doit être orientée suivant le sens des ω croissants.



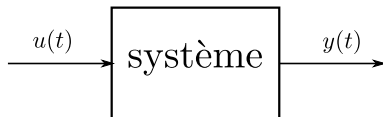
Résumé

Sommaire

- 1 Modélisation
 - Exemples introductifs
 - Notion de système
 - Fonction de transfert
 - Schéma fonctionnel
- 2 Réponse d'un système
 - Réponse temporelle
 - Réponse fréquentielle
 - Résumé
- 3 L'Automatique
 - Définition
 - Applications
 - Architecture de commande
 - Notion de stabilité
 - Objectif du cours
- 4 Stabilité et performances d'un asservissement
 - Stabilité
 - Précision
 - Rapidité
 - Marges de stabilité
- 5 Synthèse de correcteurs
 - Introduction
 - Synthèse directe
 - Action proportionnelle
 - Action intégrale
 - Action dérivée
 - Combinaisons d'actions
 - Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

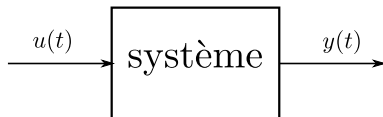
L'Automatique ou la Théorie de la Commande

Discipline traitant de la modélisation, l'analyse et la commande des systèmes dynamiques. Elle a pour objectif l'étude et la conception de dispositifs fonctionnant sans intervention humaine.



L'Automatique ou la Théorie de la Commande

Discipline traitant de la modélisation, l'analyse et la commande des systèmes dynamiques. Elle a pour objectif l'étude et la conception de dispositifs fonctionnant sans intervention humaine.



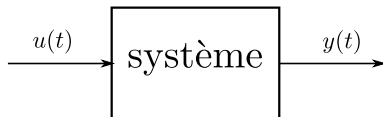
Après les phases :

- de modélisation,
- d'analyse (étude du comportementale : temporelle et fréquentielle),

la question que se pose l'automaticien :

L'Automatique ou la Théorie de la Commande

Discipline traitant de la modélisation, l'analyse et la commande des systèmes dynamiques. Elle a pour objectif l'étude et la conception de dispositifs fonctionnant sans intervention humaine.



Après les phases :

- de modélisation,
- d'analyse (étude du comportementale : temporelle et fréquentielle),

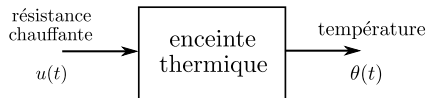
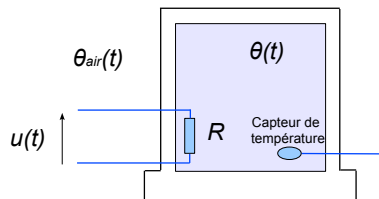
la question que se pose l'automaticien :

comment agir sur le signal d'entrée $u(t)$ pour contrôler le signal de sortie $y(t)$?

Application thermodynamique

Régulation de température

- **Entrée** : alimentation résistance $u(t)$.
- **Sortie** : température de l'enceinte $\theta(t)$.
- **Perturbations** : échange calorifique avec le milieu ambiant $\theta_{air}(t)$, introduction d'objets.



Application spatiale

Système de contrôle d'attitude et d'orbite

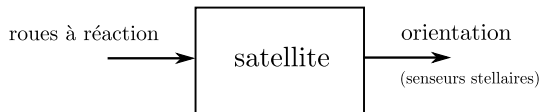
Contrôle de l'orientation d'un satellite pour le pointage.



Application spatiale

Système de contrôle d'attitude et d'orbite

Contrôle de l'orientation d'un satellite pour le pointage.



Application robotique

Asservissement en vitesse et en position d'un robot mobile

Commande des moteurs pour le suivi de trajectoire.

Base mobile iRobot®

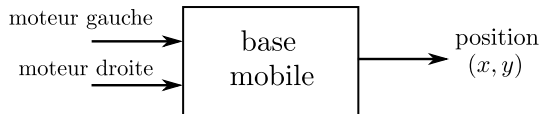
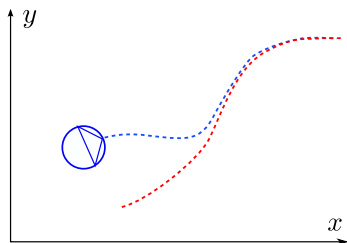


Application robotique

Asservissement en vitesse et en position d'un robot mobile

Commande des moteurs pour le suivi de trajectoire.

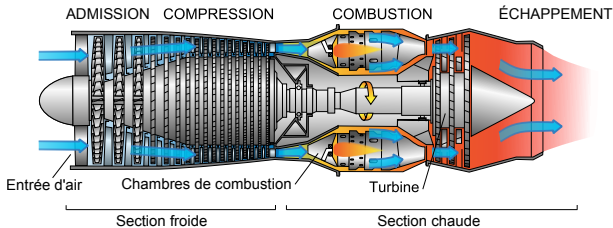
Base mobile iRobot®



Application thermodynamique

Pilotage d'un turboréacteur

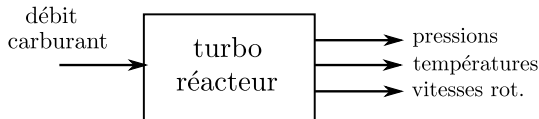
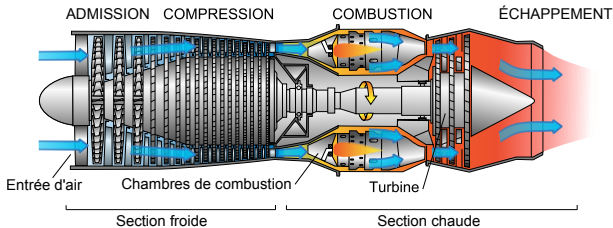
Commande de l'injection de carburant pour le contrôle de la poussée, la pression, la température...



Application thermodynamique

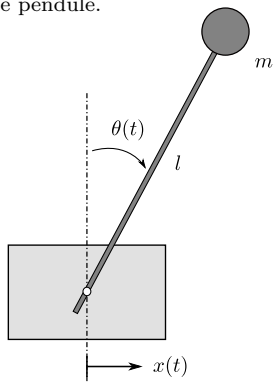
Pilotage d'un turboréacteur

Commande de l'injection de carburant pour le contrôle de la poussée, la pression, la température...

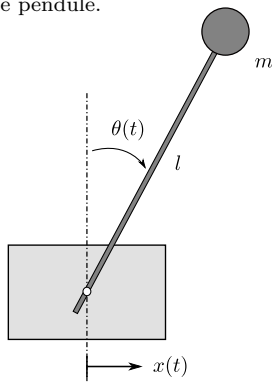


Exemple académique : le pendule.

Exemple académique : le pendule.



Exemple académique : le pendule.

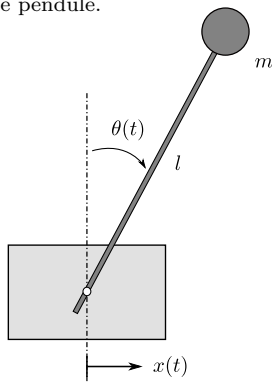


L'angle d'inclinaison est régi par l'équation :

(modèle simpliste)

$$l\ddot{\theta} - \ddot{x} \cos \theta = g \sin \theta$$

Exemple académique : le pendule.

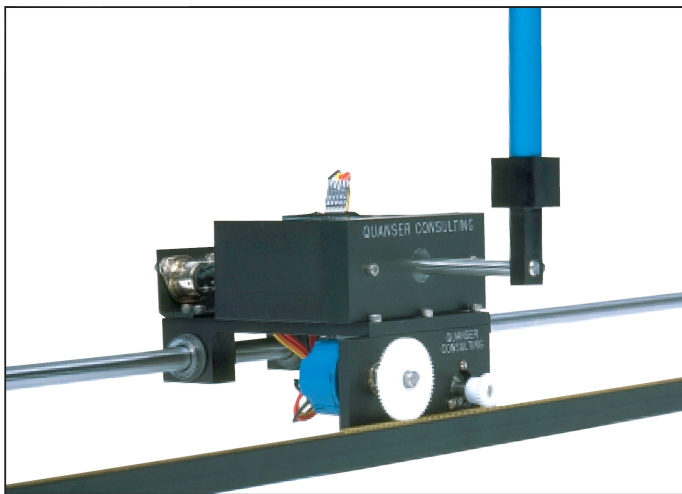


L'angle d'inclinaison est régi par l'équation :

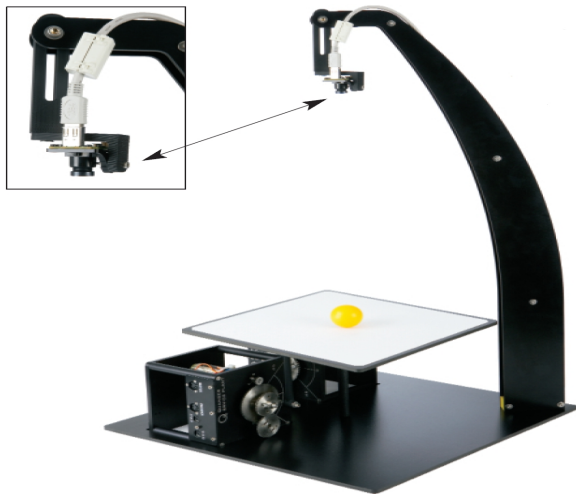
(modèle simpliste)

$$l\ddot{\theta} - \ddot{x} \cos \theta = g \sin \theta$$

★ Objectif : stabiliser la position verticale haute.



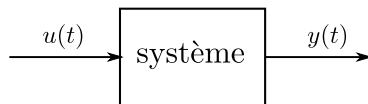
© Quanser



© Quanser

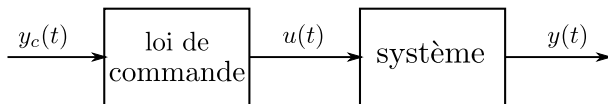
Architecture de commande

Comment agir sur $u(t)$ pour contrôler $y(t)$?



Architecture de commande

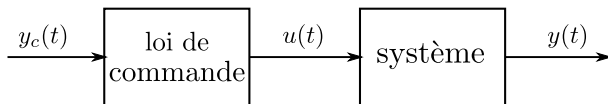
Comment agir sur $u(t)$ pour contrôler $y(t)$?



1^{ière} approche naturelle : commande en **boucle ouverte**

Architecture de commande

Comment agir sur $u(t)$ pour contrôler $y(t)$?



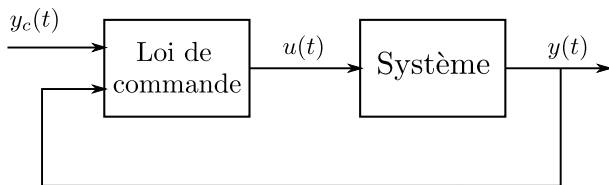
1^{ière} approche naturelle : commande en **boucle ouverte**

- $y_c(t)$ est la consigne pour $y(t)$,
- nécessite une parfaite connaissance du modèle,
- le système et son environnement doivent être prévisibles,
- ne permet pas de compenser des perturbations non-connues,
- la loi de commande est indépendante de l'évolution du système.

Architecture de commande

Principe fondamental en Automatique : la commande en **boucle fermée**

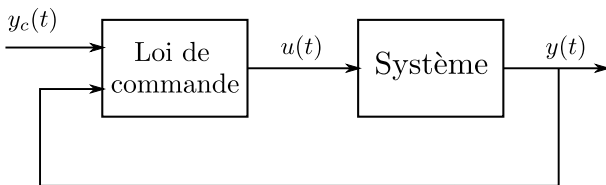
⇒ principe de contre-réaction



Architecture de commande

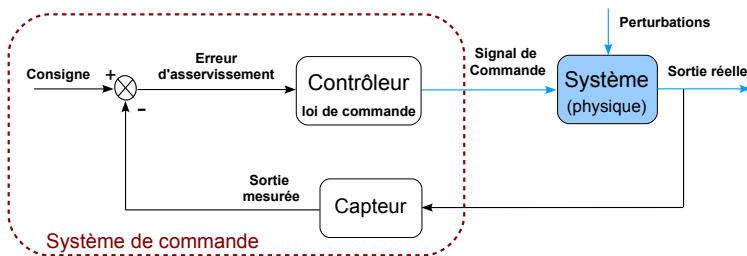
Principe fondamental en Automatique : la commande en **boucle fermée**

⇒ principe de contre-réaction



- $y_c(t)$ est la consigne pour $y(t)$,
- la sortie du système est mesurée,
- nécessite la mise en place d'un capteur,
- la loi de commande réagit à l'évolution du système,
- principe d'**asservissement** du système.

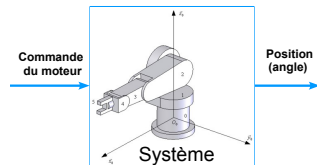
Structure classique d'un asservissement



- En bleu : le système physique / dispositif / procédé à commander.
- Cadre rouge : système de commande, réalisé par l'ingénieur.
- Le système de commande est mis en oeuvre par une carte électronique.
- Attention à différencier le système de commande et le système commandé.

Structure classique d'un asservissement

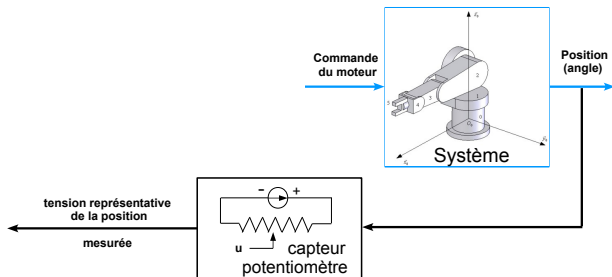
Exemple.



- Soit un système à commander : un bras manipulateur.

Structure classique d'un asservissement

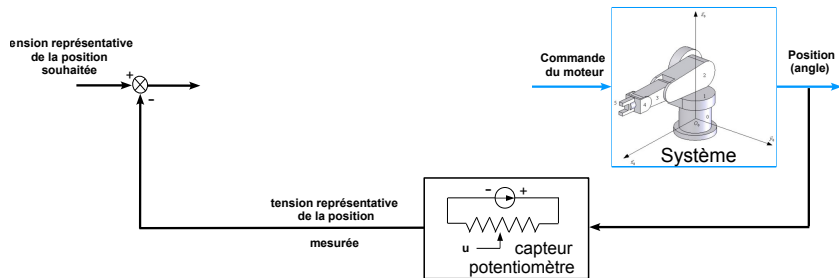
Exemple.



- Soit un système à commander : un bras manipulateur.
- Un capteur permet de mesurer la position du bras.

Structure classique d'un asservissement

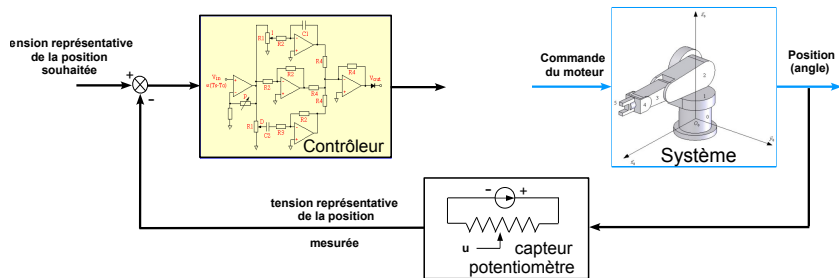
Exemple.



- Soit un système à commander : un bras manipulateur.
- Un capteur permet de mesurer la position du bras.
- La position mesurée est comparée à une position de référence.

Structure classique d'un asservissement

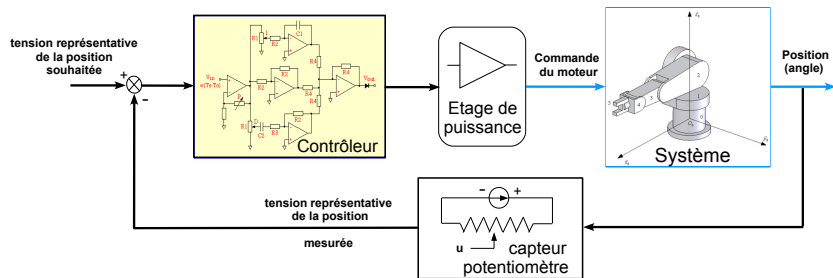
Exemple.



- Soit un système à commander : un bras manipulateur.
- Un capteur permet de mesurer la position du bras.
- La position mesurée est comparée à une position de référence.
- Un contrôleur génère la commande pour corriger l'erreur d'asservissement.

Structure classique d'un asservissement

Exemple.



- Soit un système à commander : un bras manipulateur.
- Un capteur permet de mesurer la position du bras.
- La position mesurée est comparée à une position de référence.
- Un contrôleur génère la commande pour corriger l'erreur d'asservissement.
- L'étage de puissance permet d'adapter le signal de commande à la puissance de fonctionnement du moteur.

Notion de stabilité

Considérons le système de fonction de transfert

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{1}{s + a}.$$

Sa réponse temporelle à un échelon unité est

$$y(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}).$$

Notion de stabilité

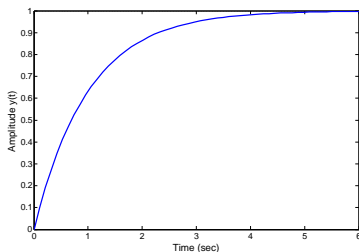
Considérons le système de fonction de transfert

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{1}{s + a}.$$

Sa réponse temporelle à un échelon unité est

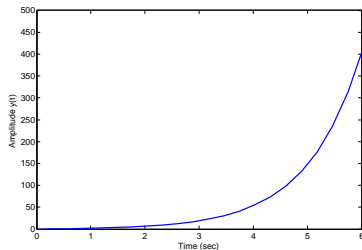
$$y(t) = \frac{1}{a} \left(1 - e^{-at} \right).$$

cas $a > 0$



le terme e^{-at} tend vers 0

cas $a < 0$



le terme e^{-at} tend vers $+\infty$

⇒ Propriété de **stabilité**

Autre exemple, considérons le système de fonction de transfert

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{1}{s^2 + as + 1}, \quad |a| < 2.$$

Sa réponse temporelle à un échelon unité est

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{a}{2}t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{a/2}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right), \quad \omega_0 = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}.$$

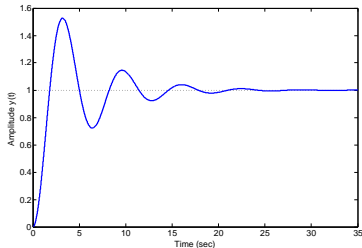
Autre exemple, considérons le système de fonction de transfert

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{1}{s^2 + as + 1}, \quad |a| < 2.$$

Sa réponse temporelle à un échelon unité est

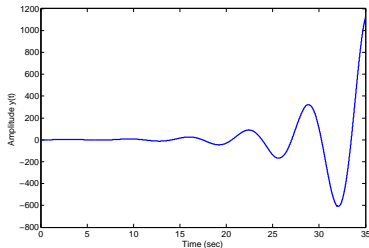
$$y(t) = 1 - e^{-\frac{a}{2}t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{a/2}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right), \quad \omega_0 = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}.$$

cas $0 < a < 2$



le terme $e^{-\frac{a}{2}t}$ tend vers 0

cas $-2 < a < 0$



le terme $e^{-\frac{a}{2}t}$ tend vers $+\infty$

⇒ Propriété de **stabilité**

Définition

Un système est dit **stable** si pour toute entrée bornée la sortie est bornée.

Théorème

Un système de fonction de transfert $F(s)$ est **stable** si et seulement si tous les pôles de $F(s)$ sont à partie réelle négative, c'est-à-dire qu'ils appartiennent au demi-plan gauche du plan complexe.

Définition

Un système est dit **stable** si pour toute entrée bornée la sortie est bornée.

Théorème

Un système de fonction de transfert $F(s)$ est **stable** si et seulement si tous les pôles de $F(s)$ sont à partie réelle négative, c'est-à-dire qu'ils appartiennent au demi-plan gauche du plan complexe.

Exemples

$$\frac{1}{s - 2}$$

$$\frac{4}{s + 0.5}$$

$$\frac{3}{(s + 1)(s + 3)}$$

$$\frac{1}{s(5s + 1)}$$

$$\frac{10}{s^2 + 2s + 2}$$

$$\frac{2s - 1}{(s + 1)(s + 2)(s - 6)}$$

Définition

Un système est dit **stable** si pour toute entrée bornée la sortie est bornée.

Théorème

Un système de fonction de transfert $F(s)$ est **stable** si et seulement si tous les pôles de $F(s)$ sont à partie réelle négative, c'est-à-dire qu'ils appartiennent au demi-plan gauche du plan complexe.

Exemples

$$\frac{1}{s-2}$$

⇒ Instable

$$\frac{4}{s+0.5}$$

⇒ Stable

$$\frac{3}{(s+1)(s+3)}$$

⇒ Stable

$$\frac{1}{s(5s+1)}$$

⇒ Instable

$$\frac{10}{s^2+2s+2}$$

⇒ Stable

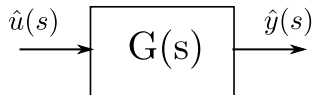
$$\frac{2s-1}{(s+1)(s+2)(s-6)}$$

⇒ Instable

Analyse de la stabilité entrée-sortie

Comment analyser la stabilité d'un système d'entrée $\hat{u}(s)$ et de sortie $\hat{y}(s)$?

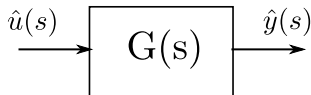
$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$



Analyse de la stabilité entrée-sortie

Comment analyser la stabilité d'un système d'entrée $\hat{u}(s)$ et de sortie $\hat{y}(s)$?

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$



Méthodes :

- Calcul direct des pôles \Rightarrow trouver les racines de l'équation caractéristique

$$a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0.$$

Si elles sont toutes à partie réelle négative alors le système est stable.

- Critère algébrique de Routh.

Critère de Routh

Construction d'un tableau à partir des coefficients du polynôme caractéristique

$$D(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$$

Critère de Routh

Construction d'un tableau à partir des coefficients du polynôme caractéristique

$$D(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$$

Procédure :

- ➊ Condition nécessaire : tous les coeff. a_i doivent être strictement de même signe.

Critère de Routh

Construction d'un tableau à partir des coefficients du polynôme caractéristique

$$D(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$$

Procédure :

- ① Condition nécessaire : tous les coeff. a_i doivent être strictement de même signe.
- ② Construction du tableau

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
p^{n-2}	b_1	b_2	b_3	\dots
p^{n-3}	c_1	c_2	\dots	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
p^0	α			

Critère de Routh

Construction d'un tableau à partir des coefficients du polynôme caractéristique

$$D(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$$

Procédure :

- ① Condition nécessaire : tous les coeff. a_i doivent être strictement de même signe.
- ② Construction du tableau

$$\begin{array}{c|cccc}
 p^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
 p^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\
 p^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\
 p^{n-3} & c_1 & c_2 & \dots & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 p^0 & \alpha & & &
 \end{array}$$

avec

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \quad b_3 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

Critère de Routh

Construction d'un tableau à partir des coefficients du polynôme caractéristique

$$D(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$$

Procédure :

- ① Condition nécessaire : tous les coeff. a_i doivent être strictement de même signe.
- ② Construction du tableau

$$\begin{array}{c|cccc}
 p^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
 p^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\
 p^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\
 p^{n-3} & c_1 & c_2 & \dots & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 p^0 & \alpha & & &
 \end{array}$$

avec

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \quad b_3 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

- ③ Le système est stable ssi tous les coefficients de la 1^{ère} colonne sont de même signe.

Exemple 1 :

Soit la fonction de transfert $F(s) = \frac{s + 4}{s^4 + s^3 + 4s^2 + 2s + 1}$, stable ?

Exemple 2 :

Soit la fonction de transfert $F(s) = \frac{7}{3s^3 + s^2 + 2s + 4}$, stable ?

Exemple 1 :

Soit la fonction de transfert $F(s) = \frac{s + 4}{s^4 + s^3 + 4s^2 + 2s + 1}$, stable ?

s^4	1	4	1	0	$b_1 = -\frac{1}{1}(2 - 4) = 2$
s^3	1	2	0	0	$b_2 = -\frac{1}{1}(0 - 1) = 1$
s^2	2	1	0		$c_1 = -\frac{1}{2}(1 - 4) = \frac{3}{2}$
s^1	$\frac{3}{2}$	0			$c_2 = 0$
s^0	1				$\alpha = -\frac{2}{3}(0 - \frac{3}{2}) = 1$

⇒ Système stable.

Exemple 2 :

Soit la fonction de transfert $F(s) = \frac{7}{3s^3 + s^2 + 2s + 4}$, stable ?

s^3	3	2	0		
s^2	1	4	0		$b_1 = -\frac{1}{1}(12 - 2) = -10$
s^1	-10	0			
s^0	4				$\alpha = -\frac{1}{-10}(0 + 40) = 4$

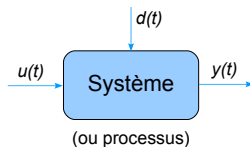
⇒ Système instable.

Cadre de travail

Ce cours est dédié aux *systèmes continus linéaires invariants*.

Il s'agit d'une classe de modèles particulière liant l'entrée $u(t)$ et la sortie $y(t)$.

Très utilisée car bien connue.

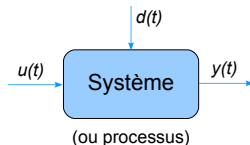


Cadre de travail

Ce cours est dédié aux *systèmes continus linéaires invariants*.

Il s'agit d'une classe de modèles particulière liant l'entrée $u(t)$ et la sortie $y(t)$.

Très utilisée car bien connue.



- **Continuité** : les signaux évoluent continument (ou presque) avec le temps,

$$x(t) \in \mathbb{R} \text{ avec } t \in \mathbb{R}_+.$$

- **Linéarité** : le système vérifie les principes de superposition et d'homogénéité :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = u_1(t) + u_2(t) \xrightarrow{\text{Système}} y(t) = y_1(t) + y_2(t), \\ \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha u(t) \xrightarrow{\text{Système}} \alpha y(t). \end{array} \right.$$

- **Invariance** : le système est invariant lorsque

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad u(t) \xrightarrow{\text{Système}} y(t) \Rightarrow u(t - \tau) \xrightarrow{\text{Système}} y(t - \tau).$$

Quelques remarques :

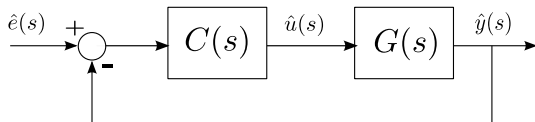
- Attention à ne pas confondre avec l'Automatisme ou l'informatique industrielle.
- Composante Mathématiques appliquées importante.
- Pluridisciplinaire par ses applications.
- L'Automatique est une science cachée ?

Sommaire

- 1 Modélisation
 - Exemples introductifs
 - Notion de système
 - Fonction de transfert
 - Schéma fonctionnel
- 2 Réponse d'un système
 - Réponse temporelle
 - Réponse fréquentielle
 - Résumé
- 3 L'Automatique
 - Définition
 - Applications
 - Architecture de commande
 - Notion de stabilité
 - Objectif du cours
- 4 Stabilité et performances d'un asservissement
 - Stabilité
 - Précision
 - Rapidité
 - Marges de stabilité
- 5 Synthèse de correcteurs
 - Introduction
 - Synthèse directe
 - Action proportionnelle
 - Action intégrale
 - Action dérivée
 - Combinaisons d'actions
 - Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

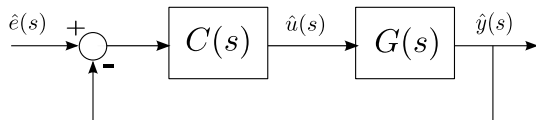
Stabilité d'un asservissement

Comment analyser la stabilité d'un système asservi ?



Stabilité d'un asservissement

Comment analyser la stabilité d'un système asservi ?



Méthodes :

- Ecrire la fonction de transfert globale équivalente $T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$,
 \Rightarrow Appliquer l'une des deux méthodes vues précédemment.
- Critère du revers (critère graphique).

Si le système en boucle ouverte est stable et à minimum de phase (pôles et zéros à partie réelle strictement négative) alors le système asservi est stable si et seulement si le point critique $(-1, 0)$ est laissé à gauche quand on parcourt le lieu de transfert de la boucle ouverte dans le plan de Nyquist dans le sens des ω croissants.

Exemple 1 :

Les fonctions de transfert du procédé et du correcteur sont de la forme

$$G(s) = \frac{10}{10s^2 + 18s + 8} \quad \text{et} \quad C(s) = \frac{4}{s^2 + 3s + 2}.$$

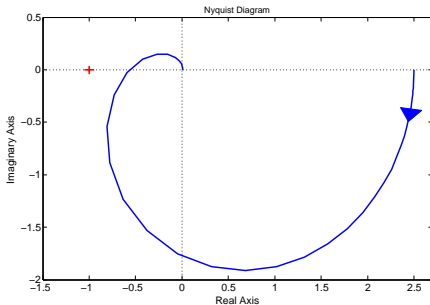
Traçons le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $C(s)G(s)$.

Exemple 1 :

Les fonctions de transfert du procédé et du correcteur sont de la forme

$$G(s) = \frac{10}{10s^2 + 18s + 8} \quad \text{et} \quad C(s) = \frac{4}{s^2 + 3s + 2}.$$

Traçons le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $C(s)G(s)$.

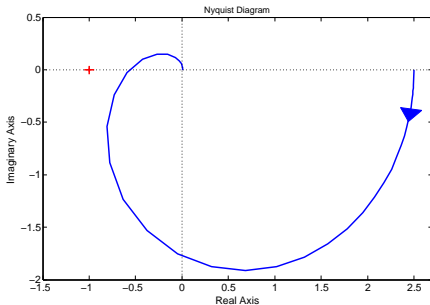


Exemple 1 :

Les fonctions de transfert du procédé et du correcteur sont de la forme

$$G(s) = \frac{10}{10s^2 + 18s + 8} \quad \text{et} \quad C(s) = \frac{4}{s^2 + 3s + 2}.$$

Traçons le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $C(s)G(s)$.



⇒ le système en boucle fermée est stable.

Exemple 2 :

Les fonctions de transfert du procédé et du correcteur sont de la forme

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 0.4s + 1} \quad \text{et} \quad C(s) = \frac{s + 3}{10s + 1}.$$

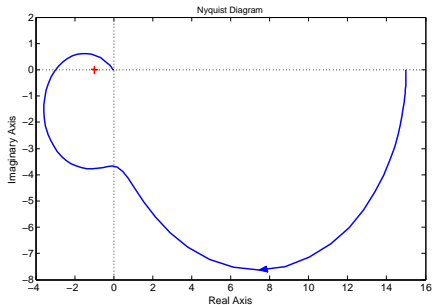
Traçons le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $C(s)G(s)$.

Exemple 2 :

Les fonctions de transfert du procédé et du correcteur sont de la forme

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 0.4s + 1} \quad \text{et} \quad C(s) = \frac{s + 3}{10s + 1}.$$

Traçons le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $C(s)G(s)$.

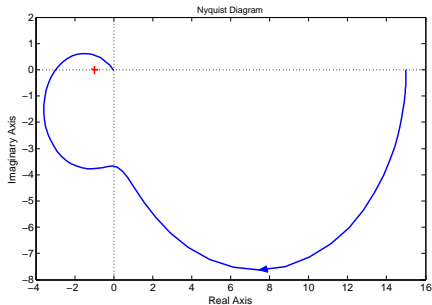


Exemple 2 :

Les fonctions de transfert du procédé et du correcteur sont de la forme

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 0.4s + 1} \quad \text{et} \quad C(s) = \frac{s + 3}{10s + 1}.$$

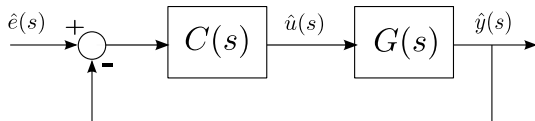
Traçons le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $C(s)G(s)$.



⇒ le système en boucle fermée est instable.

Performance d'un asservissement

Il existe différents critères pour caractériser un asservissement.



En plus de la stabilité, d'autres propriétés peuvent être intéressantes :

- la **précision**.
- la **rapidité**.
- la **marge de stabilité**.

Précision

La précision est déterminée par l'**erreur d'asservissement** en régime permanent :

$$\varepsilon(t) = e(t) - y(t) \text{ lorsque } t \rightarrow \infty$$

Précision

La précision est déterminée par l'**erreur d'asservissement** en régime permanent :

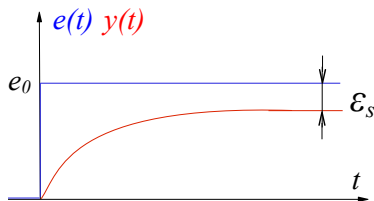
$$\varepsilon(t) = e(t) - y(t) \text{ lorsque } t \rightarrow \infty$$

On définit :

■ erreur statique ε_s

Lorsque l'entrée est un échelon

$$e(t) = e_0, \forall t \geq 0$$



Précision

La précision est déterminée par l'**erreur d'asservissement** en régime permanent :

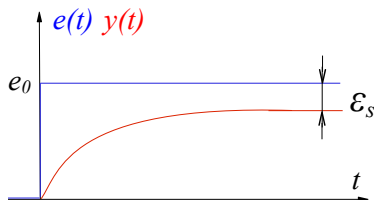
$$\varepsilon(t) = e(t) - y(t) \text{ lorsque } t \rightarrow \infty$$

On définit :

■ erreur statique ε_s

Lorsque l'entrée est un échelon

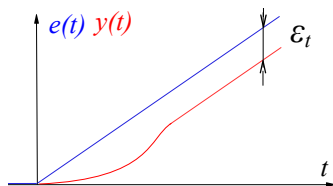
$$e(t) = e_0, \forall t \geq 0$$



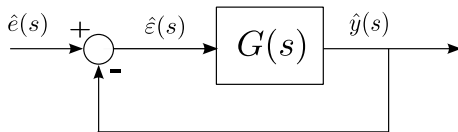
■ erreur de traînage ε_t

Lorsque l'entrée est une rampe

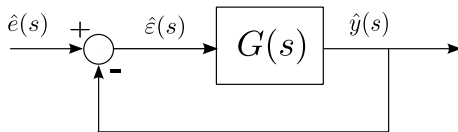
$$e(t) = e_0 t, \forall t \geq 0$$



L'erreur en régime permanent s'exprime par $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) - y(t)$.

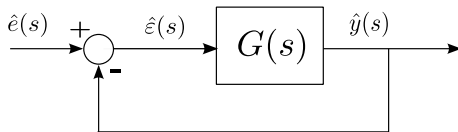


L'erreur en régime permanent s'exprime par $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) - y(t)$.



Selon le théorème de la valeur finale $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{\varepsilon}(s)$.

L'erreur en régime permanent s'exprime par $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) - y(t)$.



Selon le théorème de la valeur finale $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{\varepsilon}(s)$.

En pratique, on utilise la transformée de Laplace :

$$\hat{\varepsilon}(s) = \hat{e}(s) - \hat{y}(s) = \left(1 - F(s)\right) \hat{e}(s)$$

où $F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$ est la fonction de transfert en boucle fermée.

Exemple 1 : $G(s) = \frac{10}{s + 20}$

Quelques calculs donnent : $F(s) = \frac{10}{s + 30}$ et $\hat{\varepsilon}(s) = \frac{s + 20}{s + 30} \hat{e}(s)$.

Exemple 1 : $G(s) = \frac{10}{s + 20}$

Quelques calculs donnent : $F(s) = \frac{10}{s + 30}$ et $\hat{\varepsilon}(s) = \frac{s + 20}{s + 30} \hat{e}(s)$.

On en déduit :

$$\text{erreur statique } \varepsilon_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s + 20}{s + 30} \frac{e_0}{s} = \frac{2}{3} e_0,$$

$$\text{erreur de trainage } \varepsilon_t = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s + 20}{s + 30} \frac{e_0}{s^2} = +\infty.$$

Exemple 1 : $G(s) = \frac{10}{s + 20}$

Quelques calculs donnent : $F(s) = \frac{10}{s + 30}$ et $\hat{\varepsilon}(s) = \frac{s + 20}{s + 30} \hat{e}(s)$.

On en déduit :

$$\text{erreur statique } \varepsilon_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s + 20}{s + 30} \frac{e_0}{s} = \frac{2}{3} e_0,$$

$$\text{erreur de trainage } \varepsilon_t = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s + 20}{s + 30} \frac{e_0}{s^2} = +\infty.$$

Exemple 2 : $G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

Quelques calculs donnent :

$$F(s) = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2(K + 1)} \quad \text{et} \quad \hat{\varepsilon}(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2(K + 1)} \hat{e}(s).$$

Exemple 1 : $G(s) = \frac{10}{s + 20}$

Quelques calculs donnent : $F(s) = \frac{10}{s + 30}$ et $\hat{e}(s) = \frac{s + 20}{s + 30} \hat{e}(s)$.

On en déduit :

$$\text{erreur statique } \varepsilon_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s + 20}{s + 30} \frac{e_0}{s} = \frac{2}{3} e_0,$$

$$\text{erreur de traînage } \varepsilon_t = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s + 20}{s + 30} \frac{e_0}{s^2} = +\infty.$$

Exemple 2 : $G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

Quelques calculs donnent :

$$F(s) = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2(K + 1)} \quad \text{et} \quad \hat{e}(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2(K + 1)} \hat{e}(s).$$

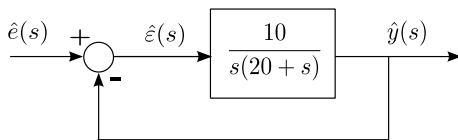
On en déduit :

$$\text{erreur statique } \varepsilon_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(1 - F(s)\right) \frac{e_0}{s} = \frac{1}{K + 1} e_0,$$

$$\text{erreur de traînage } \varepsilon_t = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(1 - F(s)\right) \frac{e_0}{s^2} = +\infty.$$

Règles générales :

- Un gain statique élevé en boucle ouverte permet d'obtenir une erreur de position (en asservissement) plus faible.
 - Loi des intégrateurs : l'erreur en régime permanent, pour une entrée $\hat{e}(s)$, est nulle si la boucle ouverte comprend au moins autant d'intégrateurs que le signal $\hat{e}(s)$.
-
- S'il n'y a pas d'intégrateur pur dans la FTBO, l'erreur de position est finie et l'erreur de trainage est infinie.
 - S'il y a un intégrateur pur dans la FTBO, l'erreur de position est nulle et l'erreur de trainage est finie.
 - S'il y a deux intégrateurs purs dans la FTBO, l'erreur de position est nulle et l'erreur de trainage est nulle.

Exemple 3 :

Quelques calculs donnent : $F(s) = \frac{10}{10 + s(20 + s)}$ et $\hat{\varepsilon}(s) = \frac{s(20 + s)}{10 + s(20 + s)} \hat{e}(s)$.

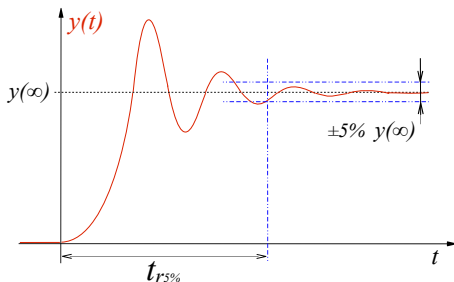
$$\text{erreur statique } \varepsilon_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(20 + s)}{10 + s(20 + s)} \frac{e_0}{s} = 0,$$

$$\text{erreur de trainage } \varepsilon_t = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(20 + s)}{10 + s(20 + s)} \frac{e_0}{s^2} = 2e_0.$$

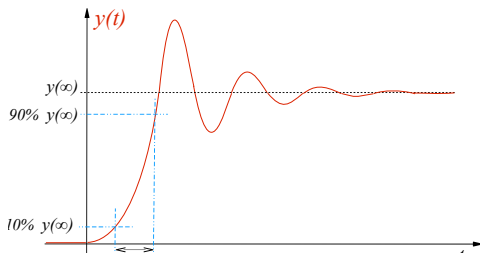
Rapidité

La performance en rapidité d'un asservissement est caractérisée par le temps de réponse et le temps de montée.

Le temps de réponse est le temps mis par le signal de sortie pour atteindre sa valeur finale à $n\%$ près (souvent 5%) sans ressortir de cet intervalle.



Le temps de montée correspond à l'intervalle de temps dans lequel la sortie passe de 10% à 90% de la valeur finale.



Marges de stabilité

Soit le système à commander : $G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$.

Stabilité du système asservi $F(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2) + k}$?

Marges de stabilité

Soit le système à commander : $G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$.

Stabilité du système asservi $F(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2) + k}$?

s^3	1	2	0
s^2	3	k	0
s^1	$\frac{6-k}{3}$	0	
s^0	k		

\Rightarrow système stable si $0 < k < 6$.

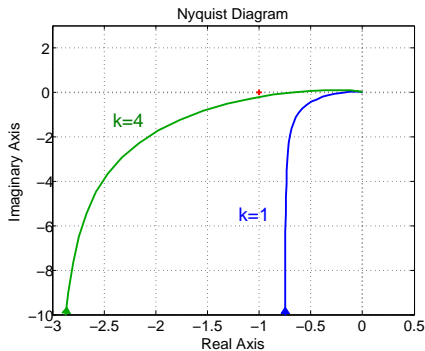
Marges de stabilité

Soit le système à commander : $G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$.

Stabilité du système asservi $F(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2) + k}$?

s^3	1	2	0
s^2	3	k	0
s^1	$\frac{6-k}{3}$	0	
s^0	k		

⇒ système stable si $0 < k < 6$.



★ Notion de **marges de stabilité** : quantifie “l'éloignement” par rapport au seuil critique d'instabilité.

Marge de gain

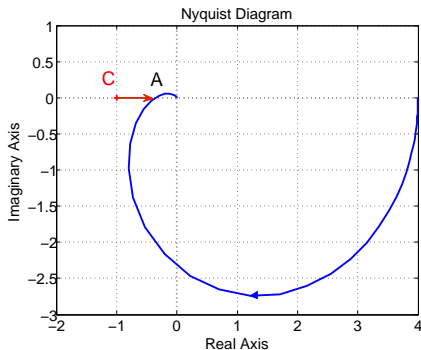
La marge de gain se définit comme le gain qu'il faut apporter au système en boucle ouverte pour déstabiliser le système asservi (en boucle fermée).

Mesure :

La marge de gain d'un système asservi est donnée par la formule :

$$\Delta G = -20 \log |G(j\omega_{-180})|$$

où ω_{-180} est la pulsation pour laquelle la FTBO $G(j\omega)$ est déphasé de -180° .



Marge de phase

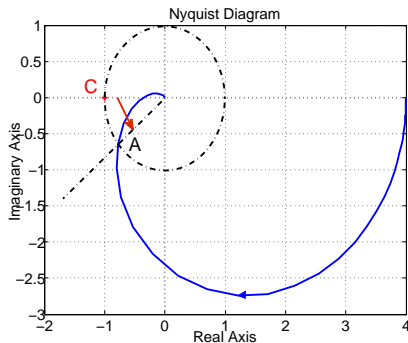
La marge de phase se définit comme le déphasage qu'il faut apporter au système en boucle ouverte pour déstabiliser le système asservi (en boucle fermée).

Mesure :

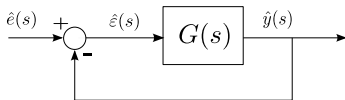
La marge de phase d'un système asservi est donnée par la formule :

$$\Delta\phi = \pi + \arg G(j\omega_{0dB})$$

où ω_{0dB} est la pulsation pour laquelle la FTBO $G(j\omega)$ a un gain unitaire (0 en décibel).

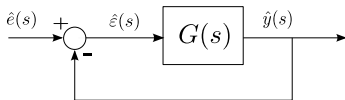


Exemple : Soit l'asservissement suivant

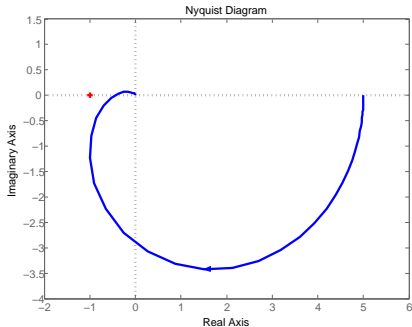


avec $G(s) = \frac{5}{s^3 + 3.5s^2 + 3.5s + 1}$. L'asservissement est-il stable ?

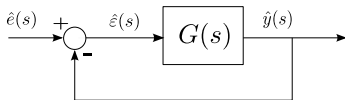
Exemple : Soit l'asservissement suivant



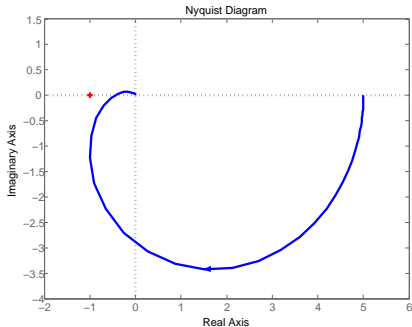
avec $G(s) = \frac{5}{s^3 + 3.5s^2 + 3.5s + 1}$. L'asservissement est-il stable ?



Exemple : Soit l'asservissement suivant



avec $G(s) = \frac{5}{s^3 + 3.5s^2 + 3.5s + 1}$. L'asservissement est-il stable ?



⇒ Par application du critère du revers : stable

Quelle est sa marge de stabilité ?

Quelle est sa marge de stabilité ?

Des mesures sur le lieu de $G(s)$ dans Bode ou Nyquist donnent

- $|G(j\omega)| = 1$ pour la pulsation $\omega = 1.24 \text{ rad/s}$,
- $\arg(G(j\omega)) = -180^\circ$ pour la pulsation $\omega = 1.87 \text{ rad/s}$.

Quelle est sa marge de stabilité ?

Des mesures sur le lieu de $G(s)$ dans Bode ou Nyquist donnent

- $|G(j\omega)| = 1$ pour la pulsation $\omega = 1.24 \text{ rad/s}$,
- $\arg(G(j\omega)) = -180^\circ$ pour la pulsation $\omega = 1.87 \text{ rad/s}$.

Calculs des marges

- marge de gain :

$$\Delta G = -20 \log \frac{5}{|(j\omega)^3 + 3.5(j\omega)^2 + 3.5(j\omega) + 1|}, \text{ avec } \omega = 1.87$$

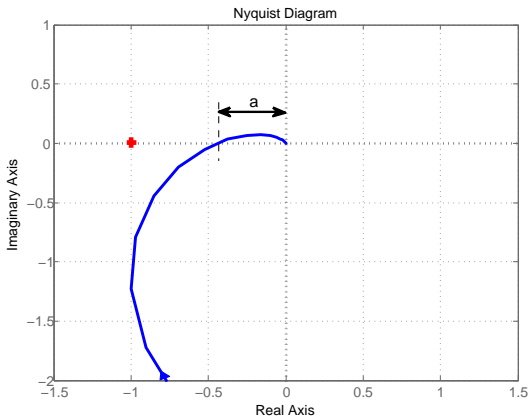
$$= 7.04 \text{ dB}$$

- marge de phase :

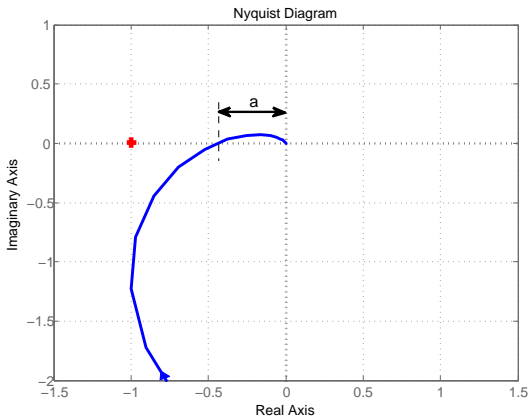
$$\Delta\phi = \pi + \arg \frac{5}{(j\omega)^3 + 3.5(j\omega)^2 + 3.5(j\omega) + 1}, \text{ avec } \omega = 1.24$$

$$= 0.51 \text{ rad } (29.2 \text{ deg})$$

Celles-ci peuvent aussi être directement mesurées sur le lieu de Nyquist de $G(s)$

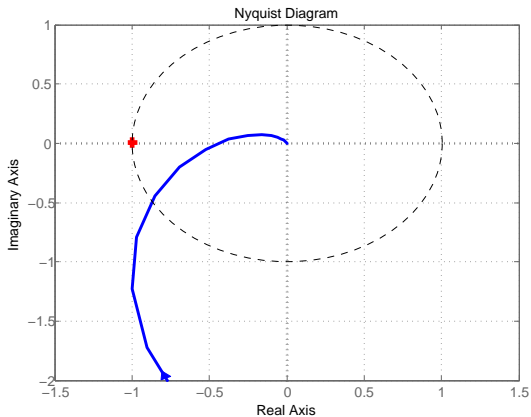


Celles-ci peuvent aussi être directement mesurées sur le lieu de Nyquist de $G(s)$



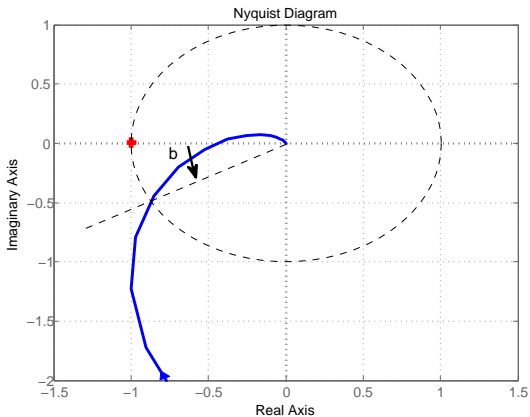
- distance $a \simeq 0.44$: marge de gain $\Delta G = 20 \log(a) \simeq 7.05 \text{ dB}$.

Celles-ci peuvent aussi être directement mesurées sur le lieu de Nyquist de $G(s)$



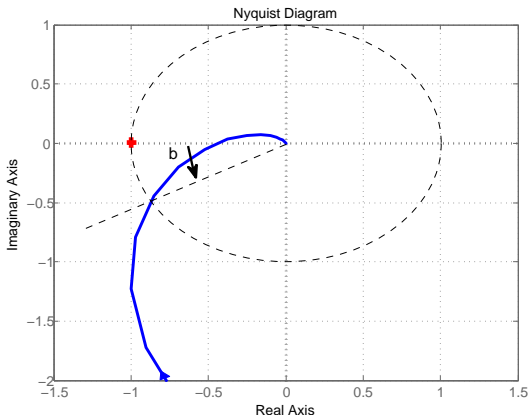
- distance $a \simeq 0.44$: marge de gain $\Delta G = 20 \log(a) \simeq 7.05 \text{ dB}$.

Celles-ci peuvent aussi être directement mesurées sur le lieu de Nyquist de $G(s)$



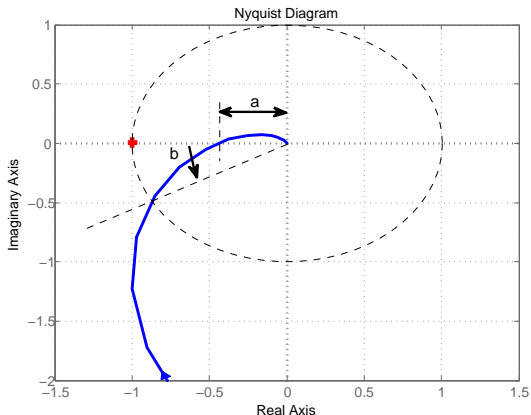
- distance $a \simeq 0.44$: marge de gain $\Delta G = 20 \log(a) \simeq 7.05 \text{ dB}$.

Celles-ci peuvent aussi être directement mesurées sur le lieu de Nyquist de $G(s)$



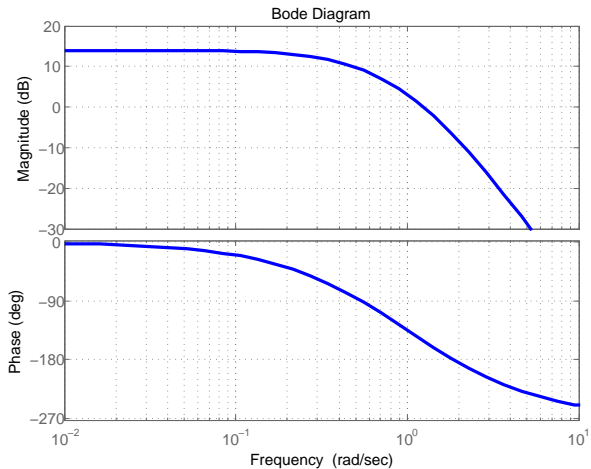
- distance $a \simeq 0.44$: marge de gain $\Delta G = 20 \log(a) \simeq 7.05 \text{ dB}$.
- angle $b \simeq 29$: marge de gain $\Delta \phi = b \simeq 29 \text{ deg}$.

Celles-ci peuvent aussi être directement mesurées sur le lieu de Nyquist de $G(s)$

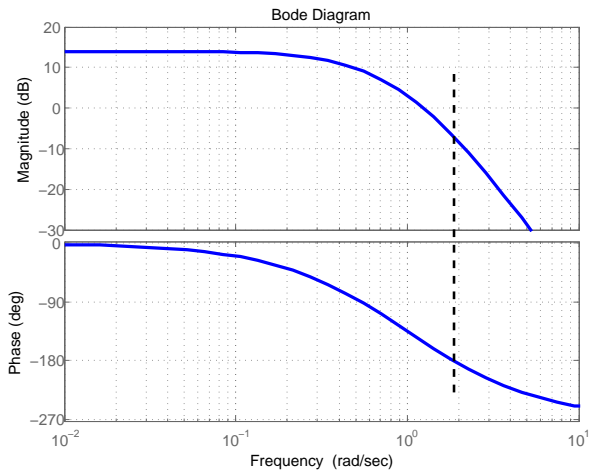


- distance $a \simeq 0.44$: marge de gain $\Delta G = 20 \log(a) \simeq 7.05 \text{ dB}$.
- angle $b \simeq 29$: marge de gain $\Delta \phi = b \simeq 29 \text{ deg}$.

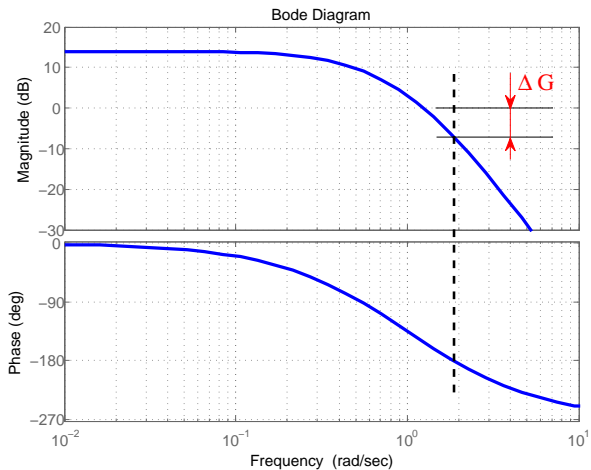
Ou encore, sur le diagramme de Bode de $G(s)$



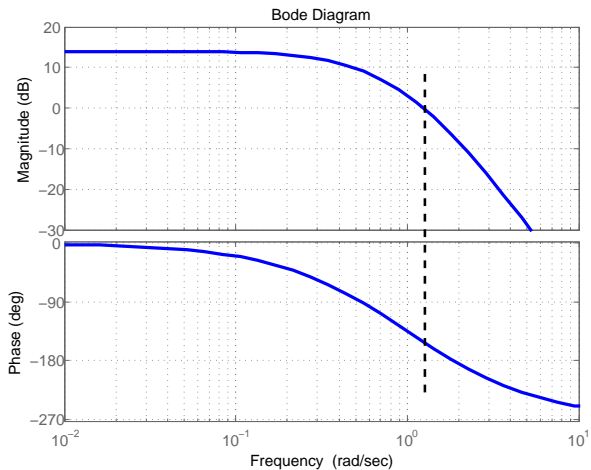
Ou encore, sur le diagramme de Bode de $G(s)$



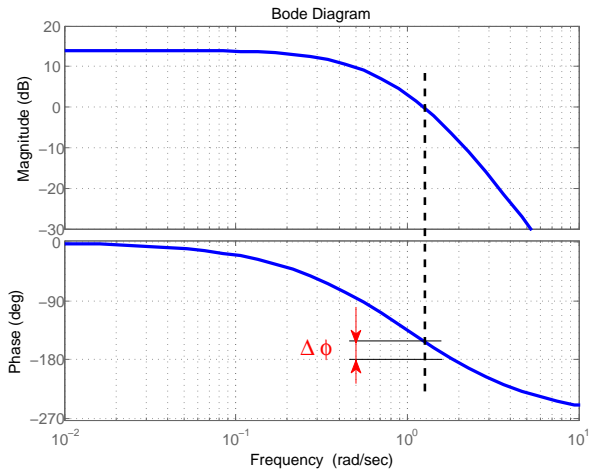
Ou encore, sur le diagramme de Bode de $G(s)$



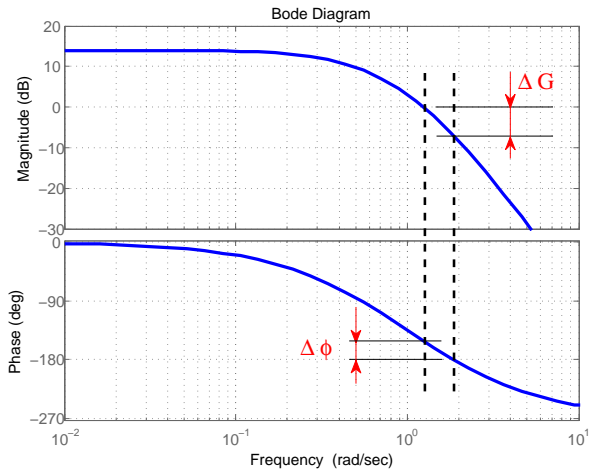
Ou encore, sur le diagramme de Bode de $G(s)$



Ou encore, sur le diagramme de Bode de $G(s)$



Ou encore, sur le diagramme de Bode de $G(s)$



Sommaire

1 Modélisation

- Exemples introductifs
- Notion de système
- Fonction de transfert
- Schéma fonctionnel

2 Réponse d'un système

- Réponse temporelle
- Réponse fréquentielle
- Résumé

3 L'Automatique

- Définition
- Applications
- Architecture de commande
- Notion de stabilité
- Objectif du cours

4 Stabilité et performances d'un asservissement

- Stabilité
- Précision
- Rapidité
- Marges de stabilité

5 Synthèse de correcteurs

- Introduction
- Synthèse directe
- Action proportionnelle
- Action intégrale
- Action dérivée
- Combinaisons d'actions
- Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Introduction

Phase de modélisation :

Chercher un modèle représentant le comportement du système.

- relation entrée-sortie ?
- équation différentielle, fonction de transfert, schéma-bloc...

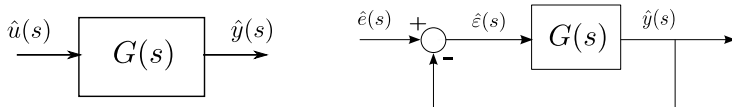
Introduction

Phase de modélisation :

Chercher un modèle représentant le comportement du système.

- relation entrée-sortie ?
- équation différentielle, fonction de transfert, schéma-bloc...

Phase d'analyse :



Analyse des propriétés du modèle et ses performances (en bo ou bf).

- réponses temporelles et fréquentielles
- stabilité
- analyse d'un asservissement pour un correcteur donné

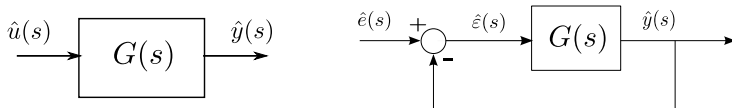
Introduction

Phase de modélisation :

Chercher un modèle représentant le comportement du système.

- relation entrée-sortie ?
- équation différentielle, fonction de transfert, schéma-bloc...

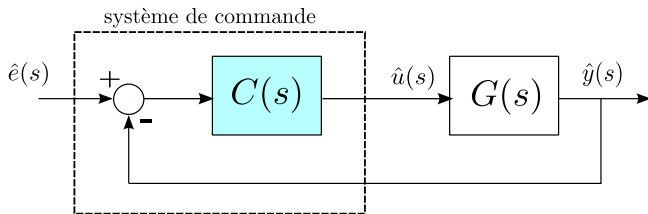
Phase d'analyse :



Analyse des propriétés du modèle et ses performances (en bo ou bf).

- réponses temporelles et fréquentielles
- stabilité
- analyse d'un asservissement pour un correcteur donné

⇒ Ce que vous avez vu jusqu'à maintenant.

Phase de synthèse :

Conception d'un système de commande.

- rechercher un correcteur
- stabilisation
- amélioration des performances

⇒ Le système en boucle fermée doit satisfaire un certain cdc.

Un système de commande a pour objectif de doter le système asservi de certaines propriétés telles que

- la stabilité du système asservi,
- la rapidité de la réponse temporelle (régime transitoire),
- la précision en régime permanent,
- la robustesse (marges de stabilité, rejet de perturbation).

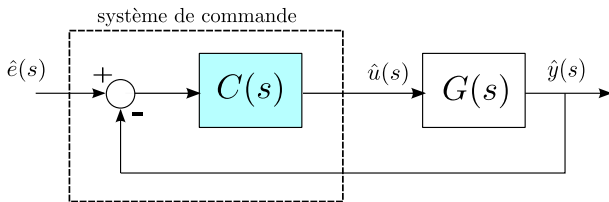
Un système de commande a pour objectif de doter le système asservi de certaines propriétés telles que

- la stabilité du système asservi,
- la rapidité de la réponse temporelle (régime transitoire),
- la précision en régime permanent,
- la robustesse (marges de stabilité, rejet de perturbation).

Dans ce cours, seule la synthèse par méthodes fréquentielles classiques est considérée. Elles sont très utilisées en entreprises du fait de

- leur aspect pratique,
- l'existence de techniques de synthèse simples ou empiriques,
- la possibilité de régler les gains intuitivement.

Pour la suite de l'exposé, nous garderons les notations suivantes :



- $C(s)$ représente le correcteur.
- $G(s)$ représente le système à commander.
- $\hat{u}(s)$ est le signal de commande.
- $F(s)$ représente la fonction de transfert en boucle fermée.
- Dans cette configuration la FTBO correspond à la chaîne directe : $C(s)G(s)$.
- L'erreur d'asservissement est notée $\hat{e}(s) = \hat{e}(s) - \hat{y}(s)$.

Synthèse directe : modèle imposé

Une 1^{ière} méthode directe et pratique consiste à imposer un modèle pour la FTBF.

Synthèse directe : modèle imposé

Une 1^{ière} méthode directe et pratique consiste à imposer un modèle pour la FTBF.

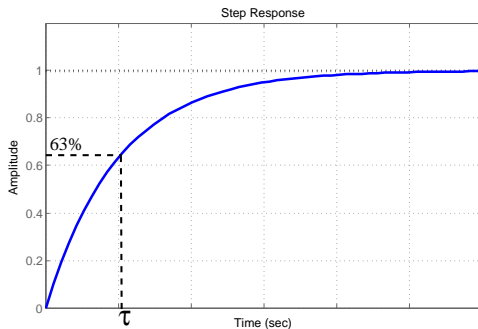
Qu'est-ce qu'un modèle "idéal" ?

Synthèse directe : modèle imposé

Une 1^{ière} méthode directe et pratique consiste à imposer un modèle pour la FTBF.

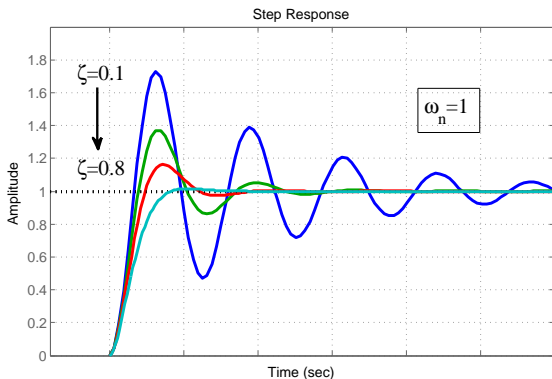
Qu'est-ce qu'un modèle "idéal" ?

pour un premier ordre : $F_d(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$



la constante de temps τ définit la rapidité : $t_{r5\%} = 3\tau$

pour un second ordre :
$$F_d(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}$$



- l'amortissement ζ définit le dépassement : $D_1 = 100 e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$
- la pulsation propre et l'amortissement définissent la rapidité $t_{r5\%} \simeq \frac{3}{\zeta\omega_n}$

Méthode :

④ Spécifier une FTBF ayant une dynamique souhaitée “idéale”.

- type premier ordre

$$F_d(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

- type second ordre

$$F_d(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1}$$

- pour les ordres supérieurs on peut envisager : un pôle multiples ou un second ordre dominant.

Méthode :

① Spécifier une FTBF ayant une dynamique souhaitée “idéale”.

- type premier ordre

$$F_d(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

- type second ordre

$$F_d(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}$$

- pour les ordres supérieurs on peut envisager : un pôle multiples ou un second ordre dominant.

② En identifiant la FTBF avec la fonction désirée, calculer le correcteur :

$$F_d(p) = F(p) \quad \Rightarrow \quad F_d(p) = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)}$$

$$\Rightarrow \quad C(p) = \frac{F_d(p)}{G(p)(1 - F_d(p))}$$

- ④ Le correcteur doit être propre pour être réalisable.
(ordre numérateur \leq ordre dénominateur)

- ④ Le correcteur doit être propre pour être réalisable.
(ordre numérateur \leq ordre dénominateur)
- ④ Une phase de simulation est nécessaire pour valider le fonctionnement
(comportement attendu, pas de saturation...).

- ④ Le correcteur doit être propre pour être réalisable.
(ordre numérateur \leq ordre dénominateur)

- ④ Une phase de simulation est nécessaire pour valider le fonctionnement (comportement attendu, pas de saturation...).

Remarques :

- L'approche est valide seulement si le modèle du système est bien connu.
- Le système à commander doit posséder des pôles et zéros stables.
- L'approche est adaptée plutôt pour des systèmes d'ordre faible.

Exemple

Soit le système à commander de fonction de transfert :

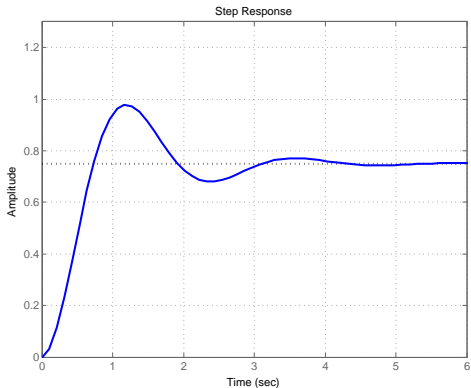
$$G(s) = \frac{6}{s^2 + 2s + 8}.$$

Exemple

Soit le système à commander de fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{6}{s^2 + 2s + 8}.$$

Simulons sa réponse indicielle :



Dépassement = 30% ; temps de réponse à 5% = 2.78s ; erreur de position = 25%.

Choisissons un modèle de référence du second ordre :

$$F_d(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1}.$$

Choisissons un modèle de référence du second ordre :

$$F_d(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}.$$

- L'amortissement ζ est fixé à 0.8 de sorte que le dépassement soit inférieur à 2%.
- La pulsation propre ω_n est fixée à 1.87 de sorte que le temps de réponse soit de l'ordre de 2s.
(formule approximative : $t_{r5\%} \simeq \frac{3}{\zeta\omega_n}$)
- La FTBF désirée s'écrit donc :

$$F_d(s) = \frac{1}{0.284s^2 + 0.853s + 1}.$$

Choisissons un modèle de référence du second ordre :

$$F_d(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}.$$

- L'amortissement ζ est fixé à 0.8 de sorte que le dépassement soit inférieur à 2%.
- La pulsation propre ω_n est fixée à 1.87 de sorte que le temps de réponse soit de l'ordre de 2s.
(formule approximative : $t_{r5\%} \simeq \frac{3}{\zeta\omega_n}$)
- La FTBF désirée s'écrit donc :

$$F_d(s) = \frac{1}{0.284s^2 + 0.853s + 1}.$$

Enfin, nous pouvons en déduire le correcteur :

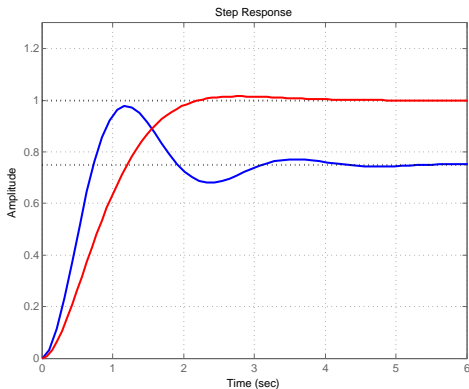
$$C(s) = \frac{s^2 + 2s + 8}{\frac{6}{\omega_n^2}s^2 + \frac{12\zeta}{\omega_n}s} = \frac{s^2 + 2s + 8}{1.707s^2 + 5.12s}$$

Simulons la réponse indicielle du système asservi par notre correcteur :

$$F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Simulons la réponse indicielle du système asservi par notre correcteur :

$$F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

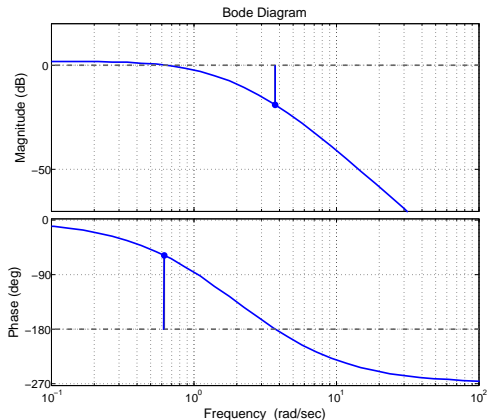


Dépassement = 1.51% ; temps de réponse à 5% = 1.81s ; erreur de position = 0%.

Action proportionnelle

Ce type de correcteur est un simple amplificateur de gain réglable :

$$u(t) = k_p \epsilon(t) \Rightarrow C(s) = k_p.$$



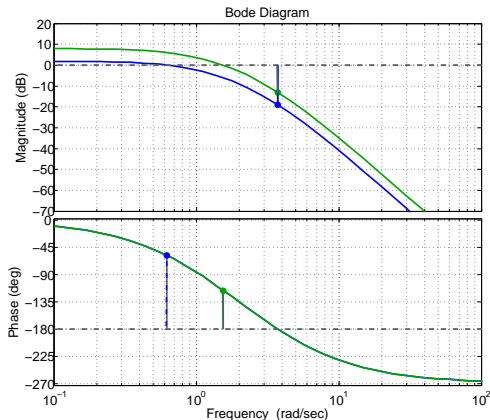
Avantages et Inconvénients :

- Si $k_p \nearrow$, le système répond plus rapidement, l'erreur de position diminue.
- Si $k_p \searrow$, les marges de stabilité augmentent.
- Si $k_p \nearrow$, peut entraîner des oscillations et un dépassement préjudiciable.

Action proportionnelle

Ce type de correcteur est un simple amplificateur de gain réglable :

$$u(t) = k_p \epsilon(t) \Rightarrow C(s) = k_p.$$



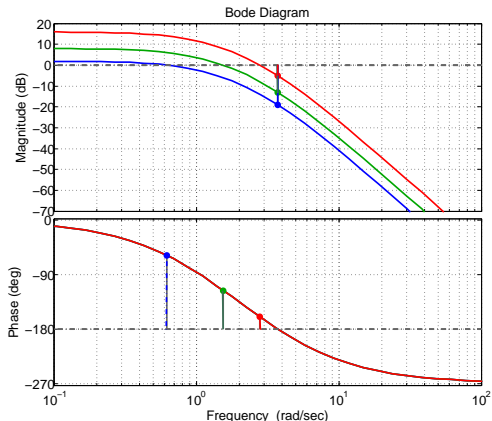
Avantages et Inconvénients :

- Si $k_p \nearrow$, le système répond plus rapidement, l'erreur de position diminue.
- Si $k_p \searrow$, les marges de stabilité augmentent.
- Si $k_p \nearrow$, peut entraîner des oscillations et un dépassement préjudiciable.

Action proportionnelle

Ce type de correcteur est un simple amplificateur de gain réglable :

$$u(t) = k_p \epsilon(t) \Rightarrow C(s) = k_p.$$



Avantages et Inconvénients :

- Si $k_p \nearrow$, le système répond plus rapidement, l'erreur de position diminue.
- Si $k_p \searrow$, les marges de stabilité augmentent.
- Si $k_p \nearrow$, peut entraîner des oscillations et un dépassement préjudiciable.

Exemple :

Soit le système à commander $G(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ et le système de commande $C(s) = k_p$. Le système en boucle fermée s'exprime par

$$F(s) = \frac{k_p}{s^2 + s + 1 + k_p}.$$

Exemple :

Soit le système à commander $G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$ et le système de commande $C(s) = k_p$. Le système en boucle fermée s'exprime par

$$F(s) = \frac{k_p}{s^2 + s + 1 + k_p}.$$

Cette nouvelle fonction de transfert est caractérisée par

$$K_{statique} = \frac{k_p}{k_p + 1}, \quad \omega_n = \sqrt{1 + k_p}, \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{1 + k_p}}.$$

Donc si $k_p \nearrow$ alors $\zeta \searrow$, les marges \searrow et l'erreur statique $\epsilon_s = \frac{1}{1+k_p} \searrow$.

Exemple :

Soit le système à commander $G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$ et le système de commande $C(s) = k_p$. Le système en boucle fermée s'exprime par

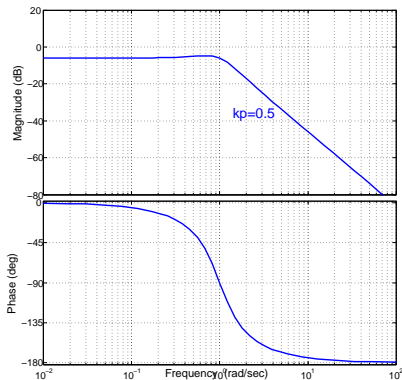
$$F(s) = \frac{k_p}{s^2 + s + 1 + k_p}.$$

Cette nouvelle fonction de transfert est caractérisée par

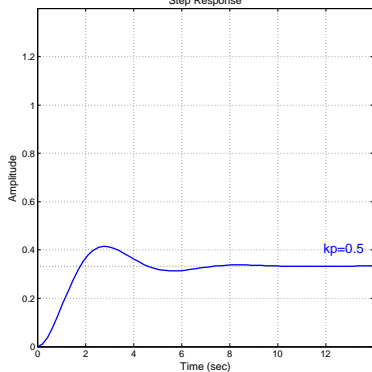
$$K_{statique} = \frac{k_p}{k_p + 1}, \quad \omega_n = \sqrt{1 + k_p}, \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{1 + k_p}}.$$

Donc si $k_p \nearrow$ alors $\zeta \searrow$, les marges \searrow et l'erreur statique $\epsilon_s = \frac{1}{1+k_p} \searrow$.

Bode Diagram



Step Response



Exemple :

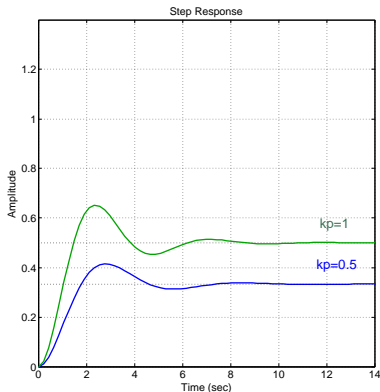
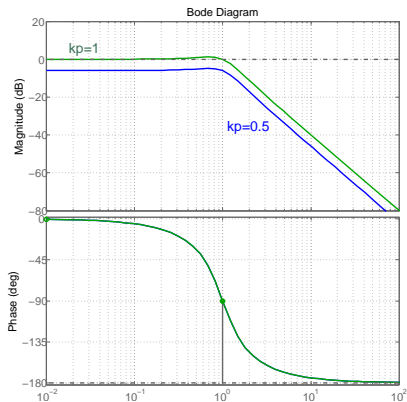
Soit le système à commander $G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$ et le système de commande $C(s) = k_p$. Le système en boucle fermée s'exprime par

$$F(s) = \frac{k_p}{s^2 + s + 1 + k_p}.$$

Cette nouvelle fonction de transfert est caractérisée par

$$K_{statique} = \frac{k_p}{k_p + 1}, \quad \omega_n = \sqrt{1 + k_p}, \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{1 + k_p}}.$$

Donc si $k_p \nearrow$ alors $\zeta \searrow$, les marges \searrow et l'erreur statique $\epsilon_s = \frac{1}{1+k_p} \searrow$.



Exemple :

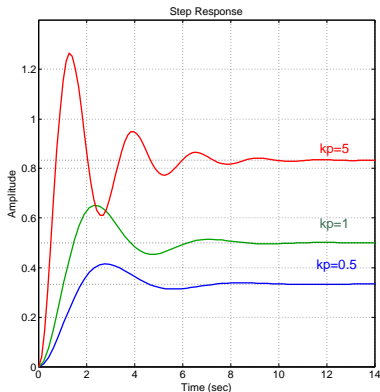
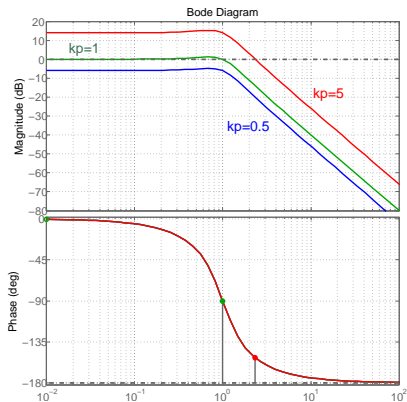
Soit le système à commander $G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$ et le système de commande $C(s) = k_p$. Le système en boucle fermée s'exprime par

$$F(s) = \frac{k_p}{s^2 + s + 1 + k_p}.$$

Cette nouvelle fonction de transfert est caractérisée par

$$K_{statique} = \frac{k_p}{k_p + 1}, \quad \omega_n = \sqrt{1 + k_p}, \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{1 + k_p}}.$$

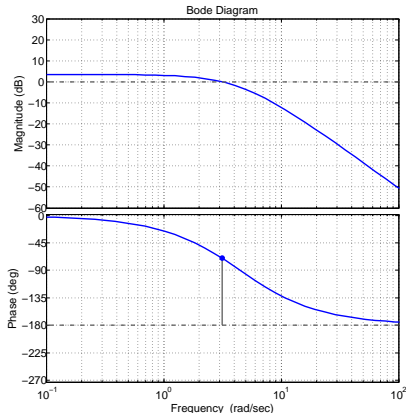
Donc si $k_p \nearrow$ alors $\zeta \searrow$, les marges \searrow et l'erreur statique $\epsilon_s = \frac{1}{1+k_p} \searrow$.



Action intégrale

Ce correcteur introduit un intégrateur qui ajoute un pôle nul à la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$u(t) = \int_0^t \epsilon(t) dt \Rightarrow C(s) = \frac{1}{s}.$$



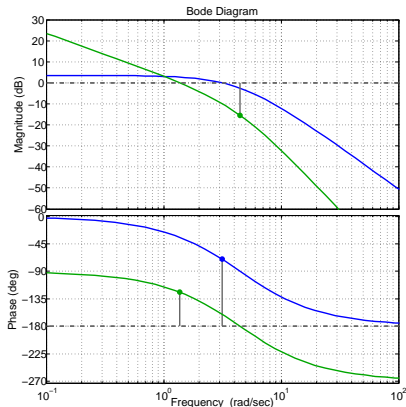
Avantages et Inconvénients :

- Erreur statique nulle en boucle fermée (BF),
- Diagramme de phase décalé de -90° : marges de stabilités dégradées,

Action intégrale

Ce correcteur introduit un intégrateur qui ajoute un pôle nul à la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$u(t) = \int_0^t \epsilon(t) dt \Rightarrow C(s) = \frac{1}{s}.$$



Avantages et Inconvénients :

- Erreur statique nulle en boucle fermée (BF),
- Diagramme de phase décalé de -90° : marges de stabilités dégradées,

Exemple :

Soit le système à commander $G(s) = \frac{0.8}{s^2+s+1}$ et le système de commande $C(s) = 1/s$.

Le système en boucle fermée s'exprime par

$$F(p) = \frac{0.8}{s^3 + s^2 + s + 0.8}.$$

Exemple :

Soit le système à commander $G(s) = \frac{0.8}{s^2+s+1}$ et le système de commande $C(s) = 1/s$.
Le système en boucle fermée s'exprime par

$$F(p) = \frac{0.8}{s^3 + s^2 + s + 0.8}.$$

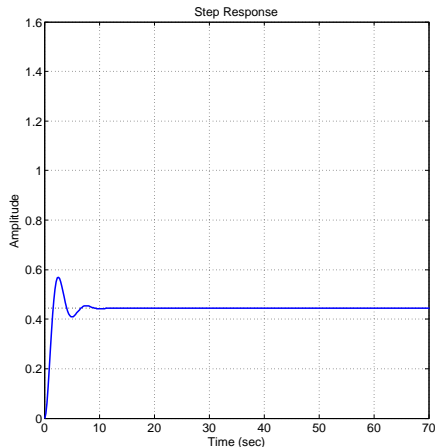
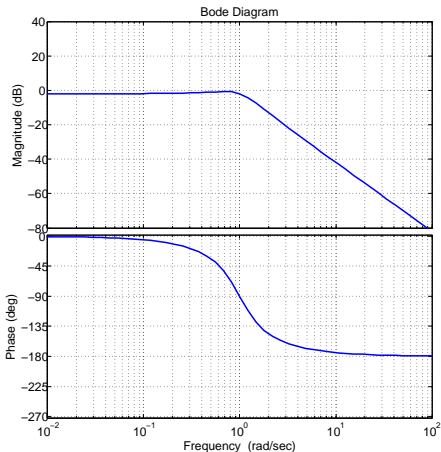
F est un ordre 3 : la marge de gain est finie,
Courbe plus proche du point critique : marges dégradées, oscillations et dépassement,
Pas d'erreur statique. schéma de gauche : bode de la BO ; schéma de droite : réponse
indicielle de la BF.

Exemple :

Soit le système à commander $G(s) = \frac{0.8}{s^2 + s + 1}$ et le système de commande $C(s) = 1/s$.
Le système en boucle fermée s'exprime par

$$F(p) = \frac{0.8}{s^3 + s^2 + s + 0.8}.$$

F est un ordre 3 : la marge de gain est finie,
Courbe plus proche du point critique : marges dégradées, oscillations et dépassement,
Pas d'erreur statique. schéma de gauche : bode de la BO ; schéma de droite : réponse
indicielle de la BF.

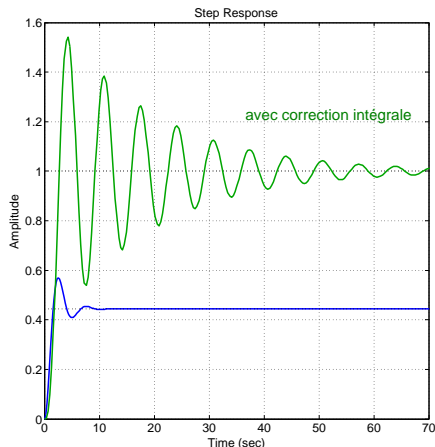
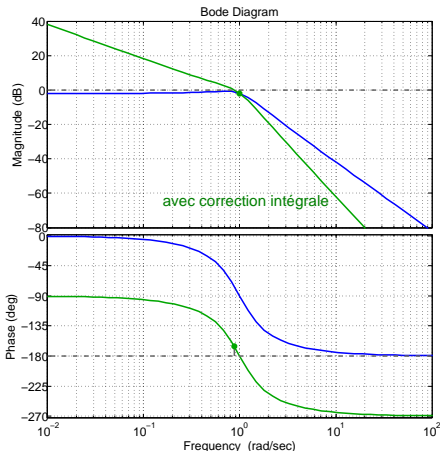


Exemple :

Soit le système à commander $G(s) = \frac{0.8}{s^2 + s + 1}$ et le système de commande $C(s) = 1/s$.
Le système en boucle fermée s'exprime par

$$F(p) = \frac{0.8}{s^3 + s^2 + s + 0.8}.$$

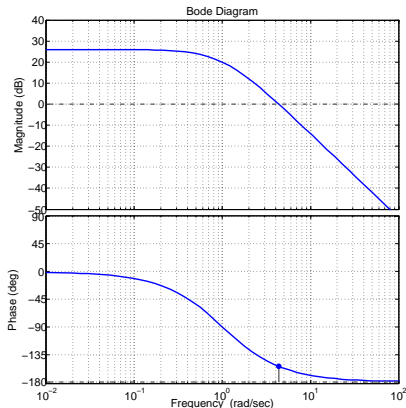
F est un ordre 3 : la marge de gain est finie,
Courbe plus proche du point critique : marges dégradées, oscillations et dépassement,
Pas d'erreur statique. schéma de gauche : bode de la BO ; schéma de droite : réponse
indicielle de la BF.



Action dérivée

Ce correcteur introduit un dérivateur qui ajoute un zéro nul à la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$u(t) = \frac{d\epsilon(t)}{dt} \Rightarrow C(s) = s.$$



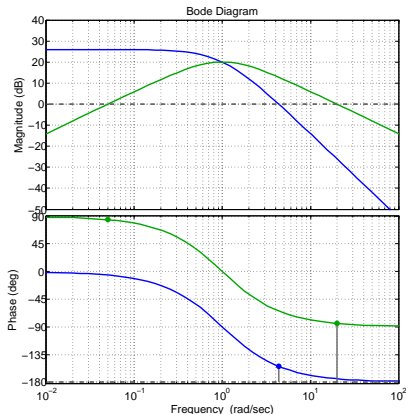
Avantages et Inconvénients :

- Ajoute de la phase : marges susceptibles d'être augmentées,
- A tendance à accélérer la réponse du système : temps de monté diminué,

Action dérivée

Ce correcteur introduit un dérivateur qui ajoute un zéro nul à la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$u(t) = \frac{d\epsilon(t)}{dt} \Rightarrow C(s) = s.$$



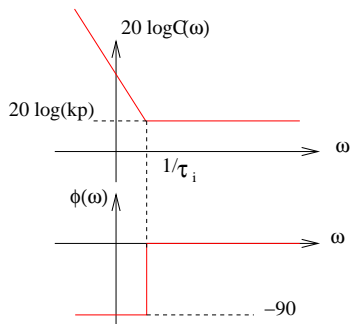
Avantages et Inconvénients :

- Ajoute de la phase : marges susceptibles d'être augmentées,
- A tendance à accélérer la réponse du système : temps de monté diminué,

Correcteur Proportionnel-Intégral (PI)

Ce correcteur a pour objectif de tirer profit des avantages de l'effet de I sans ses inconvénients :

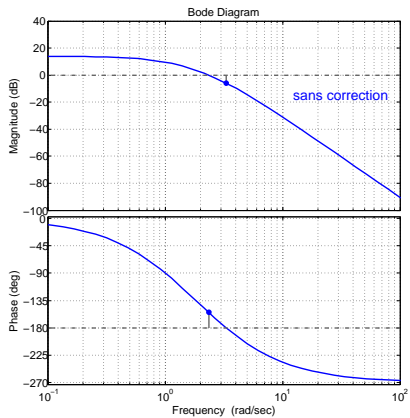
$$C(s) = k_p \frac{1 + \tau_i s}{\tau_i s}.$$



Idée du correcteur :

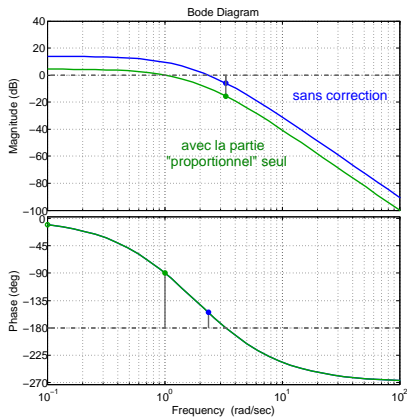
- Utiliser l'avantage de l'intégrateur en basses fréquences : précision infinie,
- L'action intégrale ne doit plus avoir d'effet dans les fréquences élevées, en particulier dans la région du point critique,

Réglage intuitif du correcteur :



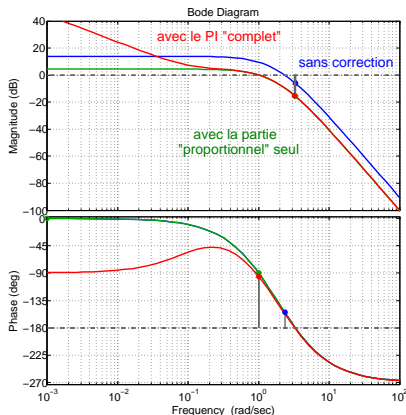
Réglage intuitif du correcteur :

- Ajuster le gain proportionnel en fonction de l'objectif et des caractéristiques du système avant correction :
 - le diminuer pour augmenter les marges de stabilité,
 - l'augmenter pour améliorer la rapidité du système.



Réglage intuitif du correcteur :

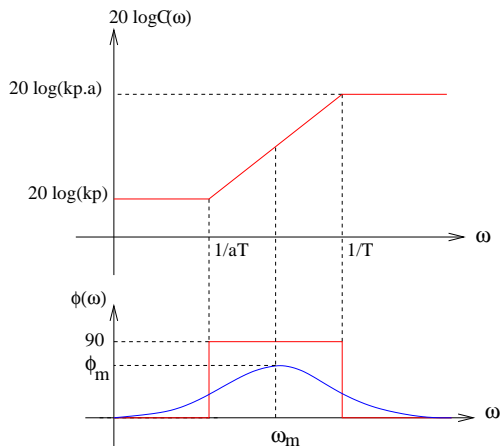
- Ajuster le gain proportionnel en fonction de l'objectif et des caractéristiques du système avant correction :
 - le diminuer pour augmenter les marges de stabilité,
 - l'augmenter pour améliorer la rapidité du système.
- Ensuite, la partie I est ajoutée en réglant le zero $1/\tau_i$ de façon à ce que la correction ne se fasse qu'en basses fréquences.



Correcteur à Avance de Phase

Ce correcteur a pour objectif d'apporter de la phase autour du point critique afin d'augmenter les marges de stabilité

$$C(s) = k_p \frac{1 + aTs}{1 + Ts}, \quad a > 1.$$



Le principe repose sur le réglage de a et T tels que le correcteur apporte de la phase (plage $[\frac{1}{aT}, \frac{1}{T}]$) autour du point critique.

Le principe repose sur le réglage de a et T tels que le correcteur apporte de la phase (plage $[\frac{1}{aT}, \frac{1}{T}]$) autour du point critique.

Méthode de réglage du correcteur :

- Régler le gain k_p pour ajuster la précision ou la rapidité ou les marges.
- Mesurer la marge de phase (après la correction prop. k_p) et en déduire la quantité de phase nécessaire

$$\phi_m = \Delta\phi_{\text{désirée}} - \Delta\phi.$$

- A partir de ϕ_m , a peut être calculé

$$a = \frac{1 + \sin\phi_m}{1 - \sin\phi_m}$$

- Enfin, nous avons la relation

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}},$$

il s'agit alors de calculer T tel que ω_m coïncide avec ω_{0db} (après correction prop.) :

$$T = \frac{1}{\omega_{0db}\sqrt{a}}.$$

Exemple :

Soit la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{100}{(1+s)^2}$$

On souhaite que le système en boucle fermée ait une marge de phase $M\phi = 45^\circ$:

Exemple :

Soit la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{100}{(1+s)^2}$$

On souhaite que le système en boucle fermée ait une marge de phase $M\phi = 45^\circ$:

- Calculons la marge de phase avant correction

$$G(\omega) = \frac{100}{(1+\omega_{0db}^2)} = 1 \Rightarrow \omega_{0db} = 9.95 \text{ rad/s}$$

$$M\phi = \pi - 2\arctan\omega_{0db} = 11^\circ$$

Exemple :

Soit la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{100}{(1+s)^2}$$

On souhaite que le système en boucle fermée ait une marge de phase $M\phi = 45^\circ$:

- Calculons la marge de phase avant correction

$$G(\omega) = \frac{100}{(1+\omega_{0db}^2)} = 1 \Rightarrow \omega_{0db} = 9.95 \text{ rad/s}$$

$$M\phi = \pi - 2\arctan\omega_{0db} = 11^\circ$$

- La marge est insuffisante, il faut donc remonter la phase de $\phi_m = 34^\circ$ à la pulsation ω_{0db}

$$a = \frac{1 + \sin\phi_m}{1 - \sin\phi_m} = \frac{1 + \sin 34^\circ}{1 - \sin 34^\circ} = 3.54$$

Exemple :

Soit la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{100}{(1+s)^2}$$

On souhaite que le système en boucle fermée ait une marge de phase $M\phi = 45^\circ$:

- Calculons la marge de phase avant correction

$$G(\omega) = \frac{100}{(1+\omega_{0db}^2)} = 1 \Rightarrow \omega_{0db} = 9.95 \text{ rad/s}$$

$$M\phi = \pi - 2\arctan\omega_{0db} = 11^\circ$$

- La marge est insuffisante, il faut donc remonter la phase de $\phi_m = 34^\circ$ à la pulsation ω_{0db}

$$a = \frac{1 + \sin\phi_m}{1 - \sin\phi_m} = \frac{1 + \sin 34^\circ}{1 - \sin 34^\circ} = 3.54$$

- Puis, on règle T afin d'ajouter la quantité ϕ_m au bon endroit

$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{0db} \Rightarrow T = 0.053$$

Exemple :

Soit la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{100}{(1+s)^2}$$

On souhaite que le système en boucle fermée ait une marge de phase $M\phi = 45^\circ$:

- Calculons la marge de phase avant correction

$$G(\omega) = \frac{100}{(1+\omega_{0db}^2)} = 1 \Rightarrow \omega_{0db} = 9.95 \text{ rad/s}$$

$$M\phi = \pi - 2\arctan\omega_{0db} = 11^\circ$$

- La marge est insuffisante, il faut donc remonter la phase de $\phi_m = 34^\circ$ à la pulsation ω_{0db}

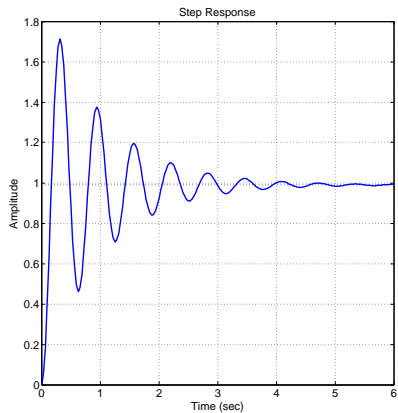
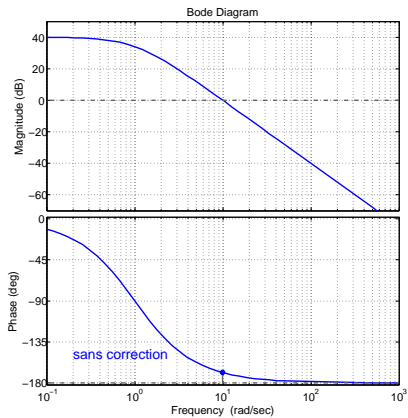
$$a = \frac{1 + \sin\phi_m}{1 - \sin\phi_m} = \frac{1 + \sin 34^\circ}{1 - \sin 34^\circ} = 3.54$$

- Puis, on règle T afin d'ajouter la quantité ϕ_m au bon endroit

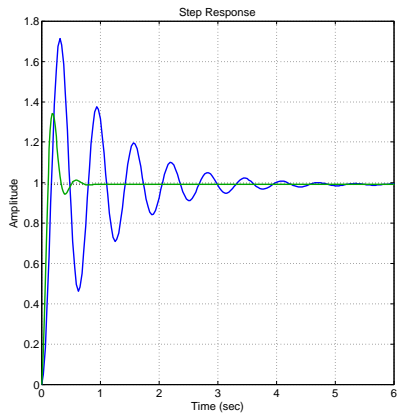
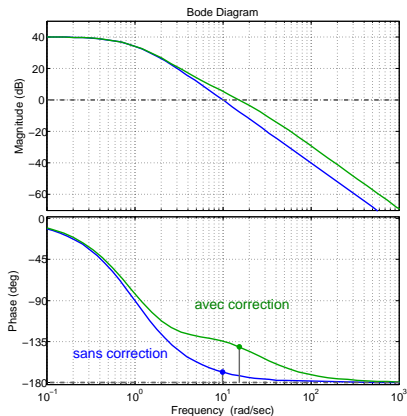
$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{0db} \Rightarrow T = 0.053$$

- Souvent, on choisit $\phi_m = 1.2\phi_{necessaire}$ pour compenser le décalage de ω_{0db} après correction.

Schema de gauche : bode de la BO ; schema de droite : réponse indicielle de la BF



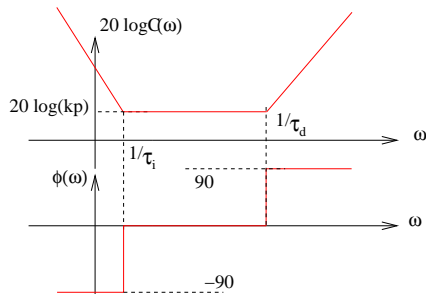
Schema de gauche : bode de la BO ; schema de droite : réponse indicielle de la BF



Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Ce correcteur PID est une combinaison des actions PI et PD

$$C(s) = k_p \left(\frac{1 + T_i s}{T_i s} \right) (1 + T_d s).$$



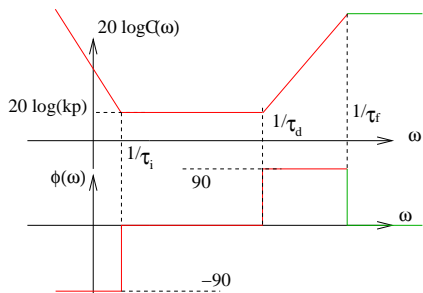
Idée du correcteur :

- Ajouter du gain en bf (précision ↗),
- Ajouter de la phase près du point critique ($M\phi$ ↗).

Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Ce correcteur PID est une combinaison des actions PI et PD + un filtre

$$C(s) = k_p \left(\frac{1 + T_i s}{T_i s} \right) (1 + T_d s) \frac{1}{(1 + T_f s)}.$$



Idée du correcteur :

- Ajouter du gain en bf (précision ↗),
- Ajouter de la phase près du point critique ($M\phi$ ↗).
- Le correcteur est propre,
- Atténuer l'effet du bruit (moins de gain en hf).

Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Méthode de réglage du correcteur :

- Etudier le système en BO et ses caractéristiques
(marges, précision, rapidité...).
- Régler le gain proportionnel k_p afin d'obtenir un premier asservissement satisfaisant
(en termes de marges, dépassement, oscillations, rapidité).
- Régler la constante de temps de l'action intégrale de sorte qu'elle n'agisse qu'en bf
(pour ne pas pénaliser les marges).
- Régler la constante de temps de l'action dérivée de sorte qu'elle n'agisse qu'autour du point critique
(pour ne pas pénaliser la précision).

Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Méthode de réglage du correcteur :

- Etudier le système en BO et ses caractéristiques
(marges, précision, rapidité...).
- Régler le gain proportionnel k_p afin d'obtenir un premier asservissement satisfaisant
(en termes de marges, dépassement, oscillations, rapidité).
- Régler la constante de temps de l'action intégrale de sorte qu'elle n'agisse qu'en bf
(pour ne pas pénaliser les marges).
- Régler la constante de temps de l'action dérivée de sorte qu'elle n'agisse qu'autour du point critique
(pour ne pas pénaliser la précision).
- Régler la constante de temps du filtre de sorte qu'il n'enlève pas de phase près du point critique,
- L'ordre du filtre peut être augmenté afin de mieux atténuer le bruit en hf.

Exemple : Soit le système $G(s) = \frac{5}{s^2 + s + 1}$.

- Une étude de ce système nous montre qu'il est stable en BF avec une erreur de position $\epsilon_s = 16.7\%$, un dépassement de 51% et une marge de phase $M_\phi = 27.8^\circ$ à $\omega_{0db} = 2.33rad/s$.
- On choisit un premier correcteur proportionnel afin de baisser l'erreur et accélérer le système : on prend $k_p = 2$ pour avoir une erreur de 9% . Il en résulte une nouvelle marge de phase $M_\phi = 18.9^\circ$ à $\omega_{0db} = 3.23rad/s$ et un dépassement de 61.9% .
- On place la constante de temps du I avant le point critique $T_i = 3 \gg 1/3.23$. Le correcteur devient $C(s) = 2 \frac{1 + 3s}{3s}$.
- L'erreur en régime permanent est maintenant nul mais la nouvelle marge de phase est de $M_\phi = 12.9^\circ$ à $\omega_{0db} = 3.24rad/s$. Il s'agit ensuite de placer la constante de temps de la partie D avant le point critique de façon à laisser le temps au correcteur de remonter la phase jusqu'à obtenir une marge satisfaisante : $T_i \gg T_d = 0.4 > 1/3.24$. On obtient $M_\phi = 70.4^\circ$.
- Pour finir, afin de synthétiser un correcteur réalisable et pour mieux filtrer le bruit, on ajoute un filtre avec une constante de temps relativement faible $T_f = 0.1 < 1/3.24$. Il en résulte $M_\phi = 45.9^\circ$, ce qui reste satisfaisant.

Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte ($C(s)G(s)$)

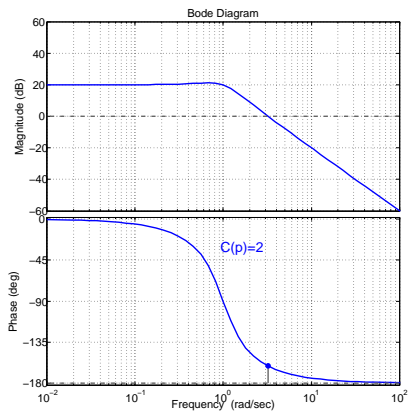


Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte ($C(s)G(s)$)

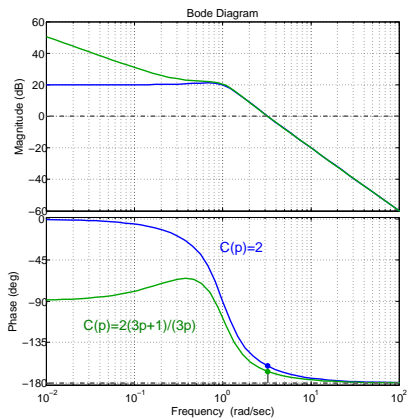


Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte ($C(s)G(s)$)

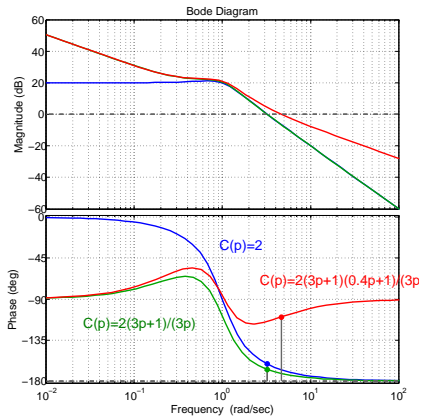
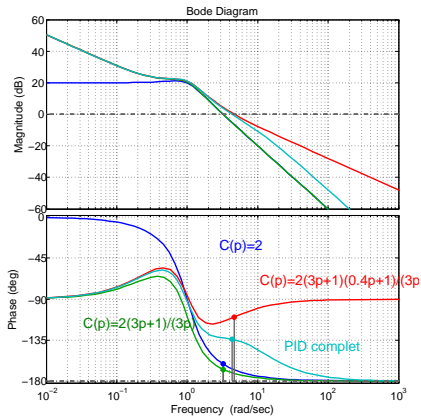


Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte ($C(s)G(s)$)



Réponses temporelles de la BF à un échelon unité

