

Systemes Asservis

Dr. Aggoune Lakhdar

Département d'Électrotechnique

Faculté de Technologie

Université Ferhat Abbas Sétif 1

Licence Électrotechnique (troisième année)

lakhdar.aggoune@univ-setif.dz

Avant-propos

Ce document a été développé pour servir de support au cours de Systèmes Asservis de la licence Électrotechnique de l'Université Ferhat Abbas Sétif 1 et s'adresse principalement aux étudiants de la troisième année. Il détaille notamment la modélisation et l'analyse des systèmes linéaires continus et invariants dans le temps.

Ce document n'a pas été conçu pour être autosuffisant. La présence au cours et un complément de travail sont indispensables pour arriver à une maîtrise des objectifs visés par le cours. Il vous permettra cependant d'approfondir les aspects qui ne pourront qu'être traités rapidement en cours.

Le cours Systèmes Asservis, vise à familiariser l'étudiant avec les propriétés des structures de commande des systèmes linéaires continus et l'analyse temporelle et fréquentielle des systèmes de bases (système de 1^{er} et 2^{ème} ordre). Au terme de ce cours, l'étudiant devrait être capable :

- de connaître les définitions et concepts propres aux systèmes linéaires continus.
- de se familiariser avec la structure des systèmes de commande (en boucle ouverte et en boucle fermée) et le rôle de chacun des composants dans ces systèmes.
- d'être en mesure de déterminer les performances statiques et dynamiques d'un système linéaire continu.
- de connaître les techniques classiques de représentation des systèmes linéaires continus: équation différentielle, fonction de transfert, diagramme fonctionnel et graphe de fluence.
- d'être en mesure d'analyser les systèmes de bases dans le domaine temporelle et fréquentielle.
- d'analyser la stabilité d'un système asservi.

Les connaissances préalables souhaitées pour le suivi de ce cours sont : les mathématiques de base (algèbre, calcul intégral et différentiel, nombres complexes, ...), les notions fondamentales de traitement du signal et l'électronique de base (circuits linéaires).

Table des matières

Chapitre 1 : Introduction aux systèmes asservis

1.1 Définitions.....	5
1.2 Notion de Boucle ouverte/Fermée.....	7
1.2.1 Commande en boucle ouverte.....	7
1.2.2 Commande en boucle fermée.....	8
1.3 Petit historique.....	11
1.4 Régulation et poursuite.....	11
1.5 Méthodologie.....	12
1.6 Performances d'un asservissement.....	12
1.6.1 Stabilité.....	12
1.6.2 Précision.....	12
1.6.3 Rapidité.....	13
1.7 Exercices.....	14

Chapitre 2 : Modélisation des systèmes dynamiques linéaires continus

2.1 Modélisation.....	17
2.2 Représentations temporelles.....	17
2.2.1 Représentation par une équation différentielle.....	17
2.2.2 Représentation par le modèle d'état.....	19
2.3 Représentation par fonction de transfert.....	21
2.3.1 Transformée de Laplace.....	21
2.3.2 Transformée de Laplace inverse par décomposition en éléments simples.....	23
2.3.3 Fonction de transfert.....	24
2.3.4 Passage de la représentation d'état à la fonction de transfert.....	25
2.4 Algèbre des diagrammes fonctionnels.....	26
2.5 Représentation par graphe de fluence.....	27
2.5.1 Formule de Mason.....	29
2.6 Exercices.....	31

Chapitre 3 : Réponses temporelles des systèmes linéaires

3.1 La réponse temporelle.....	35
3.2 Calcul de la réponse d'un système.....	35
3.2.1 Systèmes du premier ordre.....	35
3.2.2 Systèmes du second ordre.....	39
3.3 Systèmes d'ordre supérieur.....	44
3.4 Exercices.....	46

Chapitre 4 : Réponses fréquentielles des systèmes linéaires

4.1 La réponse fréquentielle.....	49
4.2 Diagramme de Bode.....	49
4.2.1 Méthode de tracé du diagramme de Bode.....	50
4.2.2 Cas particuliers.....	55

Table des matières

4.3 Diagramme de Nyquist.....	56
4.4 Marge de phase et marge de gain.....	58
4.5 Exercices.....	59
Chapitre 5 : Stabilité et précision des systèmes asservis	
5.1 La stabilité des systèmes linéaires continus.....	60
5.2 Critère des pôles.....	60
5.3 Critère de Routh.....	62
5.4 Critère graphique du revers.....	64
5.5 Marges de stabilité.....	66
5.6 Précision des systèmes asservis.....	67
5.6.1 Précision dynamique.....	67
5.6.2 Précision statique.....	67
5.7 Exercices.....	70
Références bibliographiques.....	71

Chapitre 1. Introduction aux systèmes asservis

Ce chapitre introduit les principales définitions et notions nécessaires à l'étude des systèmes asservis linéaires (objet de ce cours). Nous illustrerons la différence entre la notion de commande en boucle ouverte et de commande en boucle fermée. Nous établirons aussi la distinction entre le fonctionnement en régulation et le fonctionnement en poursuite. Enfin, nous exposerons la procédure à suivre pour la réalisation d'un système de commande [2, 4, 8, 9, 12-16].

1.1 Définitions :

Définition 1.1 : l'automatique est la science qui traite de la modélisation, de l'analyse, de l'identification et de la commande des systèmes dynamiques (objets étudiés).

Définition 1.2 : un système est un assemblage de composants ou éléments de manière à produire une fonction ou tâche donnée. Il possède un ou plusieurs signaux d'entrée exogène (extérieures au système) et un ou plusieurs signaux de sortie. Un système est dit monovariante si son entrée, ainsi que la sortie considérée sont uniques. Dans les autres cas le système est dit multivariante. Il est courant de représenter un système ou un des éléments le composant à l'aide d'un schéma, dit schéma bloc (ou diagramme fonctionnel). La Figure 1.1 fournit un exemple d'une telle représentation.

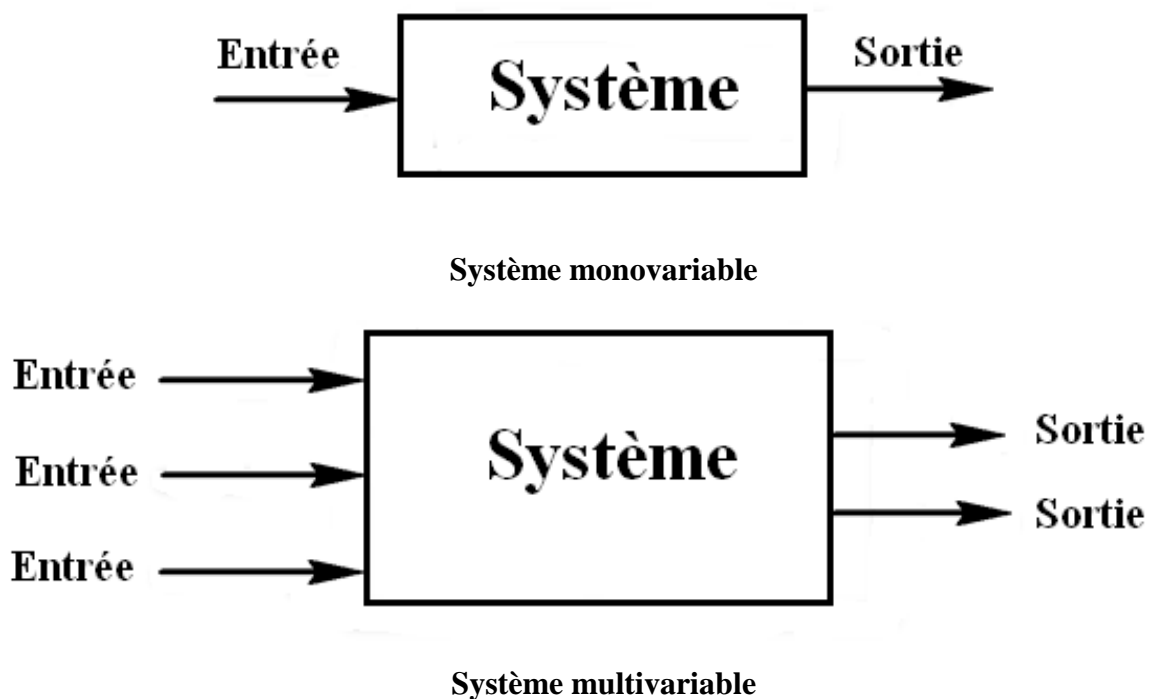


Figure 1.1 : Schéma fonctionnel (schéma bloc) d'un système

Les entrées affectant un système sont généralement notées par la lettre u et les sorties par la lettre y . Les entrées d'un système peuvent être modifiées par l'utilisateur (commande) pour obtenir la sortie désirée. Il peut également exister des entrées qui ne peuvent être modifiées par l'utilisateur. Elles sont appelées perturbations et sont notées par la lettre d . Ces dernières troublent le fonctionnement désiré en sortie (Figure 1.2) [17].

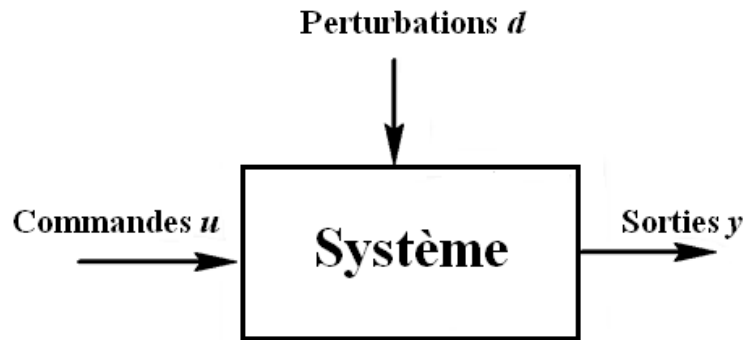


Figure 1.2 : Commandes u et perturbations d

Le but de l'automatique est d'exercer des actions pour que la sortie d'un système ait le comportement désirée et ceci en manipulant les variables de commande.

Il est important de remarquer que l'automatique est une activité multidisciplinaire. Elle n'est pas limitée à aucune discipline spécifique. Exemple: systèmes mécatroniques (intégration des systèmes mécaniques, électriques, et informatiques). On souhaite donc commander (gouverner ou asservir) des grandeurs physiques issues de systèmes technologiques. Ces grandeurs pourront être mécaniques (force, vitesse, position, couple, ...), électriques (tension, courant, puissance, ...), thermiques (température, ...), hydrauliques (pression, débit, niveau, ...), optiques (éclairage, exposition, ...), chimiques (concentration, ...).

Un système est dit continu si entrées et sorties sont continues. Inversement, si en un endroit au moins de la chaîne des éléments le constituant, le signal n'est transmis qu'à des instants discrets privilégiés, le système sera dit discret (ou échantillonné).

Ce cours concerne uniquement l'étude des systèmes linéaires, continus, invariants dans le temps et monovariables (systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants).

Définition 1.3 : un système est causal si la sortie $y(t)$ à un instant t_0 ne dépend que des valeurs de son entrée $u(t)$ pour $t \leq t_0$. Les systèmes physiquement réalisables sont causaux.

Définition 1.4 : un système est dit invariant si sa sortie est identique à tout instant (un retard τ ne change pas la sortie du système).

Définition 1.5 : si la sortie $y(t)$ à un instant donné ne dépend que de l'entrée $u(t)$ à cet instant ($y(t) = a u(t)$) alors le système est dit instantané ou statique. Dans tous les autres cas, il est dit, dynamique ou à mémoire. Exemple : $y(t) = a u(t-\tau)$.

Définition 1.6 : un système est linéaire s'il vérifie le principe de superposition : la sortie $y(t)$ correspondante à la somme de plusieurs entrées $u_1(t) + u_2(t) + \dots$ est égale à la somme $y_1(t) + y_2(t) + \dots$ correspondant à chacune des entrées.

Définition 1.7 : on distingue deux régimes dans l'évolution de la sortie des systèmes :

- le régime transitoire ou libre représente l'évolution de la sortie $y(t)$ dans les premiers instants de la réponse et qui disparaît progressivement,
- le régime permanent ou forcé correspond à la partie qui subsiste quand le régime transitoire est devenu négligeable.

Définition 1.8 : un modèle est un objet mathématique (équations différentielles) reliant le (s) entrée (s) et les sortie (s).

1.2 Notion de Boucle ouverte/Fermée :

On distingue en générale deux structures de commande : la commande en boucle ouverte et la commande en boucle fermée appelée également commande à contre-réaction [8, 9; 14, 17].

1.2.1 Commande en boucle ouverte :

Un système de commande est en boucle ouverte lorsqu'aucune mesure de sortie $y(t)$ n'est utilisée (ne comporte pas de contre-réaction) pour élaborer la commande $u(t)$ (Figure 1.3). Cela nécessite la connaissance d'un modèle de fonctionnement du système à commander, par exemple la connaissance d'un modèle de fonctionnement d'un moteur à courant continu permettra de connaître la tension d'entrée qu'il faudra lui appliquer pour obtenir la vitesse de rotation désirée.

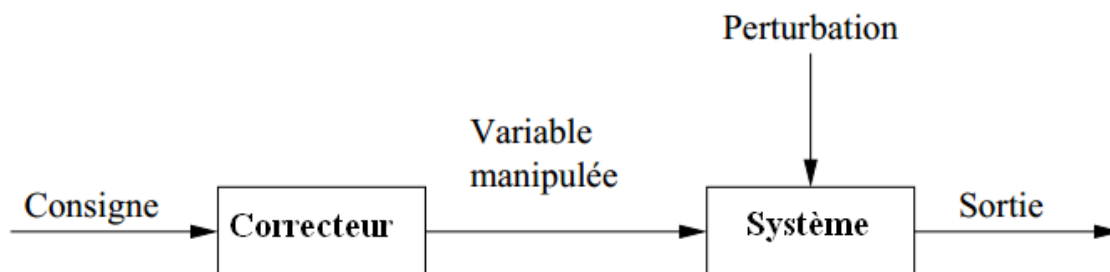


Figure 1.3 : Commande en boucle ouverte

Cette solution est envisageable dans le cas où le système est parfaitement connu et modélisé et dans le cas où l'obtention d'une mesure de la sortie n'est pas économiquement possible.

Exemple 1.1 : prenons l'exemple de l'asservissement de la température $y(t)$ d'une pièce chauffée par des radiateurs de chauffage central. Pour agir sur $y(t)$ on fait varier le débit d'eau dans les radiateurs par l'intermédiaire d'une petite vanne. Mais la température dans le local est aussi sensible à la température de l'eau qui circule, à la température extérieure, à l'ouverture d'une porte ou d'une fenêtre, au nombre de personnes qui entrent, etc.... Il s'agit d'une commande sans retour d'information de la grandeur de sortie.

Exemple 1.2 : un autre exemple simple est celui de la machine à laver fonctionnant sur la base de cycles préprogrammés ne possédant pas d'informations mesurées concernant le degré de propreté du linge. Toutefois, si des perturbations l'affectent (poids ou type du linge, quantité ou qualité de l'eau), le résultat obtenu ne sera pas celui souhaité.

Dans les deux exemples, l'élément correcteur est l'homme, c'est lui qui réalise l'asservissement du système en corrigeant l'écart entre la sortie souhaitée et celle obtenue.

La commande en boucle ouverte possède les inconvénients suivants :

- on ne peut pas commander un système qui subisse des problèmes d'instabilité (nous reviendrons plus en détail sur la notion de stabilité lors d'un prochain chapitre),
- correction difficile : n'ayant aucune information sur la sortie, l'opérateur ne peut élaborer aucune stratégie d'ajustement pour obtenir une sortie possédant la valeur souhaitée avec précision et rapidité.

1.2.2 Commande en boucle fermée :

Afin de résoudre les problèmes de la commande en boucle ouverte et d'automatiser le système (supprimer l'action humaine) on introduit une boucle de retour (ou rétroaction). Dans cette stratégie de commande, une mesure de la sortie est utilisée et comparée avec la consigne par le correcteur (Figure 1.4).

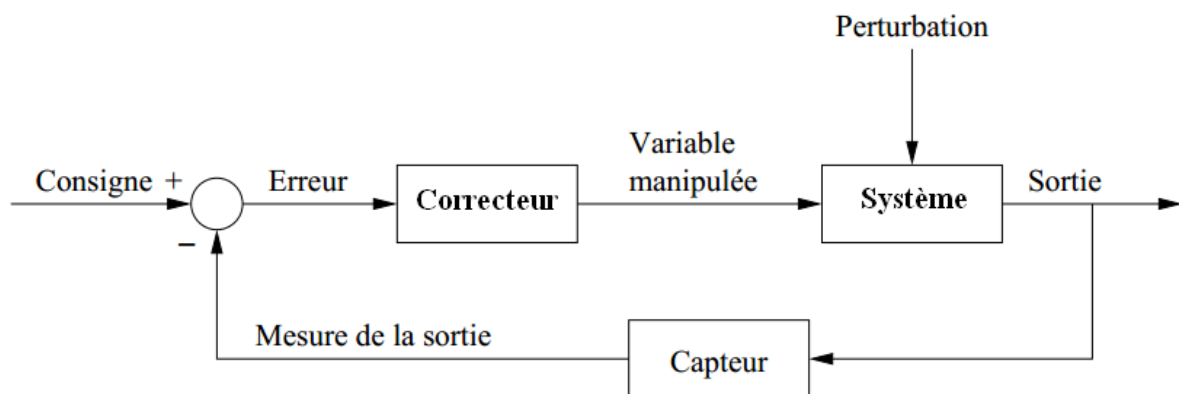


Figure 1.4 : Commande en boucle fermée

avec:

- **la consigne ($y_r(t)$ ou $y_c(t)$)** : elle correspond à la valeur souhaitée en sortie,
- **la sortie commandée $y(t)$ (asservie)** : représente le phénomène physique que doit asservir le système de commande (l'asservissement),
- **Écart ou erreur ($\varepsilon(t)$)** : représente la différence entre la consigne et la sortie,
- **Comparateur** : compare en permanence ce que l'on obtient à ce que l'on souhaite obtenir en sortie (élabore l'écart $\varepsilon(t)$),
- **Correcteur** : le correcteur (contrôleur) traite le signal d'écart et détermine le signal de commande,
- **Actionneur** : il reçoit du correcteur le signal de commande et agit directement sur le système à commander. Il représente le "muscle" qui va piloter l'évolution du système (par exemple : amplificateur de puissance, moteur, vérin, vanne, etc...),
- **Capteur** : organe de mesure qui donne une image aussi fidèle que possible de la sortie $y(t)$ et la transforme en un signal compréhensible par le comparateur (le plus souvent électrique). La sensibilité du capteur impose donc les limites de la précision de l'asservissement (par exemple : accéléromètre, thermomètre, gyroscopes, ...).

On peut donc définir un **asservissement (système asservi)** comme un système bouclé (boucle fermée) dont le fonctionnement tend à annuler l'écart entre une grandeur commandée (la sortie $y(t)$) et une grandeur de commande (la consigne $y_r(t)$).

Ainsi, dans l'exemple 1 (asservissement de la température d'une pièce), on obtient le schéma de principe décrit par la Figure 1.5 suivante :

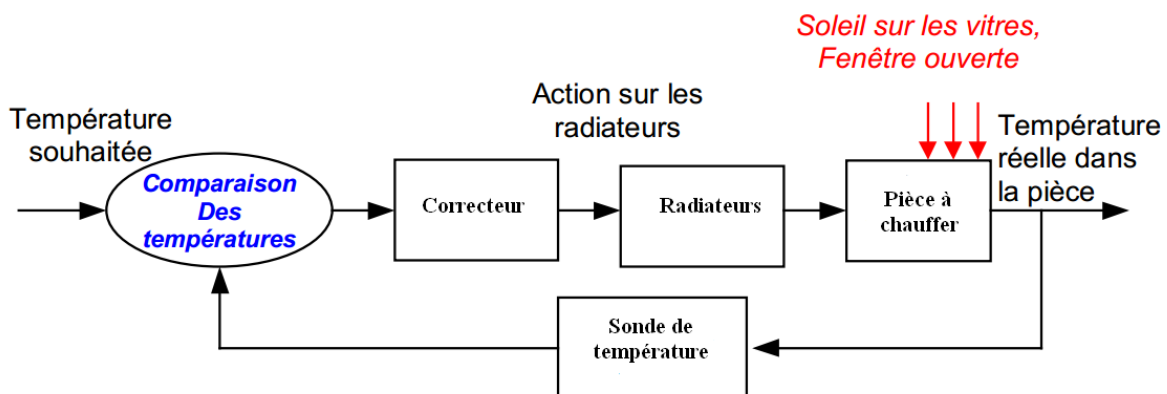


Figure 1.5 : Asservissement de la température d'une pièce

La température souhaitée représente la consigne (fixée par l'utilisateur) est comparée à la valeur mesurée par la sonde de température (thermomètre). Le correcteur délivre alors un signal de commande en fonction de la valeur et du signe de l'écart entre la valeur souhaitée et la température de la pièce, soit de chauffer si la température de la pièce est inférieure à la température de consigne, soit d'arrêter de chauffer si la température de consigne est atteinte (c'est le principe du thermostat).

Dans la vie quotidienne nous sommes pratiquement toujours en boucle fermée. Pour chaque geste nous disposons d'un capteur (un de nos cinq sens, la vue, le toucher...), d'un correcteur (notre cerveau), d'un actionneur (muscles et articulations) pour tenter de rapprocher la situation réelle de celle qui est désirée.

Exemple 1.3 :

La personne qui prend sa douche utilise le mitigeur pour obtenir un mélange eau chaude-eau froide correspondant à une température souhaitée (la consigne). En fonction de sa sensation, elle actionne les robinets.

Exemple 1.4 :

Quand nous préparons une sauce, la consigne est d'obtenir la saveur souhaitée. Si on ne goûte pas, c'est raté!

Exemple 1.5 :

Le conducteur qui conduit une voiture évalue la distance séparant sa voiture du bord de la route et réagit sur le volant pour suivre la route.

La finalité d'un asservissement est de remplacer l'homme ou de suppléer à ses limites dans diverses tâches. Pour se faire, l'adaptation de la démarche de raisonnement en trois phases : observation, réflexion et action est nécessaire (Figure 1.6) [14].

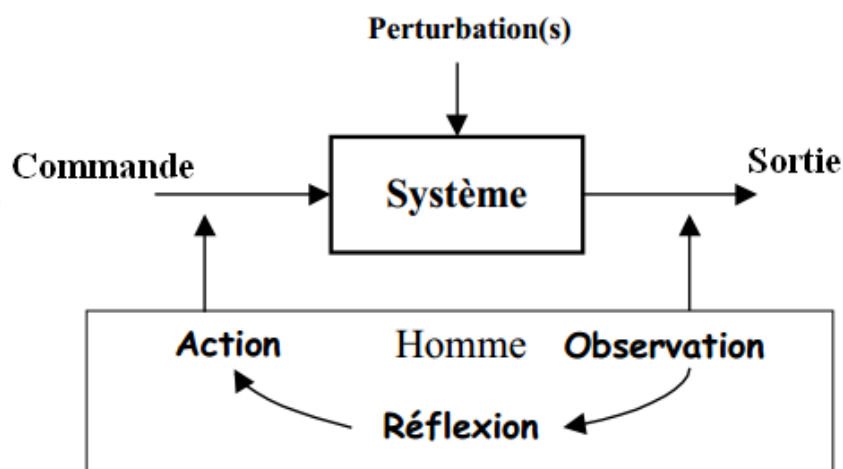


Figure 1.6 : Asservissement et le comportement humain

1.3 Petit historique :

Cette section décrit un petit historique du développement des systèmes de commande en boucle fermée [4].

- **300 avant J.C.** : la première mise en œuvre de système de commande à contre-réaction est l'œuvre des grecs dans l'antiquité avec des régulations de niveau par flotteur afin de mesurer précisément le temps,
- **800 - 1200** : différents ingénieurs Arabes (Al-Jazari, les trois frères Musa) utilisent des régulateurs à flotteur pour des horloges à eau et autres applications. Durant cette période, le principe de la commande tout ou rien est pour la première fois utilisé,
- **1600 - 1900** : la révolution industrielle débute réellement avec l'avènement des systèmes de commande à contre-réaction (régulation des moulins à vent 1588, régulation de température 1624, régulation de vitesse d'une machine à vapeur 1769, régulation de pression 1799),
- **1800-1935** : cette période préclassique de la théorie de la commande fût celle pendant laquelle les principales contributions furent d'ordre mathématique (équations différentielles),
- **1940-1960** : la deuxième guerre mondiale a joué le rôle de stimulant intellectuel primordial pour le développement des systèmes de commande et a donné naissance à la période dite classique (techniques fréquentielles),
- **1960-1980** : période moderne avec le développement de l'industrie aéronautique et spatiale. Les techniques fréquentielles classiques ne suffisent plus et des techniques temporelles appropriées doivent être proposées (commande optimale),
- **1980- ?** : l'introduction des capacités de calcul étendues et l'extension des logiciels de simulation et d'assistance à la conception s'est traduite par la réunification des théories classique et moderne (intelligence artificielle, commande robuste).

1.4 Régulation et poursuite :

Un asservissement (système asservi, système en boucle fermée, système de commande) peut être utilisé en **régulation** ou en **poursuite**. Un asservissement est utilisé en régulation (système régulé) lorsque la consigne est constante ou évoluant par paliers). La sortie doit maintenir constante malgré la présence des perturbations. Si par contre la consigne évolue constamment ou suit une grandeur physique indépendante du système lui-même (radar de

poursuite, asservissement de position, etc...) l'asservissement fonctionne en poursuite (système suiveur). L'objectif est alors que la réponse du système suive la consigne [14].

1.5 Méthodologie :

En automatique, la méthodologie utilisée pour concevoir un système de commande peut s'opérer de la manière suivante [8]:

- **Cahier des charges** : le point de départ de n'importe quel projet est le cahier des charges. L'automaticien doit prendre connaissance du problème et des diverses spécifications. Il doit, à cette occasion, clairement définir le système (avec ses entrées et ses sorties) et les performances attendues,
- **Modélisation** : souvent l'automaticien doit décrire le comportement du système étudié grâce aux lois de la physique (modélisation) ou à partir des mesures entrée/sortie pour obtenir un ensemble d'équations algébriques et différentielles. Ensuite, il doit reformuler celles-ci de manière à obtenir un modèle classique en automatique (une fonction de transfert par exemple),
- **Analyse** : il convient dans cette phase d'utiliser des techniques de l'automatique pour juger des performances du système (stabilité, temps de réponse, oscillations, précision ...) à partir du modèle,
- **Synthèse** : la dernière phase consiste à concevoir un correcteur c'est-à-dire une boucle qui confère au système étudié les performances souhaitées si cela est possible.

1.6 Performances d'un asservissement :

1.6.1 Stabilité :

On peut donner à la stabilité la définition suivante : un système est stable si sa sortie tend vers zéro lorsque son entrée s'annule.

1.6.2 Précision :

En appelant $y(t)$ la sortie correspondant à la consigne $y_C(t)$, on peut caractériser à chaque instant la précision d'un asservissement par l'erreur : $\varepsilon(t) = y_C(t) - y(t)$. on distingue deux types de précision :

- **Précision dynamique** : tant que la partie transitoire de la réponse n'est pas devenue négligeable, $\varepsilon(t)$ caractérise l'erreur dynamique,

- **Précision statique** : l'erreur statique est l'erreur qui subsiste en régime permanent, c'est-à-dire $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ quand t tend vers l'infini.

1.6.3 Rapidité :

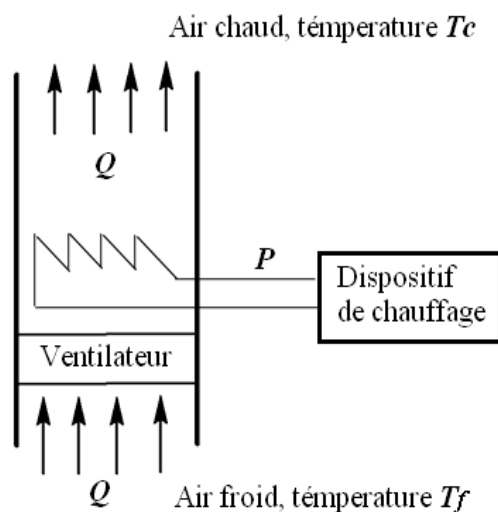
La rapidité d'un système peut se mesurer par le temps de réponse, à un pourcentage donné, à une entrée en échelon. On utilise fréquemment le temps de réponse à 5%, c'est-à-dire le temps à partir duquel la réponse est comprise entre 95% et 105% de sa valeur finale.

Exercices sur le chapitre 1

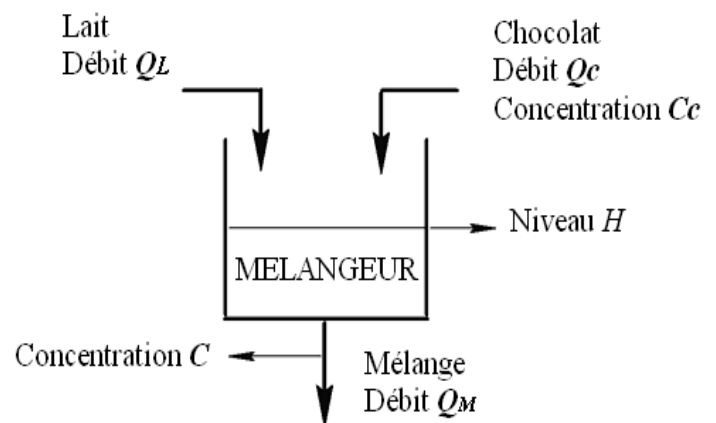
Exercice 1 :

Déterminer le schéma fonctionnel des systèmes suivants :

- **Aérotherme** : un débit d'air Q est chauffé à une température T par l'intermédiaire d'une résistance électrique sur laquelle est appliquée une puissance électrique P . Le ventilateur à deux vitesses permet d'avoir le débit d'air désiré. La grandeur à maîtriser est la température T_c . Les grandeurs qui agissent sur la température T_c sont le débit de l'air Q , la température T_f et la puissance électrique P ,
- **Mélangeur de lait et de chocolat** : afin de fabriquer industriellement du lait chocolaté, on mélange du chocolat à du lait. On souhaite contrôler la qualité du mélange obtenu à partir d'une analyse donnant la concentration en chocolat. Le niveau permet de connaître le volume dans le mélangeur. Les grandeurs à maîtriser sont le niveau H et la concentration C . Les grandeurs qui agissent sur le niveau H sont le débit de lait Q_L , le débit de chocolat Q_C et le débit du mélange Q_M . Les grandeurs qui agissent sur la concentration du mélange C sont le débit de lait Q_L , le débit de chocolat Q_C et la concentration en chocolat C_C .



Aérotherme

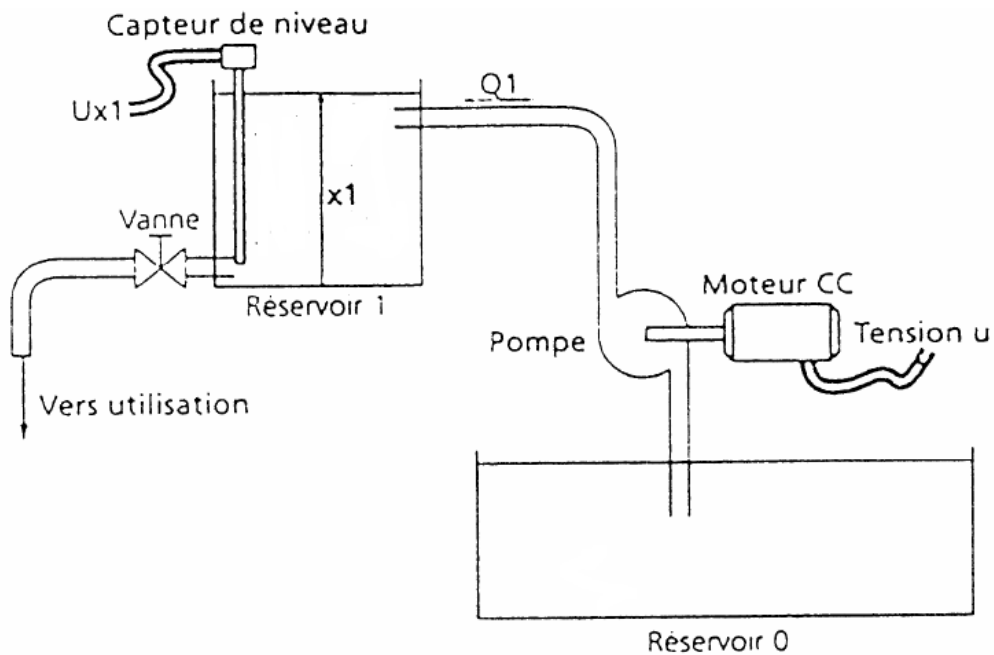


Mélangeur de lait et de chocolat

Exercice 2 :

Commande de remplissage de cuve: On désire maintenir le niveau du réservoir 1 constant afin de garantir la pression d'utilisation. On dispose d'un actionneur : un moteur à courant continu d'un capteur : capteur de niveau. On définit le niveau souhaité par une consigne. Tant que le réservoir n'a pas atteint la valeur de consigne le moteur entraînant la pompe

fonctionne. Lorsque le capteur indique la valeur désirée, l'écart devient nul et le moteur n'est plus alimenté. Ce système possède un nombre important de perturbations : évaporations, fuites mais surtout débit de l'utilisateur. Définir le schéma fonctionnel du système.



Exercice 3 :

Grill pain automatique

En boucle ouverte : c'est un système de commande contrôlé par un minuteur. Le temps nécessaire de préparer « un bon pain grillé » doit être estimé par l'utilisateur, qui ne fait pas partie du système.

En boucle fermée : Supposant que l'élément de chauffage fournit la même quantité de chauffage de deux côtés du pain, et que la qualité de grillade est déterminée par la couleur du pain. Ce système est initialement calibré par une vis pour avoir une qualité désirée de grillade (consigne). Quand l'interrupteur est fermé, le pain sera grillé jusqu'à ce que sa couleur (détekté par un détecteur de couleur) devienne proche de la couleur désirée. Dans ce cas, l'interrupteur s'ouvre automatiquement grâce au retour qui peut être mécanique ou électrique. Donner le schéma fonctionnel pour les deux cas.

Exercice 4 :

Asservissement de la vitesse d'une automobile

L'objectif de cet exercice est de maintenir constante à la valeur désirée la vitesse d'une automobile malgré la présence des vents et l'état de la route. L'automobile roule à une certaine vitesse qui est mesurée par l'odomètre. La vitesse mesurée est comparée avec celle

désirée afin de détecter si l'automobile se déplace à la vitesse voulue. La différence de vitesse, s'il y a lieu, est utilisée par un algorithme de calcul qui ajuste la quantité d'essence qu'envoient les injecteurs au moteur. Déterminer le schéma fonctionnel de l'asservissement.

Chapitre 2. Modélisation des systèmes dynamiques linéaires continus

2.1 Modélisation

Pour commander correctement un système, il est nécessaire de définir un modèle mathématique qui représente la relation entre les signaux d'entrée et les signaux de sortie. À l'aide de ce modèle mathématique, il est possible de calculer la sortie du système étudié si on connaît l'entrée et les conditions initiales. L'ensemble des procédures permettant d'obtenir un modèle mathématique est la modélisation [17]. On peut distinguer deux sortes de modèle :

- **le modèle de connaissance** est obtenu en se basant sur les lois de la physique (Newton, Kirchoff...) qui régissent le comportement du système. Les paramètres d'un tel modèle ont alors une interprétation physique,
- **le modèle de représentation** est un modèle déterminé à partir de données expérimentales (données entrée-sortie). Les paramètres de ce modèle n'ont pas d'interprétation physique.

Quand le système étudié est complexe, l'écriture des lois physique régissant le système devienne difficile. Dans ce cas, on cherchera un modèle de représentation permettant de modéliser le fonctionnement du système étudié. Ce chapitre a pour but de donner les principales représentations d'un système dynamique linéaire continu temps invariant monovariante [4, 8-12].

2.2 Représentations temporelles

2.2.1 Représentation par une équation différentielle

La plupart du temps, on représente un système dynamique linéaire continu monovariante d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ par une équation différentielle à coefficients constants de la manière suivante:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_c \frac{d^c y(t)}{dt^c} = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u(t) \quad (2.1)$$

où :

- les coefficients a_i et b_i sont des constantes réelles, telles que a_c , a_n , b_0 et b_m soient non nuls,

- n et m sont des entiers positifs tels que $m \leq n$ pour que le système soit causal; n est l'ordre du système,
- c est un entier positif ou nul appelé classe du système.

Cette équation différentielle est une représentation entrée/sortie du système. La solution de cette équation représente l'évolution de la sortie du système $y(t)$ au cours du temps en fonction de l'entrée $u(t)$ et de conditions initiales.

Exemple 2.1 :

Considérons le circuit RLC ci-dessous :

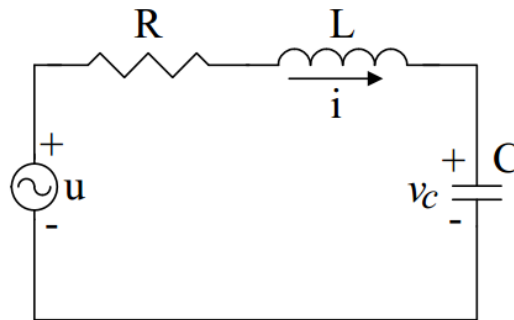


Figure 2.1 : Circuit RLC

On veut déterminer la relation liant $u(t)$ (tension d'alimentation) et $y(t)$ (le courant $i(t)$). L'équation de maille donne :

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = u(t) \tag{2.2}$$

$$L \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + R \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{C} y(t) = \frac{du(t)}{dt} \tag{2.3}$$

Exemple 2.2 :

La Figure 2.2 montre une suspension de masse M dont on veut définir la relation liant le déplacement linéaire $y(t)$ (sortie) et la force $f(t)$ (entrée).

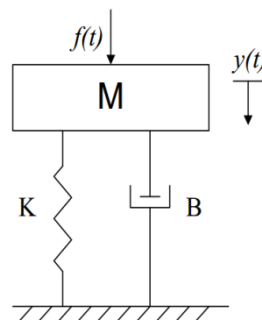


Figure 2.2 : Schéma d'une suspension

L'équation de Newton donne :

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = f(t) - B \frac{dy(t)}{dt} - Ky(t) \quad (2.4)$$

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = f(t) \quad (2.5)$$

2.2.2 Représentation par le modèle d'état

De manière alternative, le comportement d'un système linéaire invariant d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ peut être décrit par un nombre fini de grandeurs appelées variables d'états. Ces variables permettent de déterminer les évolutions futures du système à partir des états initiaux et de l'entrée. Un modèle d'état est un ensemble fini d'équations différentielles du premier ordre reliant des grandeurs scalaires, divisées en variables internes (variables d'états) et en variables externes comprenant les signaux d'entrée et de sortie [4, 5, 8, 9, 17]. La forme générale d'un tel modèle est la suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) & \text{(équation d'état)} \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) & \text{(équation de sortie)} \end{cases} \quad (2.6)$$

où $A \in R^{n \times n}$ est la matrice d'état ou d'évolution, $B \in R^{n \times 1}$ est la matrice d'entrée, $C \in R^{1 \times n}$ est la matrice de sortie ou d'observation et le scalaire D représente la transmission directe de l'entrée sur la sortie. L'état et la sortie peuvent ainsi être calculés, à tout instant, pour des CI $x(0)$ quelconques.

Il est important de noter que, contrairement à la représentation par équation différentielle, la représentation d'état d'un système n'est pas unique et dépend du choix des variables d'état que nous opérons. On adopte fréquemment le schéma-bloc donné par la Figure 2.3 pour illustrer cette représentation.

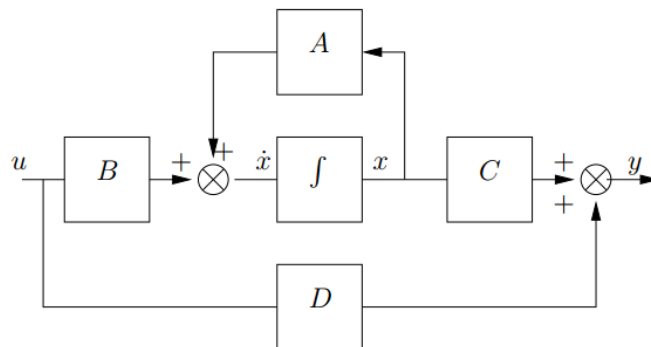


Figure 2.3 : Schéma-bloc d'une représentation d'état

Exemple 2.3 :

Dans le cas du système mécanique de l'exemple 2.2, l'entrée du système est sa force $f(t)$ alors que sa sortie est représentée par le déplacement linéaire $y(t)$. On peut toujours choisir comme variables d'état, dans ce cas (aucune dérivée en n'intervient):

$$\begin{aligned} x_1(t) = y(t) &\Rightarrow \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) &\Rightarrow \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

L'équation (2.5) se réécrit:

$$M \dot{x}_2(t) + B x_2(t) + K x_1(t) = u(t) \quad (2.8)$$

Donc, nous avons le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{K}{M} x_1(t) - \frac{B}{M} x_2(t) + \frac{1}{M} u(t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

On en déduit la représentation d'état :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + 0u(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Reprenons l'exemple électrique 2.1. Supposons maintenant que la sortie du système est la tension aux bornes du condensateur. Dans ce cas, on a :

$$LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad (2.11)$$

On choisit deux variables d'états ($n = 2$): $x_1(t) = y(t)$ et $x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$. Alors, l'équation (2.11) conduit à :

$$\frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = -\frac{1}{LC} x_1(t) - \frac{R}{L} x_2(t) + \frac{1}{LC} u(t) \quad (2.12)$$

On en déduit la représentation d'état :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{pmatrix} u(t) \quad (2.13)$$

$$y(t) = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + 0u(t)$$

2.3 Représentation par fonction de transfert

Une représentation très utilisée pour l'étude des systèmes linéaires est la fonction de transfert (transmittance) obtenue par transformation de l'équation différentielle entrée-sortie en une équation algébrique facile à manipuler [5, 9, 11, 12, 15, 16]. Pour cela on utilise la transformée de Laplace. Nous allons donc tout d'abord présenter un bref rappel de la transformée de Laplace.

2.3.1 Transformée de Laplace

Définition 2.1 : soit $f(t)$ une fonction nulle pour $t < 0$ (causale). La transformée de Laplace de cette fonction est définie par :

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.14)$$

$F(s)$ (transformée de Laplace de $f(t)$) est une fonction de la variable complexe s appelée variable de Laplace. L'existence de cette transformée est soumise à la convergence de l'intégrale qui la définit (pour tout s complexe : $\Re(s) > \alpha$, avec α est le seuil de convergence).

Définition 2.2 : soit $F(s)$ la transformée de Laplace de $f(t)$. La transformée de Laplace inverse de $F(s)$ s'écrit :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (2.15)$$

où l'intégration est effectuée dans la région de convergence de la transformée $F(s)$. En pratique, on utilise rarement la relation (2.15) pour l'inversion, mais plutôt la décomposition en éléments simples pour utiliser les tables de transformées.

Théorème de la valeur initiale : si $f(0^+)$ existe, alors

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (2.16)$$

Théorème de la valeur finale : soit $F(s)$ une fonction qui n'a pas de pôles dans le demi-plan $\Re(s) \geq 0$, sauf au plus un pôle simple à l'origine. Alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (2.17)$$

Les principales propriétés de la transformée de Laplace sont présentées dans le Tableau 2.1.

Tableau 2.1 : Propriétés de la transformée de Laplace

Propriété	$f(t)$	$F(s)$
Linéarité	$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) + k_3 f_3(t) + \dots$	$k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s) + k_3 F_3(s) + \dots$
Échelle du temps	$f(at), a > 0$	$1/a F(s/a)$
Dérivée première	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
Dérivée seconde	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
Dérivée d'ordre n	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
Intégrale	$\int_0^t f(x) dx$	$\frac{F(s)}{s}$
Décalage temporel	$f(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
Multiplier par une exponentielle	$e^{-as} f(t)$	$F(s+a)$
Multiplier par t	$t f(t)$	$\frac{dF(s)}{ds}$
Multiplier par t^n	$t^n f(t)$	$\frac{d^n F(s)}{ds^n}$
Diviser par t	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(x) dx$
Produit de convolution	$\mathcal{L}(f(t) * g(t))$ $= \mathcal{L}\left(\int_{-\infty}^\infty f(\tau) g(t-\tau) d\tau\right)$	$F(s)G(s)$

Le Tableau 2.2 donne les transformées de Laplace des signaux usuels.

Tableau 2.2 : Transformées de Laplace des signaux d'excitation usuels

$f(t)$	$F(s)$	Seuil de convergence
impulsion de Dirac $\delta(t)$	1	$\forall s$
Échelon unitaire $u_{-1}(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re(s) > 0$
Rampe unitaire $t u_{-1}(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\Re(s) > 0$
Fonction puissance $t^n u_{-1}(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\Re(s) > 0$
Fonctions sin et cos	$\frac{w}{s^2 + w^2}, \frac{s}{s^2 + w^2}$	$\Re(s) > 0$

2.3.2 Transformée inverse par décomposition en éléments simples

La décomposition en éléments simples partielles permet de représenter la transformée de Laplace sous la forme suivante [4, 5, 8] :

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = g \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^m (s - p_i)} \quad (2.18)$$

où $m \leq n$ et z_i sont les zéros et p_i les pôles de $F(s)$, $g = b_m / a_n$. On distingue en général trois cas selon la nature des pôles :

Pôles réels et distincts : si les pôles sont réels et distincts, on peut représenter $F(s)$ par :

$$F(s) = \frac{C_1}{s+p_1} + \frac{C_2}{s+p_2} + \dots + \frac{C_n}{s+p_n} \quad (2.19)$$

où $C_i = (s - p_i) F(s)|_{s=p_i}$

Ainsi, on peut prendre la transformée inverse de chacun des termes pour obtenir :

$$f(t) = (C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}) u_{-1}(t) \quad (2.20)$$

Exemple 2.4 :

Trouver la transformée inverse de la fonction suivante :

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+2} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \quad (2.21)$$

En prenant la transformée inverse de chacun des termes, on obtient :

$$f(t) = (2e^{-t} - 2e^{-2t}) u_{-1}(t) \quad (2.22)$$

Pôles complexes et distincts : les pôles complexes résultent en des formes quadratiques au dénominateur.

Exemple 2.5 :

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 2)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2 s + C_3}{s^2 + s + 2} \quad (2.23)$$

où $C_1 = s F(s)|_{s=0} = 1/2$ et $1/2(s^2 + s + 2) + (C_2 s + C_3) s = 1$

$(1/2 + C_2) s^2 + (1/2 + C_3) s + 1 = 1$, $C_2 = C_3 = -1/2$ donc

$$F(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{(s+1/2)+1/2}{(s+1/2)^2+7/4} \right) \quad (2.24)$$

en utilisant la table de transformées, on obtient :

$$f(t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-t/2} \cos(\sqrt{7/4}t) - 1/\sqrt{7} e^{-t/2} \sin(\sqrt{7/4}t)) u_{-1}(t) \quad (2.25)$$

Pôles réels et multiples : si les pôles sont réels et un des pôles se répète k fois, on peut représenter $F(s)$ par :

$$F(s) = \frac{C_k}{(s+p_1)^k} + \frac{C_{k-1}}{(s+p_1)^{k-1}} + \frac{C_1}{s+p_1} + \dots + \frac{C_{k+1}}{s+p_{k+1}} + \dots + \frac{C_n}{s+p_n} \quad (2.26)$$

où pour les pôles simples, on a : $C_i = (s - p_i) F(s) \Big|_{s=p_i}$ et pour le pôle de multiplicité k , on a :

$$C_{k-i} = \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i}{ds^i} [(s+p_i)^k F(s)] \right] \Big|_{s=p_i} \quad \text{avec } i = 0, \dots, k-1.$$

Exemple 2.6 :

Trouver la transformée inverse de la fonction suivante :

$$F(s) = \frac{s^2+s+3}{(s+1)^3} = \frac{C_3}{(s+1)^3} + \frac{C_2}{(s+1)^2} + \frac{C_1}{s+1} \quad (2.27)$$

où $C_3 = [(s+1)^3 F(s)] \Big|_{s=-1} = 3, C_2 = \left[\frac{d}{ds} [(s+1)^3 F(s)] \right] \Big|_{s=-1} = -1, C_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{ds^2} [(s+1)^3 F(s)] \right] \Big|_{s=-1} = 1$

donc :

$$F(s) = \frac{3}{(s+1)^3} + \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} \quad (2.28)$$

en utilisant la transformée inverse de chacun des termes, on obtient :

$$f(t) = (t^2 - t + 1)e^{-t} u_{-1}(t) \quad (2.29)$$

Remarque 2.1: si $m = n$, on fera apparaître dans $f(t)$ une impulsion de Dirac.

2.3.3 Fonction de transfert

Soit un système linéaire invariant d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$. On appelle fonction de transfert du système le rapport des transformées de Laplace de la sortie et de l'entrée, à conditions initiales nulles :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (2.30)$$

La fonction de transfert est aussi la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle (la réponse impulsionnelle d'un système est sa sortie à une entrée sous forme d'impulsion de Dirac, avec conditions initiales nulles). Le dénominateur de la fonction de transfert est dit le polynôme caractéristique du système, et l'ordre du système est le degré de ce polynôme. On peut alors représenter le système sous la forme graphique ci-dessous :

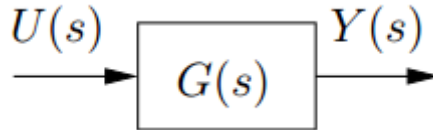


Figure 2.4 : Diagramme fonctionnel d'une fonction de transfert

Exemple 2.7 :

À partir du modèle de la suspension constitué par l'équation différentielle (2.5), on peut calculer sa fonction de transfert en prenant la transformée de Laplace avec conditions initiales nulles :

$$Ms^2Y(s) + BsY(s) + KY(s) = U(s) \tag{2.31}$$

Donc, la fonction de transfert du système s'écrit:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \tag{2.32}$$

Il s'agit d'un système du second ordre et de classe 0.

2.3.4 Passage de la représentation d'état à la fonction de transfert

L'application de la transformée de Laplace au modèle d'état (2.6) nous donne :

$$sX(s) = AX(s) + BU(s),$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s).$$

soit :

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s),$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

où I est la matrice identité, finalement :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{2.32}$$

2.4 Algèbre des diagrammes fonctionnels

Dans le cas d'un système constitué d'un ensemble de composants interconnectés, il est possible d'adopter une représentation sous forme d'un diagramme fonctionnel d'interprétation directe à partir des fonctions de transfert des composants. Un diagramme fonctionnel est composé de blocs fonctionnels représentant les composants élémentaires. Ces blocs sont reliés par des flèches représentant un signal, l'orientation de la flèche indiquant le sens du signal. Cette représentation peut contenir également le bloc sommateur qui permet d'additionner ou de soustraire des signaux, à l'entrée de la flèche dans le sommateur le signe affectant le signal est indiqué. Les principales opérations permettant de réarranger les blocs en vue de la simplification/réduction sont représentées aux Figures 2.5-2.9 [4, 8, 13].



Figure 2.5 : Systèmes en série (cascade)

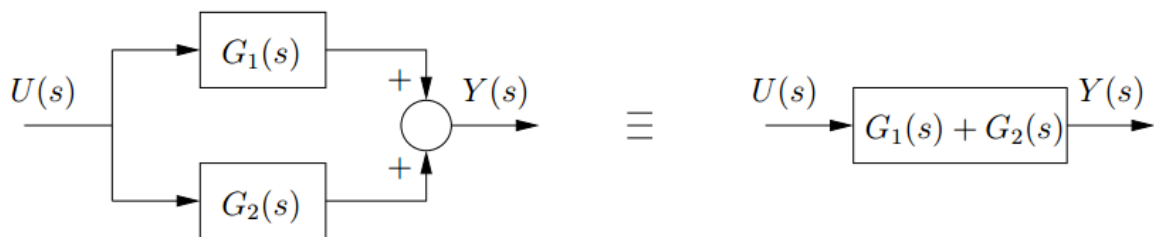


Figure 2.6 : Systèmes en parallèle

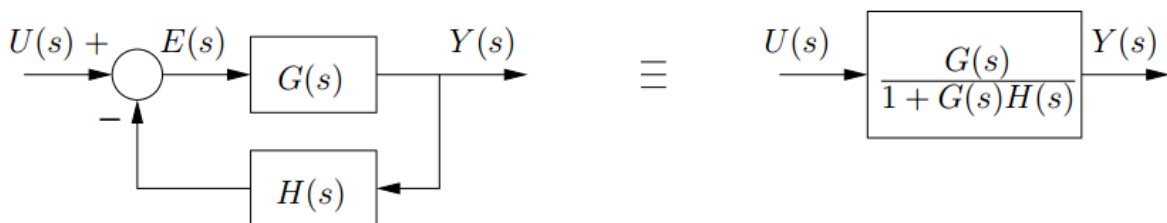


Figure 2.7 : Systèmes en contre-réaction

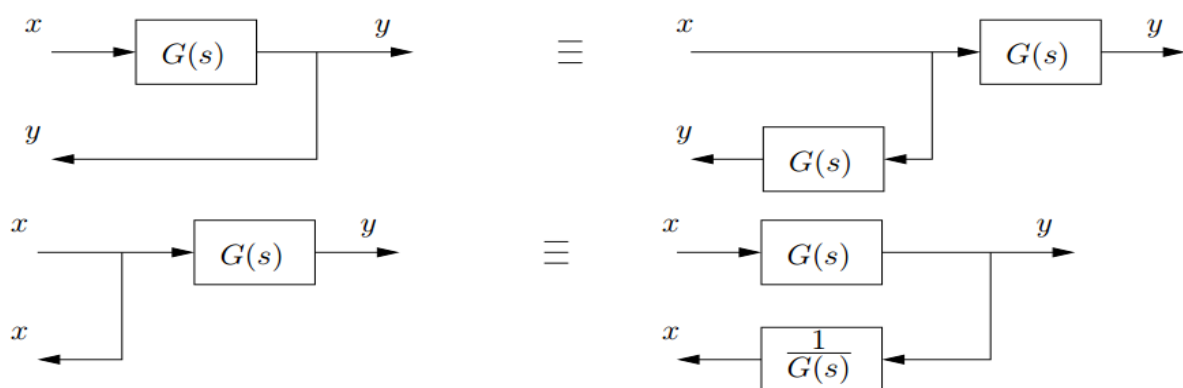


Figure 2.8 : Déplacement d'un point de départ

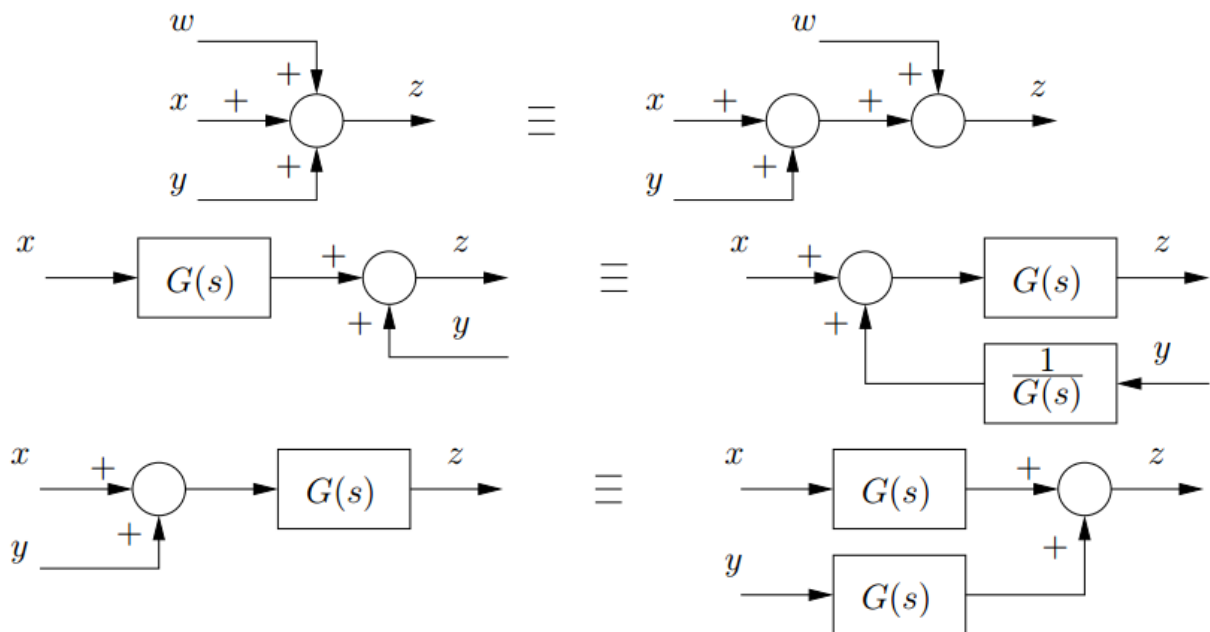


Figure 2.9 : Déplacement d'un sommateur

Exemple 2.8 :

À titre d'exemple, on considère le diagramme de la Figure 2.10, il est possible d'utiliser les règles présentées ci-dessus pour obtenir la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_1 - G_2 G_3 H_3}$$

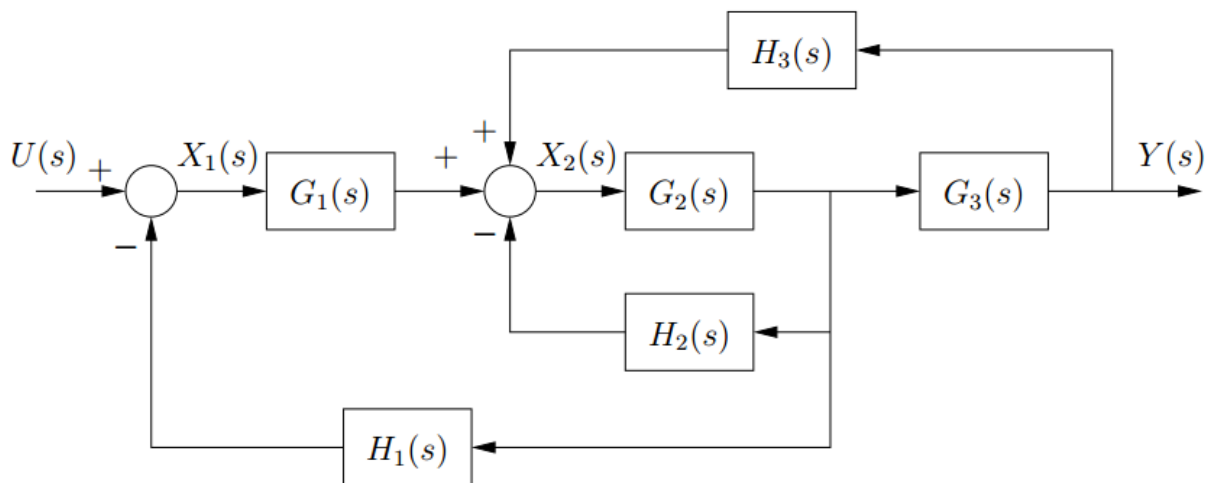


Figure 2.10 : Exemple de simplification de diagramme

2.5 Représentation par graphe de fluence

Cette représentation, très proche de la représentation par diagramme fonctionnel, utilise les propriétés des systèmes linéaires [8].

Une variable est représentée par un nœud et une liaison entre variables par un arc, c'est-à-dire une branche orientée.

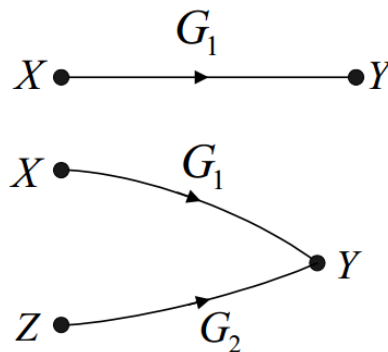


Figure 2.11 : Nœuds et branches

Il vient pour la Figure 2.11 :

$$\begin{aligned} Y &= G_1 X \\ Y &= G_1 X + G_2 Z \end{aligned} \tag{2.33}$$

Remarque 2.2 : l'orientation d'une branche représente une seule relation dans le sens indiqué.

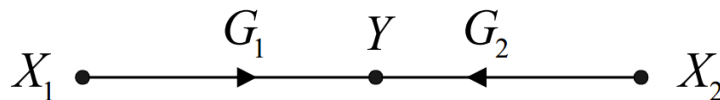


Figure 2.12 : Orientation d'une branche

La Figure 2.12 représente $Y = G_1 X_1 + G_2 X_2$ non pas $X_2 = (1/G_2)Y$.

La valeur de la variable représentée par un nœud est égale à la sommation pondérée des variables qui y sont liées par une branche dirigée vers le nœud (sommateur), le coefficient de pondération ou gain étant la valeur inscrite près de la branche (qui peut être un nombre ou une fonction de transfert). Les principaux éléments que nous utiliserons sont les suivants :

- **nœud source (entrée) :** est un nœud associé à une variable d'entrée (variable externe). Il n'admet que des arcs divergents,
- **nœud puits (sortie) :** il représente une variable choisie comme sortie. Ce nœud n'admet que des arcs convergents,
- **chaîne:** est une liaison entre deux variables réalisée en suivant le sens des flèches et en ne passant pas deux fois par le même point,
- **Chaîne d'action (CA) :** est une chaîne commençant en un nœud d'entrée et finissant en un nœud de sortie ne passant pas deux fois par le même point,
- **Boucle :** chaîne commençant et finissant au même nœud,

- **Gain de chaîne** : est le produit des gains dans la chaîne,
- **Gain de Boucle** : est le produit des gains dans la boucle.

Remarque 2.3 : un nœud peut toujours être transformé en un nœud de sortie (Figure 2.13).

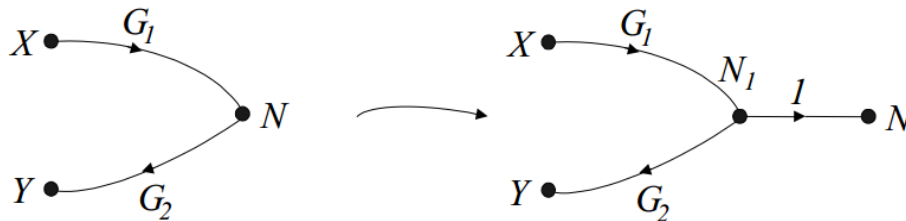


Figure 2.13 : Transformé en un nœud de sortie

Exemple 2.9 :

Considérons un système linéaire décrit par le graphe de fluence de la Figure 2.14.

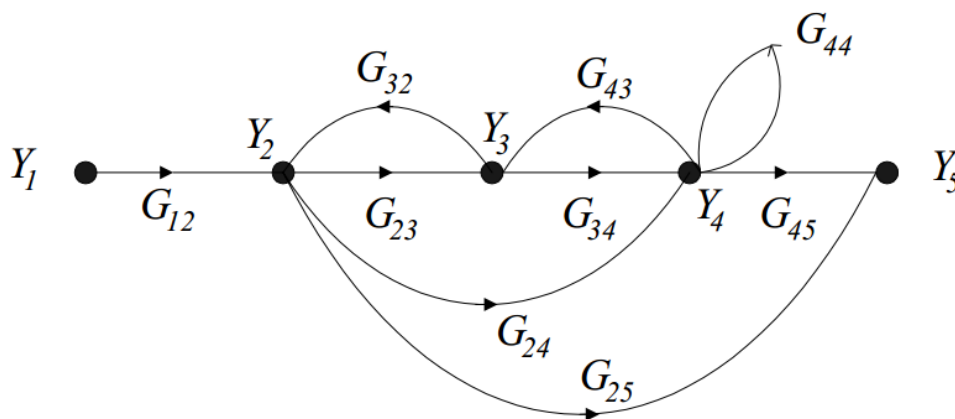


Figure 2.13 : Graphe de fluence d'un système linéaire

On peut distinguer les éléments suivant : **sources** : Y_1 , **puits** : Y_5 , **boucles** : $B_1 = G_{23} G_{32}$, $B_2 = G_{34} G_{43}$, $B_3 = G_{44}$, $B_4 = G_{24} G_{43} G_{32}$ les boucles B_1 et B_3 sont disjointes (ne se touchent pas), chaîne d'action (CA) entre Y_1 et Y_5 : 3 CA : $G_{12} G_{23} G_{34} G_{45}$; $G_{12} G_{24} G_{45}$; $G_{12} G_{25}$.

2.5.1 Formule de Mason

La formule de Mason permet d'obtenir directement d'un graphe de fluence la fonction de transfert. Cette formule est donnée par :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum F_i \Delta_i \quad (2.34)$$

avec :

- F_i est le gain dans la i^e chaîne d'action,

- Δ est le déterminant du graphe. $\Delta = 1 - \sum(\text{tous les gains des boucles individuelles}) + \sum(\text{tous les produits des gains de deux boucles qui ne se touchent pas}) - \sum(\text{tous les produits des gains de trois boucles qui ne se touchent pas}) + \dots$,
- Δ_i est le déterminant de la i^e chaîne d'action. Il correspond à la valeur de Δ pour la partie du graphe ne touchant pas la i^e chaîne d'action.

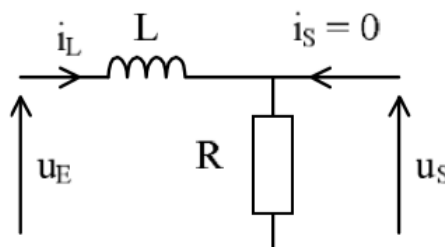
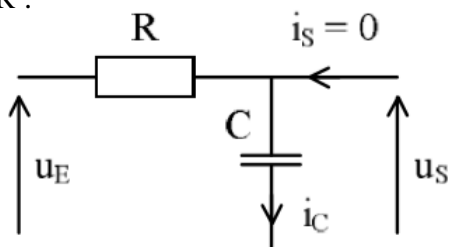
Pour l'exemple 2.9, on a la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_{12}G_{23}G_{34}G_{45} + G_{12}G_{25} + G_{12}G_{24}G_{45}G_{44}G_{34}G_{43}}{1 - G_{23}G_{32} - G_{34}G_{43} - G_{44} - G_{43}G_{32}G_{24} + G_{23}G_{32}G_{44}} \quad (2.35)$$

Exercices sur le chapitre 2

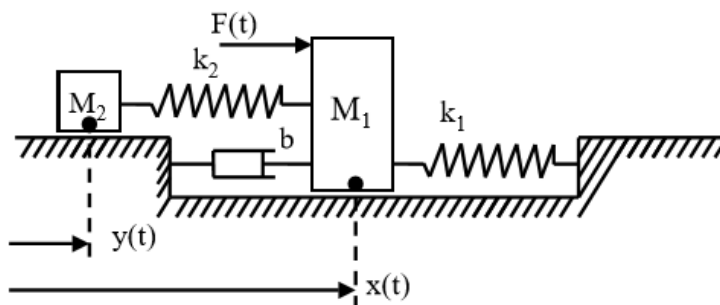
Exercice 1 :

Établir l'équation différentielle reliant la tension de sortie à la tension d'entrée des circuits R.C. et L.R :



Exercice 2 :

On considère le système de deux masses M_1 et M_2 , évoluant sur un plan horizontal, sans frottement. L'objectif est de déterminer l'équation différentielle reliant le mouvement de la masse M_2 ($y(t)$) en fonction de la force appliquée $F(u(t))$ et déduire la fonction de transfert.



Exercice 3 :

Donner la représentation d'état et le diagramme fonctionnel des systèmes décrits par les équations différentielles suivantes :

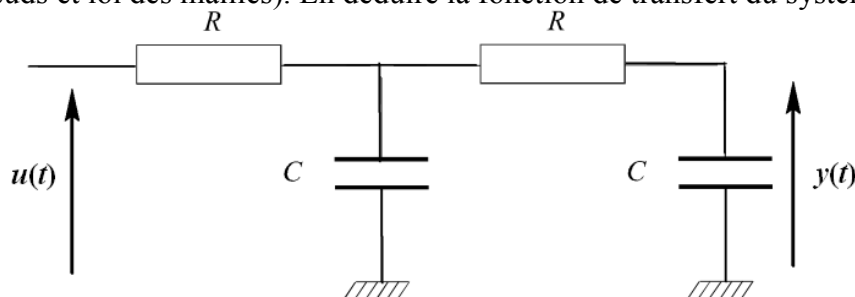
$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t)$$

$$5y''(t) + 3y'(t) - 8y(t) = 2u(t)$$

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = u''(t) + 3u'(t) + 8u(t)$$

Exercice 4 :

Déterminer l'équation différentielle qui lie $u(t)$ à la tension de sortie $y(t)$ en utilisant deux méthodes (loi des nœuds et loi des mailles). En déduire la fonction de transfert du système.



Exercice 5 :

Montrer que : $\frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{\text{TL}} sF(s) - f(0)$

Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

$$f_1(t) = 15\delta(t-4), f_2(t) = 3(2t-3)\delta(t-3), f_3(t) = 5tu_{-1}(t-3)$$

Exercice 6 :

Trouver la transformée de Laplace inverse $f(t)$ des expressions suivantes :

$$F_1(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+1)}, F_2(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+4}, F_3(s) = \frac{s+3}{(s+2)^2} + \frac{2s-1}{s^2+1}$$

Exercice 7 :

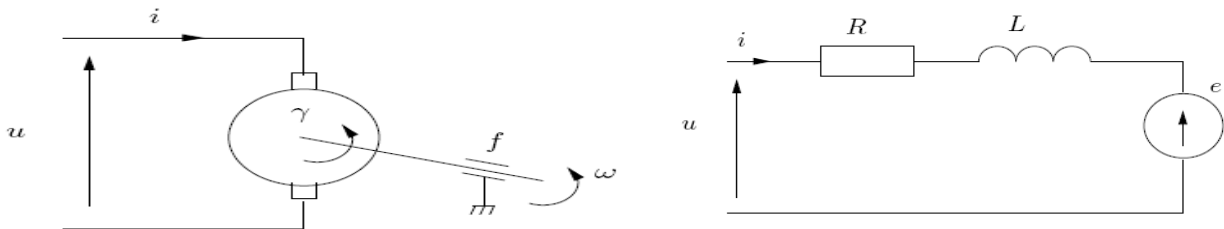
A l'aide de la transformée de Laplace, trouver la solution des équations différentielles suivantes :

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-2t}u_{-1}(t) \text{ (conditions initiales nulles)}$$

$$4y'(t) + y(t) = 2u_{-1}(t) \text{ (} y(0) = 1 \text{)}$$

Exercice 8 :

Soit un moteur électrique à flux inducteur constant (soit à courant inducteur constant, soit à aimant permanent) dont l'induit est alimenté par une tension $u(t)$ et parcouru par un courant $i(t)$ (voir la figure ci-dessous).



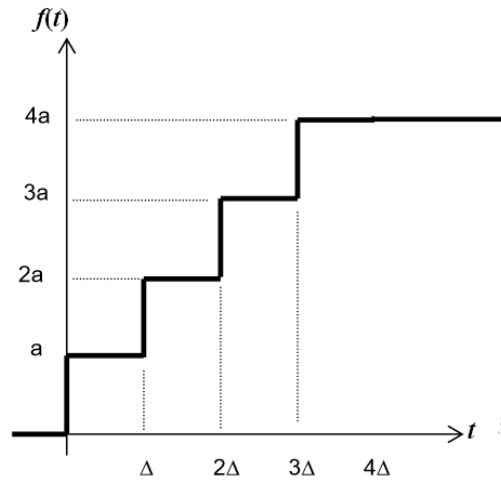
On désigne par :

- e la fcém développée par l'induit,
- J le moment d'inertie du moteur,
- γ est le couple moteur,
- f le coefficient de frottement visqueux
- R la résistance de l'induit,
- L l'inductance de l'induit.

1. déterminer l'équation différentielle reliant ω et u .
2. déterminer la fonction de transfert correspondante.
3. déterminer le modèle d'état.

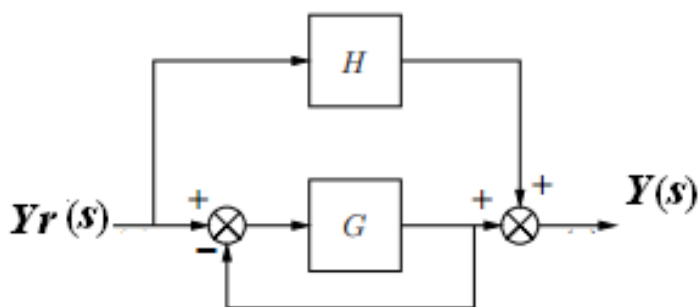
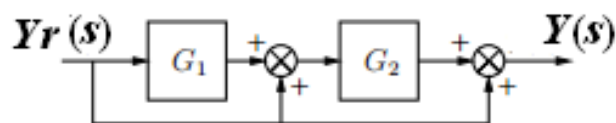
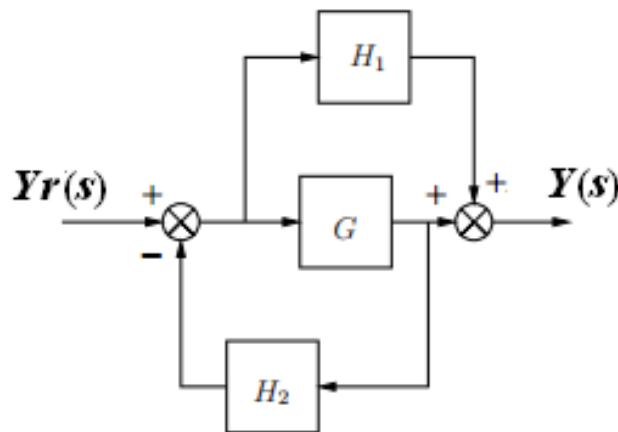
Exercice 9 :

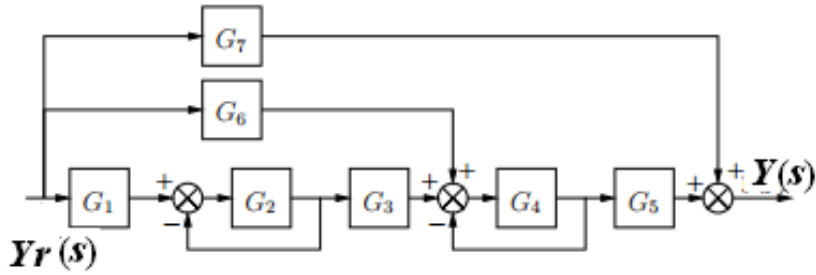
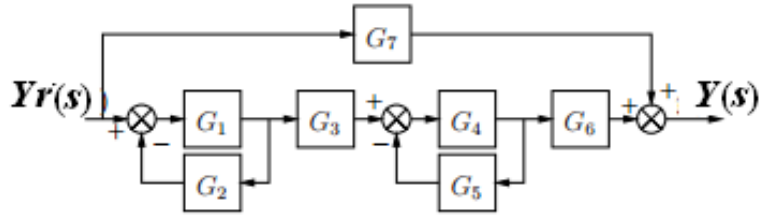
Exprimer le signal suivant en fonction des signaux tests et déterminer sa transformée de Laplace :



Exercice 10 :

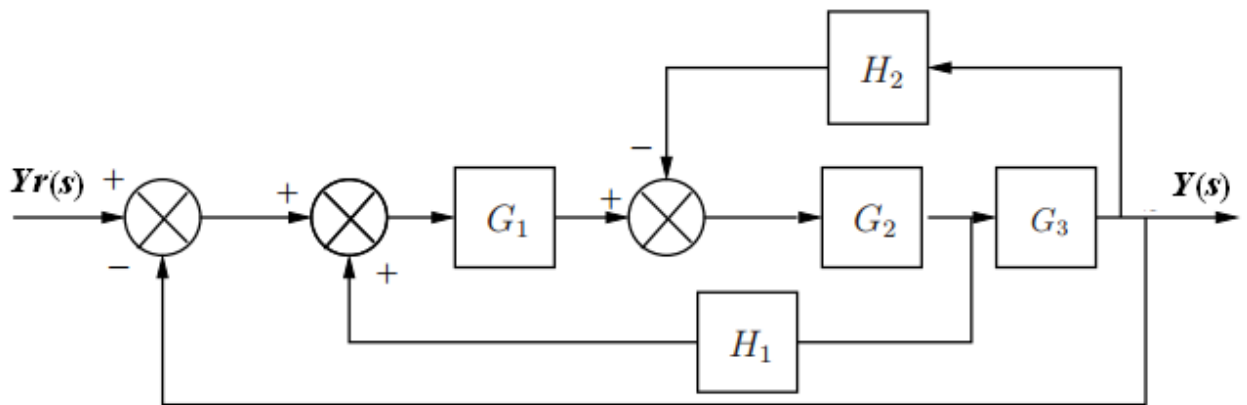
Simplifier les diagrammes fonctionnels suivants (calculer la fonction de transfert entre $Y_r(s)$ et $Y(s)$) :





Exercice 11 :

Soit le diagramme fonctionnel suivant :



1. trouver le graphe de fluence associé,
2. calculer la fonction de transfert en utilisant la formule de Mason.

Chapitre 3. Réponses temporelles des systèmes linéaires

3.1 La réponse temporelle

L'étude temporelle d'un système consiste à déterminer sa réponse (sortie) $y(t)$ à un signal d'entrée $u(t)$ qui varie en fonction du temps, comme l'impulsion de Dirac $\delta(t)$, l'échelon unitaire $u_1(t)$ et la rampe unitaire $r(t)$. Cette réponse permet d'évaluer les performances en rapidité, précision, stabilité [1, 3-6, 9, 11].

La réponse d'un système à une impulsion de Dirac est appelée réponse impulsionnelle; la réponse d'un système à un échelon unitaire est appelé réponse indicielle. L'objet de ce chapitre est d'étudier les réponses temporelles des systèmes du premier et du second ordre aux signaux de référence, auxquels se ramèneront les systèmes d'ordre supérieur, par approximation.

3.2 Calcul de la réponse d'un système

Théorème 3.1 : La réponse d'un système linéaire invariant d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ est donnée par le produit de convolution :

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (3.1)$$

où : $g(t)$ est la transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert.

Par la propriété de convolution temporelle de la transformée de Laplace, nous avons avec conditions initiales nulls :

$$Y(s) = \mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(g(t) * u(t)) = G(s)U(s) \quad (3.2)$$

La sortie $y(t)$ est la transformée de Laplace inverse de $Y(s)$. Il suffit pour cela d'utiliser la décomposition en éléments simples de la fraction $G(s)U(s)$ étudiée au chapitre 2, puis les tables de transformées, pour effectuer l'inversion.

3.2.1 Systèmes du premier ordre

Un système linéaire invariant à temps continu d'ordre un est régi par une équation différentielle du premier degré à coefficients constants. Sa fonction de transfert possède donc au maximum un zéro et un pôle. De manière plus générale, un tel système ne possède pas de zéro. L'équation la plus couramment rencontrée est donc du type :

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t) \quad (3.3)$$

où τ et K sont des constantes réelles positives. Ils ont la signification suivante :

- τ est la constante de temps du système,
- K est le gain statique : le signal d'entrée étant constant, $u(t)=u_0$, le signal de sortie $y(t)$ vaut K fois u_0 lorsque le système n'évolue plus ($dy(t)/dt = 0$).

Le système est appelé élémentaire lorsque la dérivée de l'entrée $u(t)$ n'apparaît pas dans le seconde membre de l'équation différentielle.

La fonction de transfert se déduit de l'équation différentielle du système en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres :

$$\tau s Y(s) + Y(s) = K U(s) \quad (3.4)$$

d'où la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + \tau s} \quad (3.5)$$

Exemple 3.1 :

Soit le circuit RC suivant:

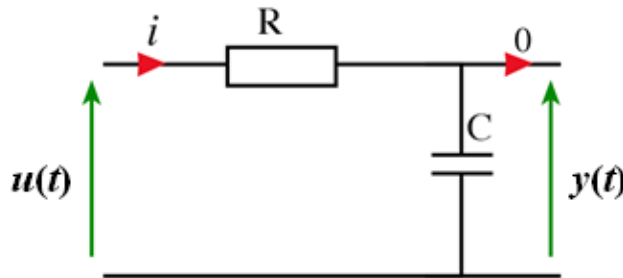


Figure 3.1 : Circuit RC

On veut déterminer la relation entre l'entrée $u(t)$ (tension d'alimentation) et la sortie $y(t)$ (la tension aux bornes du condensateur). Par les lois de Kirchhoff nous avons les équations suivantes :

$$\begin{cases} y(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \\ i(t) = C \frac{dy(t)}{dt} \\ u(t) = R i(t) + y(t) \end{cases} \quad (3.6)$$

En remplaçant le courant $i(t)$ par son expression dans la dernière équation. Il vient :

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad (3.7)$$

Alors la fonction de transfert est donnée par :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1+RCs} \quad (3.8)$$

où $\tau = RC$ et $K = 1$.

Réponse impulsionnelle

On étudie la réponse du système à une entrée $u(t) = \delta(t)$. La transformée de Laplace de l'entrée est alors $U(s) = 1$. L'expression de la sortie du système est :

$$Y(s) = G(s) \Leftrightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{K}{1+\tau s} \right) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau} u_{-1}(t) \quad (3.9)$$

La Figure 3.2 montre la forme de cette réponse. Il est possible de déterminer les deux paramètres du système à partir de l'intersection de la pente de la réponse à l'origine avec l'axe des abscisses, et de la valeur du signal de sortie à l'origine.

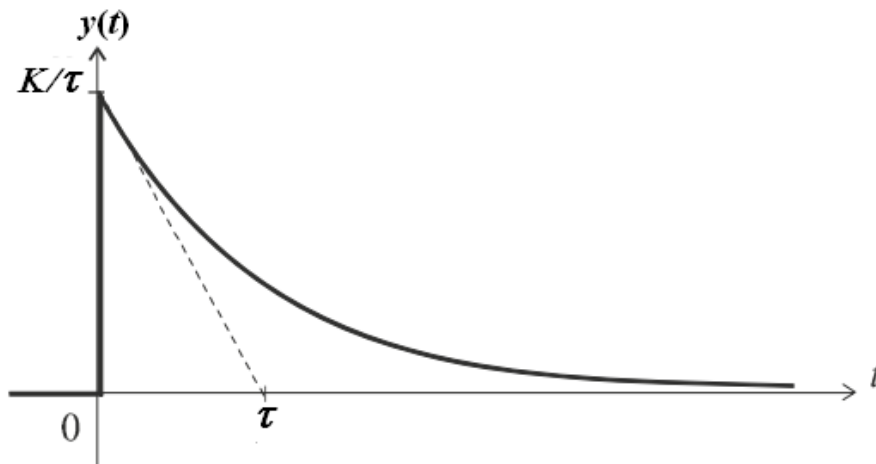


Figure 3.2 : Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre

Réponse indicielle

On étudie la réponse du système à une entrée $u(t) = u_{-1}(t)$. La transformée de Laplace de l'entrée est alors $U(s) = 1/s$. L'expression de la sortie du système est :

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} \Leftrightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{K}{1+\tau s} \frac{1}{s} \right) = K(1 - e^{-t/\tau}) u_{-1}(t) \quad (3.10)$$

La Figure 3.3 montre un exemple d'évolution temporelle de la réponse indicielle d'un système d'ordre un. La détermination des paramètres τ et K du système s'effectue de manière simple, à partir de mesures graphiques sur cette courbe :

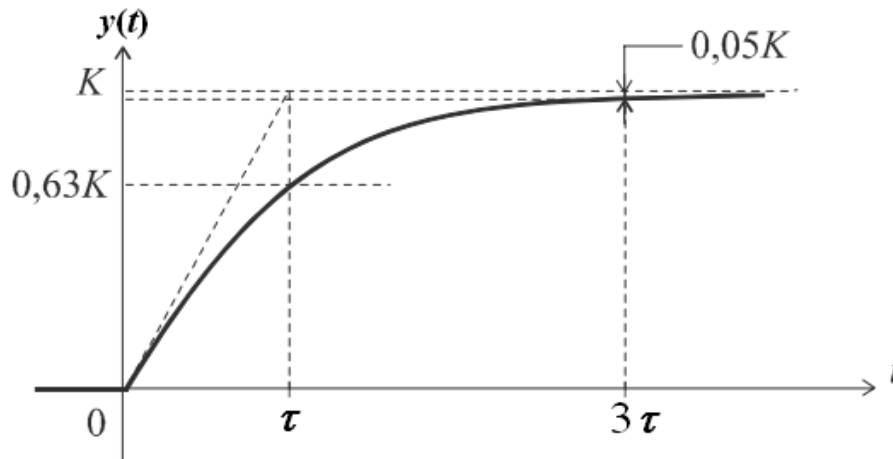


Figure 3.3 : Réponse indicielle d'un système du premier ordre

- le gain statique K s'obtient par le rapport de la variation du signal de sortie par la variation du signal d'entrée (quand t tend vers l'infini) :

$$K = \frac{\Delta y(t)}{\Delta u(t)} \quad (3.11)$$

- pour $t = \tau$, $y(\tau) = K(1 - e^{-1}) \approx 0.63K$. La valeur de τ se détermine alors pour une variation de la sortie de 63% de sa variation totale.

On peut aussi déduire, à partir de ce graphe, le temps de réponse t_r du système. Il représente le temps au bout duquel la sortie atteint sa valeur finale (on dit aussi de sa valeur en régime permanent) à 5 % près. Il est facile de vérifier que ce temps de réponse est de l'ordre de 3τ .

On a :

$$y(t_r) = K(1 - e^{-t_r/\tau}) = 0.95K \Leftrightarrow (e^{-t_r/\tau}) = 0.05 \Leftrightarrow t_r = -\tau \ln 0.05 \approx 3\tau \quad (3.12)$$

Réponse à une rampe

On étudie maintenant la réponse du système à une rampe unitaire $u(t) = r(t)$. La transformée de Laplace de l'entrée est alors $U(s) = 1/s^2$. L'expression de la sortie du système est :

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{K}{1 + \tau s} \frac{1}{s^2} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(K \left(\frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau}{s + 1/\tau} \right) \right) \quad (3.13)$$

$$\text{d'où } y(t) = K(t - \tau + \tau e^{-t/\tau})u_{-1}(t) \quad (3.14)$$

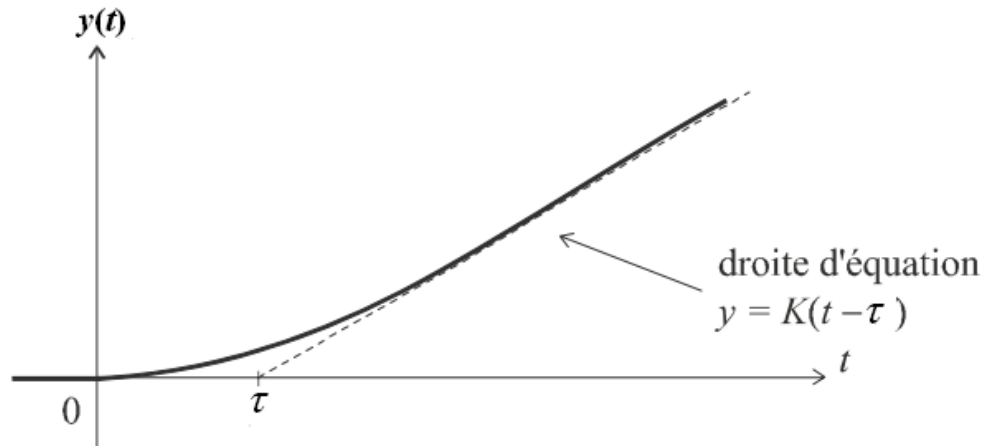


Figure 3.4 : Réponse d'un système du premier ordre à une entrée en rampe

3.2.2 Systèmes du second ordre

Un système linéaire invariant à temps continu d'ordre deux est régi par une équation différentielle du second degré à coefficients constants. Sa fonction de transfert possède donc au maximum deux zéros et deux pôles. De manière plus générale, un tel système ne possède pas de zéro. L'équation la plus couramment rencontrée est donc du type :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} \frac{d y(t)}{dt} y(t) = K u(t) \quad (3.15)$$

où ω_n , ξ et K sont des constantes réelles positives. Ils ont la signification suivante :

- ω_n est la pulsation propre non amortie (ou pulsation naturelle) du système,
- ξ est le coefficient (ou facteur) d'amortissement du système,
- K est le gain statique du système.

La fonction de transfert se déduit de l'équation différentielle du système en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres :

$$\frac{s^2}{\omega_n^2} Y(s) + \frac{2\xi s}{\omega_n} Y(s) + Y(s) = K U(s) \quad (3.16)$$

d'où la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi s}{\omega_n} + 1} \quad (3.17)$$

Exemple 3.2 :

Soit le circuit RLC suivant:

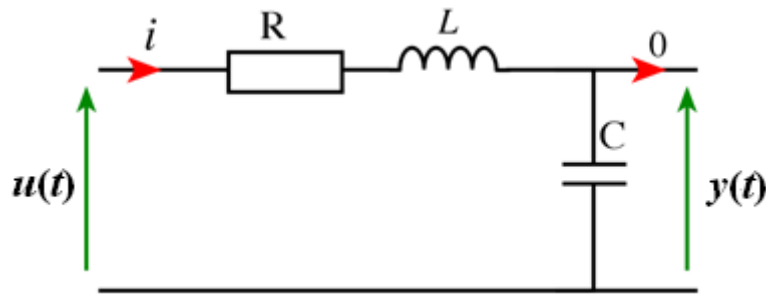


Figure 3.5 : Circuit RLC

Les lois de Kirchhoff donnent :

$$LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad (3.18)$$

Alors la fonction de transfert est donnée par :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (3.19)$$

où $\omega_n = 1/\sqrt{LC}$ (Rad. S⁻¹), $\zeta = R\sqrt{C/4L}$ et $K = 1$.

Réponse indicielle

On étudie la réponse du système à une entrée $u(t) = u_{-1}(t)$. La transformée de Laplace de l'entrée est alors $U(s) = 1/s$. L'expression de la sortie du système est :

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K}{s \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1 \right)} \quad (3.20)$$

L'étude des différentes formes de la sortie d'un système d'ordre deux s'effectue en analysant les racines de son polynôme caractéristique (pôles), donnée par le dénominateur de la fonction de transfert :

$$\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1 \right) = 0 \quad (3.21)$$

La nature de la réponse $y(t)$ dépend du signe du déterminant du polynôme caractéristique :

$$\Delta = \frac{4}{\omega_n^2} (\zeta^2 - 1) \quad (3.22)$$

Les deux pôles sont :

$$p_1, p_2 = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (3.23)$$

Trois cas de figure se présentent selon le signe du déterminant de l'équation caractéristique.

a) déterminant positif ($\Delta > 0 \Leftrightarrow \xi > 1$)

Dans ce cas, on a :

$$y(t) = Ku_{-1}(t) - \frac{K}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) e^{-\omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t} - (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) e^{-\omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t} \right] u_{-1}(t) \quad (3.24)$$

À la Figure 3.6, on a représenté la réponse d'un système du second ordre pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement ξ . Dans ce cas, la réponse est apériodique.

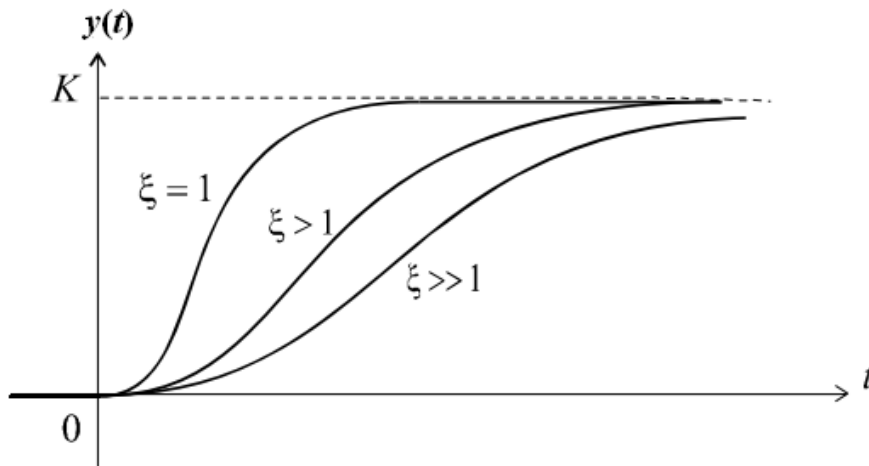


Figure 3.6 : Réponse indicielle d'un système d'ordre 2 avec $\xi > 1$ (régime amorti)

Remarque 3.1 : la réponse la plus rapide est obtenue pour un facteur d'amortissement très proche de 1.

b) déterminant nul ($\Delta = 0 \Leftrightarrow \xi = 1$)

La réponse a pour expression :

$$y(t) = Ku_{-1}(t) - K(1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t} u_{-1}(t) \quad (3.25)$$

Comme dans le cas précédent, nous obtenons une réponse apériodique qui tend très rapidement (régime critique) vers l'asymptote K (voir Figure 3.6).

c) Déterminant négatif ($\Delta < 0 \Leftrightarrow 0 < \xi < 1$)

On obtient cette fois :

$$y(t) = Ku_{-1}(t) - Ke^{-\xi\omega_n t} \left[\cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) \right] u_{-1}(t) \quad (3.26)$$

ou encore :

$$y(t) = Ku_{-1}(t) - \frac{K}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \left[\sin \left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right] u_{-1}(t) \quad (3.27)$$

La réponse obtenue, est constituée d'une sinusoïde amortie par une exponentielle décroissante, avec une asymptote horizontale en K . La Figure 3.8 montre l'évolution de la réponse indicielle d'un système d'ordre deux, lorsque t tend vers l'infini la sortie $y(t)$ tend vers l'asymptote K en présentant un régime dit oscillatoire amorti. D'autre part, on constate que la réponse présente un maximum plus important que l'asymptote finale, $y(\infty) = K$. On parlera alors de dépassement du signal de sortie.

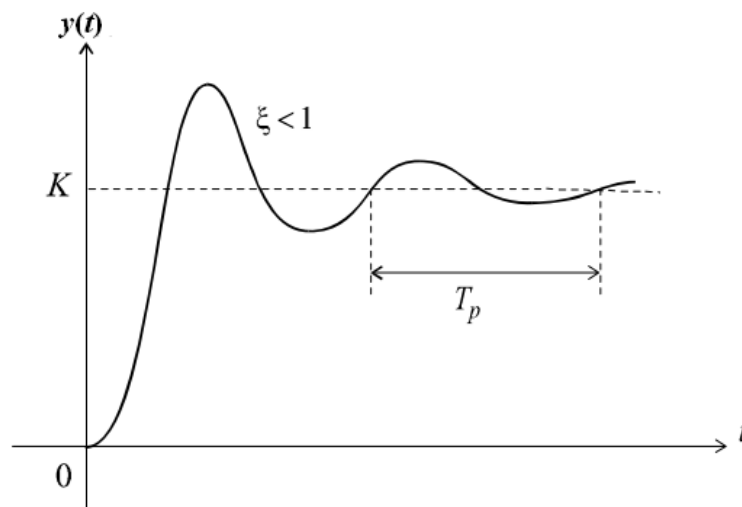


Figure 3.7 : Réponse indicielle d'un système d'ordre deux avec ξ inférieur à 1

Remarque 3.2 : Les oscillations sont d'autant plus importantes (en hauteur et en durée) que le facteur d'amortissement est faible. S'il est nul, le signal de sortie est une sinusoïde oscillant entre 0 et $2K$.

La Figure 3.8 montre les différentes mesures utilisées pour caractériser un système d'ordre deux [1, 3, 6, 9] :

- le dépassement $D\%$ exprimé en pourcentage et défini par la valeur maximum du signal de sortie ramené sur sa valeur finale,
- le temps de montée t_m défini lorsque le signal de sortie atteint pour la première fois sa valeur finale,
- le temps de pic t_{pic} (aussi appelé temps du premier dépassement) défini lorsque le signal de sortie atteint sa valeur maximum,
- la pseudo-période T_p définie par la période de la sinusoïde amortie,

- le temps de réponse à $n\%$ représente le temps au bout duquel le signal de sortie peut être contenu dans un intervalle de $\pm n\%$ autour de sa valeur finale.

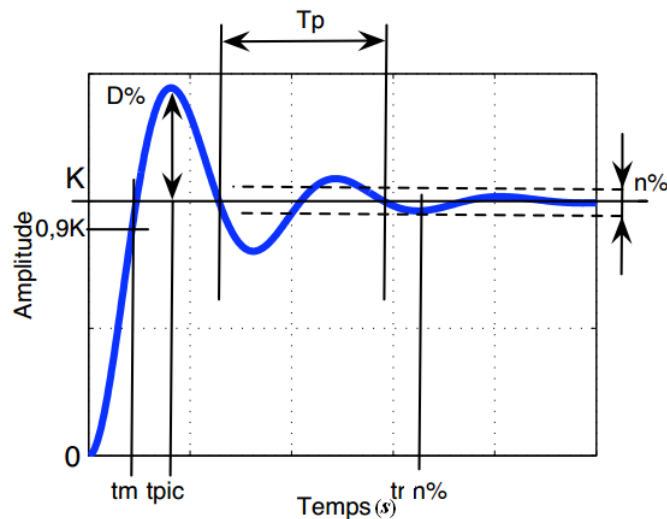


Figure 3.8 : Différentes mesures utilisées pour caractériser le comportement temporel d'un système d'ordre deux

Toutes ces mesures sont liées aux paramètres du système par les formules présentées dans le Tableau 3.1. Il est donc possible de remonter aux paramètres du système à partir de relevés graphiques effectués sur la courbe de réponse indicielle du système. Le gain statique du système est calculé de la même manière qu'un système d'ordre un.

Tableau 3.1 : Formules liants les paramètres d'un système d'ordre 2 avec les caractéristiques de sa réponse indicielle

Temps de montée	$t_m = \frac{\pi}{2\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$
Temps de réponse à $n\%$ ($\xi < 0.7$)	$t_r = \frac{1}{\omega_n \xi} \ln\left(\frac{100}{n}\right)$
Temps du premier maximum	$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$
Pseudo-période	$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$
Dépassement	$D\% = 100 \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$

Exemple 3.3 :

Soit la fonction de transfert suivante:

$$G(s) = \frac{9}{s^2 + 3s + 9} \text{ on peut déduire : } \omega_n^2 = 9 \Rightarrow \omega_n = 3, \quad 2\xi\omega_n = 3 \Rightarrow \xi = 0.5, \quad K = 1. \text{ On obtient}$$

$$\text{alors : } D\% = 16,3\%, T_p = 2.4s, t_{pic} = 1.2s, t_m = 0.6s, t_r(5\%) = 2s$$

3.3 Systèmes d'ordre supérieur

La section précédente est consacrée à l'étude des systèmes d'ordre 1 et d'ordre 2, sans zéros au numérateur. Cette section aborde l'étude des systèmes d'ordre élevé. Dans le cas le plus général, la réponse d'un système est constituée de la somme de fonctions du temps élémentaires définies par la nature (réels, complexes conjugués) des pôles [4].

Soit la fonction de transfert $G(s)$ d'ordre n que l'on factorise afin de faire apparaître les pôles et les zéros.

$$G(s) = K \frac{\prod (s - z_i) \prod \left((s + \alpha_{z_i})^2 + \beta_{z_j}^2 \right)}{\prod (s - p_i) \prod \left((s + \alpha_{p_i})^2 + \beta_{p_j}^2 \right)} \quad (3.28)$$

la contribution élémentaire de chaque pôle sous la forme d'une fonction du temps se déduit en calculant la transformée de Laplace inverse de $G(s)$ après décomposition en éléments simples.

- chaque pôle réel p_i de multiplicité m_i donne une réponse transitoire de la forme :

$$y_{p_i}(t) = \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j t^{j-1} e^{p_i t} \quad (3.29)$$

- chaque paire de pôles complexes conjugués (p_i, p_i^*) de multiplicité m_i donne la réponse suivante :

$$y_{p_i}(t) = \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j t^{j-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t) + \mu_j t^{j-1} e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t) \quad (3.30)$$

où $\sigma_i = \text{Re}(p_i)$ et $\omega_i = \text{Im}(p_i)$.

La forme générale de la réponse temporelle du système est constituée par la combinaison linéaire de ces fonctions élémentaires. Dans cette réponse, chaque fonction élémentaire du temps est appelée mode du système.

Remarque 3.4 :

- le comportement temporel transitoire d'un système est totalement déterminé par les pôles. Les systèmes stables sont caractérisés par des pôles à partie réelle négative,
- les zéros n'interviennent qu'au niveau des amplitudes des fonctions temporelles, mais pas du tout sur les paramètres dynamiques.

Exemple 3.4 :

Soit la réponse temporelle d'un système : $y(t) = (-0.066e^{-10t} - 0.35e^{-5t} + 1.41e^{-t})u_{-1}(t)$. Ce système a 3 pôles réels négatifs : $p_1 = -1$, $p_2 = -5$ et $p_3 = -10$.

Lorsque le temps s'écoule, ces termes disparaissent les uns après les autres, les pôles les plus petits correspondant aux termes qui durent le plus longtemps (dominent la réponse temporelle). Ces pôles sont les pôles dominants situés près de l'axe imaginaire dans la carte des pôles (les plus proches de 0). Les termes plus rapides sont négligeables. Le tracé de la réponse $y(t)$ montre que le système du troisième ordre précédent a un comportement transitoire très voisin d'un système d'ordre 1 qui n'aurait qu'un seul pôle dominant $p_1 = -1$: $y(t) = (1.41e^{-t})u_{-1}(t)$. La forme de la réponse d'un système dépend donc essentiellement des pôles dominants.

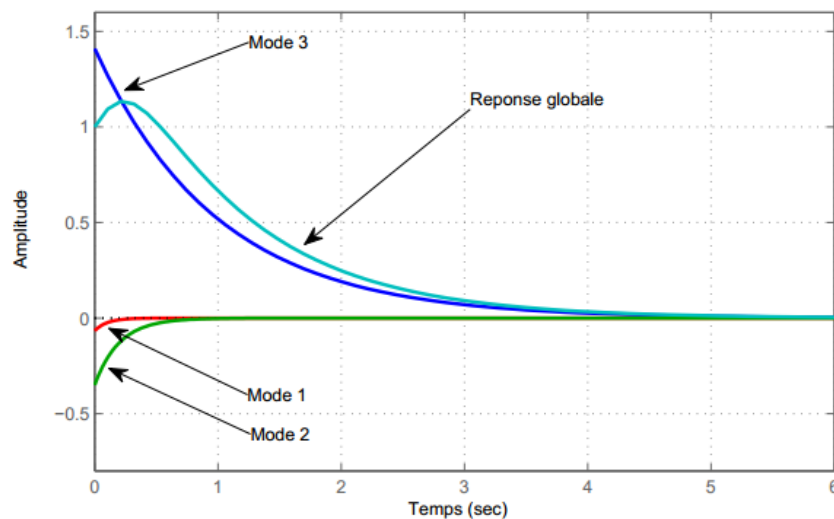


Figure 3.9 : Tracés des trois modes et de la réponse globale

Remarque 3.4 :

- un système d'ordre élevé a, la plupart du temps, un ou deux pôles dominants et se comporte donc comme un système du premier ou du deuxième ordre,
- on peut simplifier la fonction de transfert d'un système d'ordre élevé en ne conservant que le ou les pôles dominants (en veillant à conserver le gain statique du système),
- un pôle peut être négligé dès qu'il est 3 ou 4 fois supérieur au précédent.

Exercices sur le chapitre 3

Exercice 1 :

Un système est caractérisé par la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{s+4}{s^2+5s+6}$$

1. déterminer l'équation différentielle reliant l'entrée et la sortie,
2. déterminer la réponse impulsionnelle $g(t)$ du système,
3. quelle sera la sortie si l'entrée est $e^{-4t}(1-t)u_{-1}(t)$?

Exercice 2 :

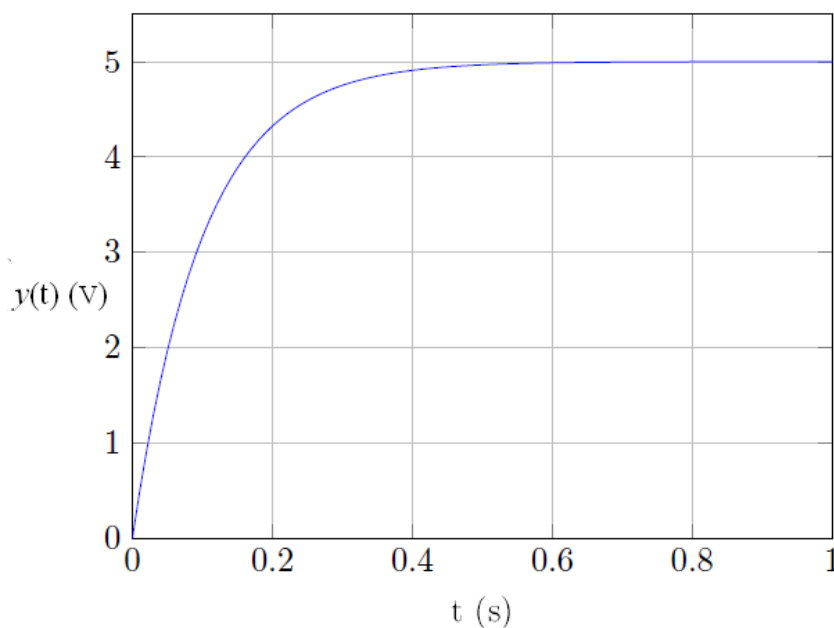
Un système est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$-12y''(t) - 3y'(t) + y(t) = 10u'(t) + 2u(t)$$

1. déterminer la fonction de transfert du système,
2. quels sont les pôles et les zéros?
3. donner le diagramme des pôles et des zéros.

Exercice 3 :

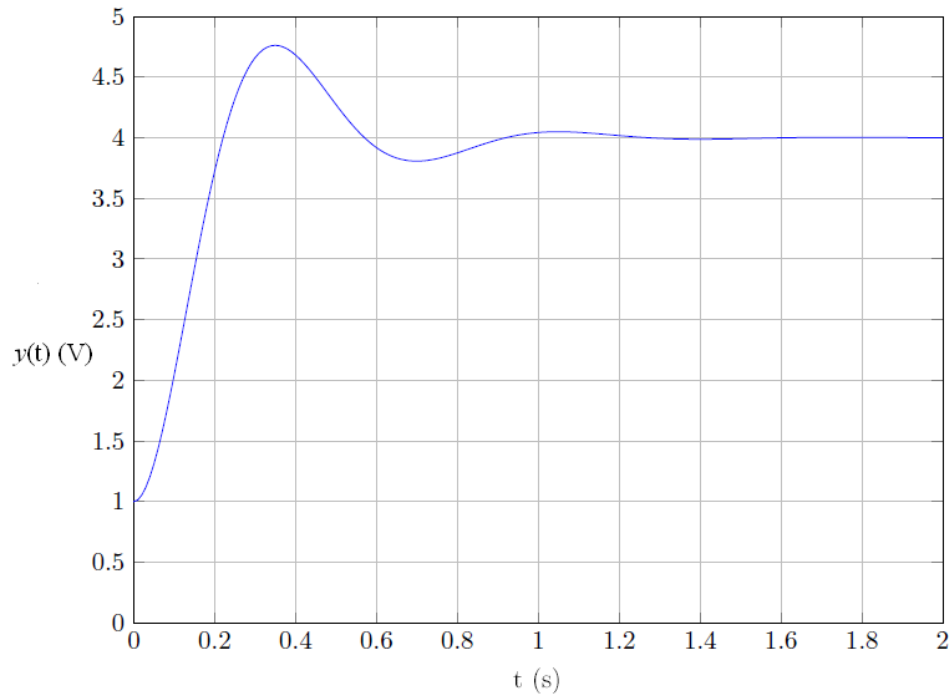
On applique à l'entrée d'un système du premier ordre un échelon d'amplitude $E = 2V$. La sortie $y(t)$ est représentée par la figure suivante :



1. déterminer la constante de temps en expliquant bien la méthode utilisée,
2. déterminer le gain statique de ce système,
3. déduire la fonction de transfert $G(s)$.

Exercice 4 :

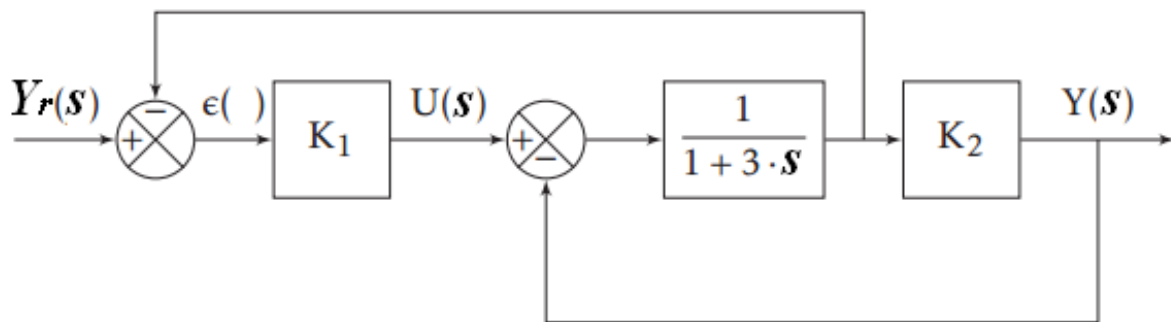
La figure ci-dessous représente la réponse indicielle d'un système du second ordre soumis à un échelon d'entrée d'amplitude $E = 1.5V$.



1. déterminer le facteur d'amortissement de ce système,
2. déterminer le temps de réponse de ce système,
3. déterminer le gain statique de ce système,
4. mesurer la pseudo-période; en déduire la pulsation propre non amortie.

Exercice 5 :

Soit le système décrit par le diagramme fonctionnel suivant :



1. déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $G(s) = Y(s)/Y_r(s)$ par la méthode de votre choix,
2. mettre $G(s)$ sous sa forme canonique,
3. déterminer K_1 et K_2 pour avoir un temps de réponse inférieur à $t_r(5\%) \leq 0,5$ s et un dépassement D_1 inférieure à 10%.

Chapitre 4. Réponses fréquentielles des systèmes linéaires

4.1 La réponse fréquentielle

Ce chapitre présente les méthodes permettant d'étudier la réponse fréquentielle d'un système dont la fonction de transfert est connue. L'analyse fréquentielle s'intéresse au comportement du système considéré en régime permanent, en réponse à une entrée sinusoïdale, c'est à dire sa réponse harmonique, en fonction de l'amplitude et de la fréquence du signal d'entrée [4-9, 11, 12].

Définition 4.1 :

La réponse fréquentielle d'un système linéaire de fonction de transfert $G(s)$ à une sinusoïde $u(t) = X \sin(\omega t)$ d'amplitude donnée X et de pulsation donnée ω est une sinusoïde $y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi)$ de même pulsation ω et dont l'amplitude Y et le déphasage φ dépendent de la pulsation ω avec : $Y = X |G(j\omega)|$ ($|G(j\omega)|$ est le gain du système) et $\varphi = \arg(G(j\omega))$ (déphasage entre la sortie et l'entrée).

En générale, la réponse harmonique d'un système est déterminée par le nombre complexe $G(j\omega)$ qu'on appelle fonction de transfert harmonique (ou fonction de transfert complexe). La fonction de transfert complexe $G(j\omega)$ s'obtient simplement en remplaçant la variable de Laplace s par $j\omega$ dans l'expression de la fonction de transfert $G(s)$. L'étude de $G(j\omega)$ en fonction de la pulsation ω permet donc de déduire le comportement fréquentiel du système.

La fonction de transfert harmonique est souvent représentée graphiquement par le lieu de transfert (le lieu des points $G(j\omega)$ quand la pulsation ω varie de 0 à l'infini). On distingue trois représentations graphiques du lieu de transfert : diagrammes de Bode, de Nyquist et de Black. Dans la suite, on étudie les diagrammes de Bode et de Nyquist [4, 7, 9, 11, 12].

4.2 Diagramme de Bode

Cette représentation est constituée de deux tracés. Le premier représente le gain du système en decibels (dB), quand la pulsation ω (rad/s) varie :

$$G_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)| \quad (4.1)$$

Le deuxième montre la phase φ en degré ou en rad, quand la pulsation ω (rad/s) varie :

$$\varphi = \arg\{G(j\omega)\} \quad (4.2)$$

La pulsation est sur une échelle logarithmique en abscisse (Figure 4.1). Il est fréquent de placer le tracé de phase en dessous du tracé d'amplitude comme montre la Figure 4.2.

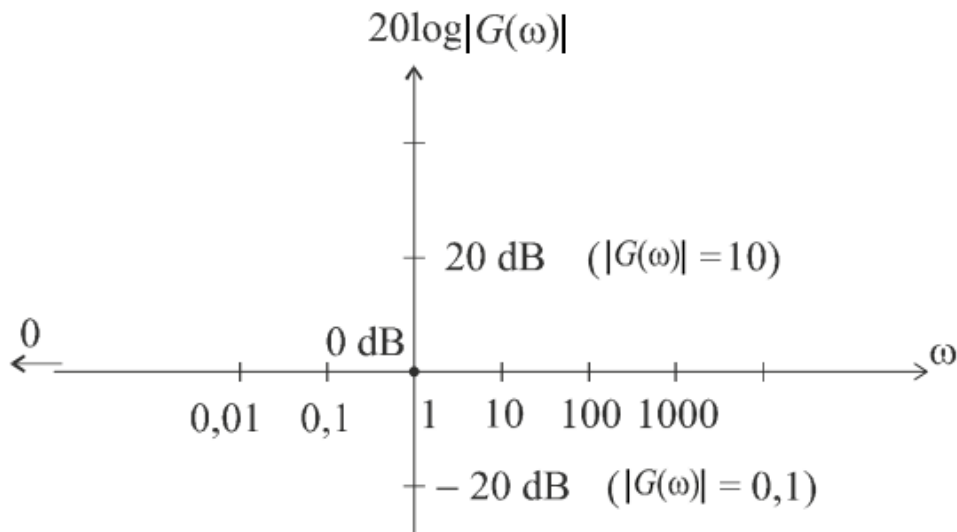


Figure 4.1 : Échelle logarithmique du diagramme de Bode

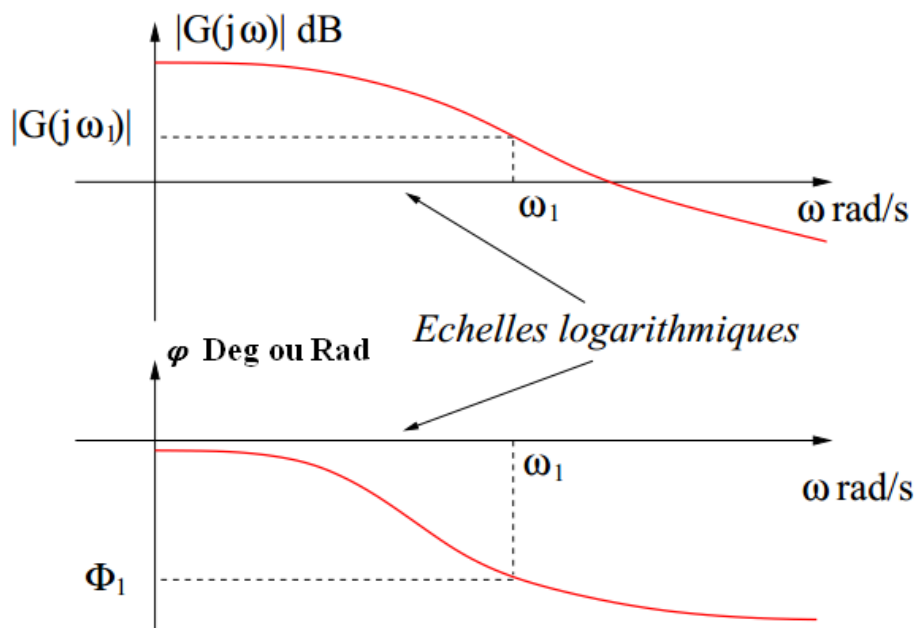


Figure 4.2 : Diagramme de Bode

D'une manière générale, on porte directement les valeurs de ω sur l'axe des abscisses en respectant l'échelle logarithmique et en plaçant la pulsation $\omega = 1$ à l'origine de cet axe puisqu'elle correspond à $\log_{10} \omega = 0$.

4.2.1 Méthode de tracé du diagramme de Bode

Cette sous-section présente une méthode permettant la construction du diagramme de Bode (gain et phase). En effet, toute fonction de transfert peut être décrite par la relation :

$$G(s) = K \frac{\prod (1 + \tau_i s) \prod (1 + 2(\xi / \omega_{n_j})s + (s / \omega_{n_j})^2)}{s^N \prod (1 + \tau_k s) \prod (1 + 2(\xi / \omega_{n_i})s + (s / \omega_{n_i})^2)} \quad (4.3)$$

Par conséquent le module en dB du système considéré est la somme des modules élémentaires en dB. Par ailleurs, la phase du système est la somme des arguments.

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \sum_i \log_{10} |G_i(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \sum_i \varphi_i(\omega) \quad (4.4)$$

L'avantage du diagramme de Bode est que les courbes des éléments constituant la fonction de transfert suivent des asymptotes. De ce fait, il est d'usage de tracer une représentation approximée de la réponse harmonique en utilisant le tracé de diagrammes asymptotiques des éléments constituant la fonction de transfert et en les additionnant afin d'obtenir le tracé asymptotique global.

Systèmes du premier ordre

La fonction de transfert complexe d'un système canonique du premier ordre s'écrit :

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\tau\omega)} \quad (4.5)$$

d'où : $|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}, \varphi(\omega) = -\arctg(\tau\omega).$

Le tracé du diagramme asymptotique consiste à séparer l'espace des pulsations en deux domaines, selon que $\tau\omega$ est très grand ou très petit devant 1.

- si $\tau\omega \ll 1$, soit $\omega \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \approx K$ donc $20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K$ la

courbe de gain suit une asymptote horizontale d'ordonnée $20 \log K$,

- pour $\tau\omega \gg 1$, soit $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ on a :

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \approx \frac{K}{\tau\omega} \text{ donc } 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K - 20 \log \tau - 20 \log \omega. \quad \text{Ceci}$$

correspond à est une droite de pente -20 dB/décade , ce qui signifie que le gain diminue de 20 dB lorsque la pulsation est multipliée par 10. Cette droite coupe l'autre asymptote au point $\omega = 1/\tau$.

À la pulsation $\omega = 1/\tau$, $|G(j\omega)|_{\text{dB}} = -3\text{dB}$ ce qui signifie que le trace réel se trouve donc à 3 dB en dessous des asymptotes (voir Figure 4.3). Cette pulsation est appelée pulsation de coupure.

Remarque 4.1 : dans la courbe de gain, les asymptotes ne peuvent prendre pour pente que les valeurs multiples de 20 dB/décade. On appelle pente d'ordre n , une pente égale à $20n$ dB/décade.

Concernant le déphasage, on a :

- pour $\tau\omega \ll 1$, soit $\omega \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow \varphi(\omega) \approx 0$ la courbe de phase est une asymptote horizontale à l'ordonnée 0 rad,
- pour $\tau\omega \gg 1$, soit $\omega \gg \frac{1}{\tau} \Rightarrow \varphi(\omega) \approx \frac{\pi}{2}$ alors la courbe de phase est une asymptote horizontale à l'ordonnée $-\pi/2$ rad.

À la pulsation $\omega = 1/\tau$, on obtient un déphasage de $-\pi/4$ rad.

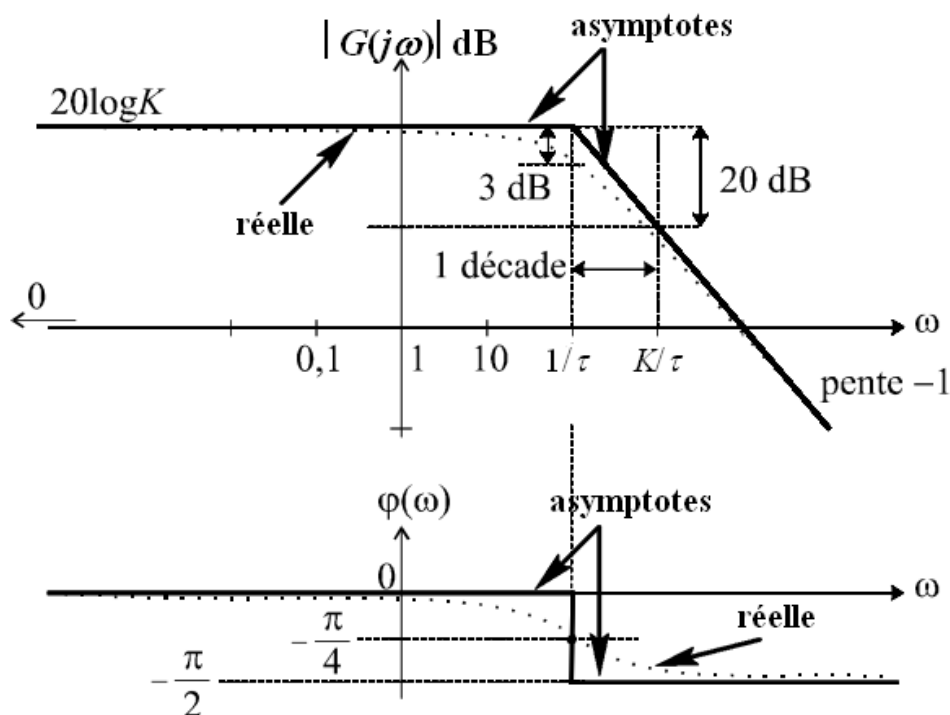


Figure 4.3 : Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

Systèmes du second ordre

La fonction de transfert complexe d'un système canonique du second ordre s'écrit :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\xi\omega}{\omega_n}} \quad (4.6)$$

$$\text{d'où : } |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}}, \varphi(\omega) = -\text{arctg} \left(\frac{\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \right).$$

Les asymptotes sont obtenues de manière identique à celle qui a été faite pour le système canonique du premier ordre.

- pour $\omega \rightarrow 0$: $|G(j\omega)| \approx K$ donc $|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log K$ et $\varphi(\omega) \approx 0$.
- pour $\omega \rightarrow +\infty$, on a :

$$|G(j\omega)| \approx \frac{K\omega_n^2}{\omega^2} \text{ donc } |G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log K + 40 \log \omega_n - 40 \log \omega \text{ et } \varphi(\omega) \approx -\pi. \text{ La courbe}$$

de gain suit donc une direction asymptotique qui est une droite de pente -40 dB/décade en hautes fréquences.

Les deux asymptotes se coupent au point d'abscisse $\omega = \omega_n$ (pulsation de cassure). À cette pulsation ($\varphi(\omega) = -\pi/2$). En effet, l'intersection commune des deux asymptotes est tel que :

$$20 \log K + 40 \log \omega_n - 40 \log \omega = 20 \log K, \text{ soit } 40 \log \omega_n - 40 \log \omega = 0 \Rightarrow \omega = \omega_n \quad (4.7)$$

Près de la pulsation de cassure, il existe une pulsation de résonance $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ pour laquelle le gain présente un maximum $|G(j\omega_r)| = G_{\text{max}} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$, si $\xi < 0.707$ (Figure 4.4). On définit alors le facteur de résonance Q (ou de surtension) par le rapport du gain maximal sur le gain à l'origine :

$$Q = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - 2\xi^2}} \quad (4.8)$$

Exemple 4.1 :

Considérons un système de fonction de transfert [9]:

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+100)}{(s+10)} \quad (4.9)$$

La fonction de transfert complexe est donnée par :

$$G(j\omega) = \frac{(j\omega+1)(j\omega+100)}{(j\omega+10)} \quad (4.10)$$

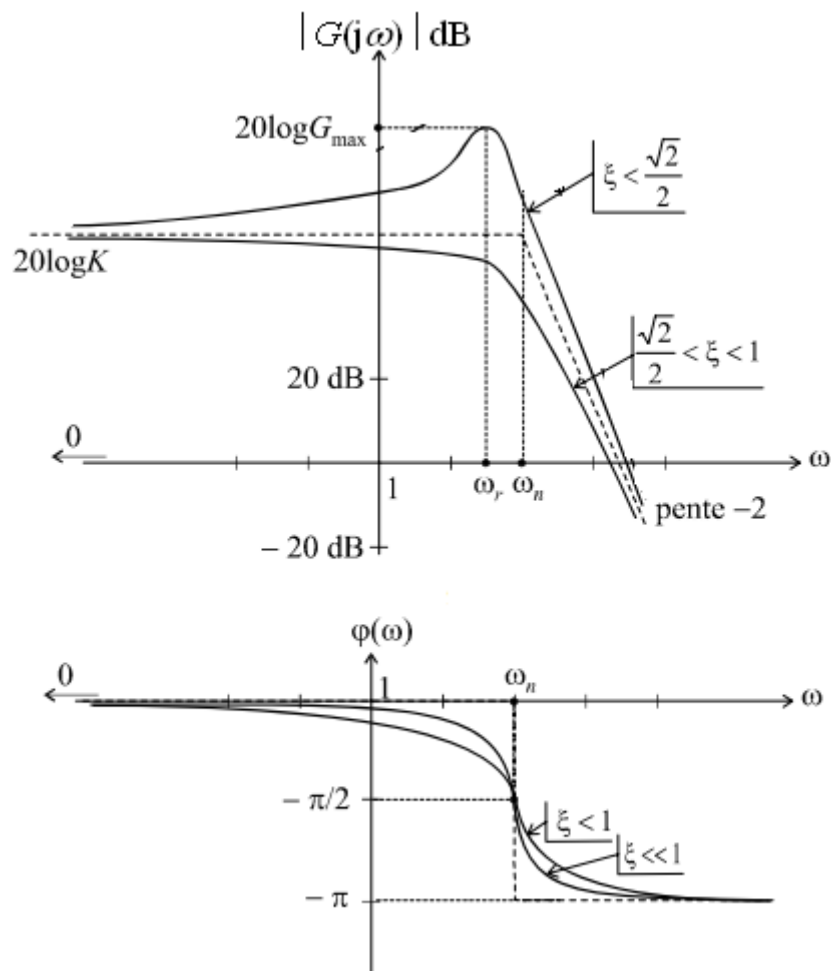


Figure 4.4 : Diagramme de Bode d'un système du second ordre

$$\text{d'où : } |G(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1} \sqrt{\omega^2 + 100^2}}{\sqrt{\omega^2 + 10^2}}, \varphi(\omega) = \arctg(\omega) + \arctg(\omega/100) - \arctg(\omega/10).$$

Considérons les équivalents des trois expressions $\sqrt{\omega^2 + 1}$, $\sqrt{\omega^2 + 10^2}$ et $\sqrt{\omega^2 + 100^2}$:

$$\omega \ll 1 \Rightarrow \sqrt{\omega^2 + 1} \approx 1, \omega \gg 1 \Rightarrow \sqrt{\omega^2 + 1} \approx \omega$$

$$\omega \ll 10 \Rightarrow \sqrt{\omega^2 + 10^2} \approx 10, \omega \gg 10 \Rightarrow \sqrt{\omega^2 + 10^2} \approx \omega$$

$$\omega \ll 100 \Rightarrow \sqrt{\omega^2 + 100^2} \approx 100, \omega \gg 100 \Rightarrow \sqrt{\omega^2 + 100^2} \approx \omega$$

on peut résumer les différentes situations dans le Tableau 4.1.

Il s'agit donc de tracer un diagramme de Bode asymptotique en approximant la courbe entre deux pulsations de coupures ($\omega=1$, $\omega=10$ et $\omega=100$), par ses segments de droites calculés dans le Tableau 4.1 (Figure 4.5).

La direction asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en multipliant l'ordre de la pente par $\pi/2$ (Figure 4.6).

Tableau 4.1 : Calcul des équivalents asymptotiques du gain

ω	0	1	10	100	$+\infty$
$\sqrt{\omega^2 + 1}$	1	ω	ω	ω	ω
$\sqrt{\omega^2 + 100^2}$	100	100	100	ω	ω
$\sqrt{\omega^2 + 10^2}$	10	10	ω	ω	ω
$ G(j\omega) $	10	10ω	100	ω	ω
$20\log_{10} G(j\omega) $	20 dB	$20 \text{ dB/déc} + 20 \log \omega$	40 dB	$20 \log \omega$	$20 \log \omega$
penne	0	20 dB/déc	0	20 dB/déc	

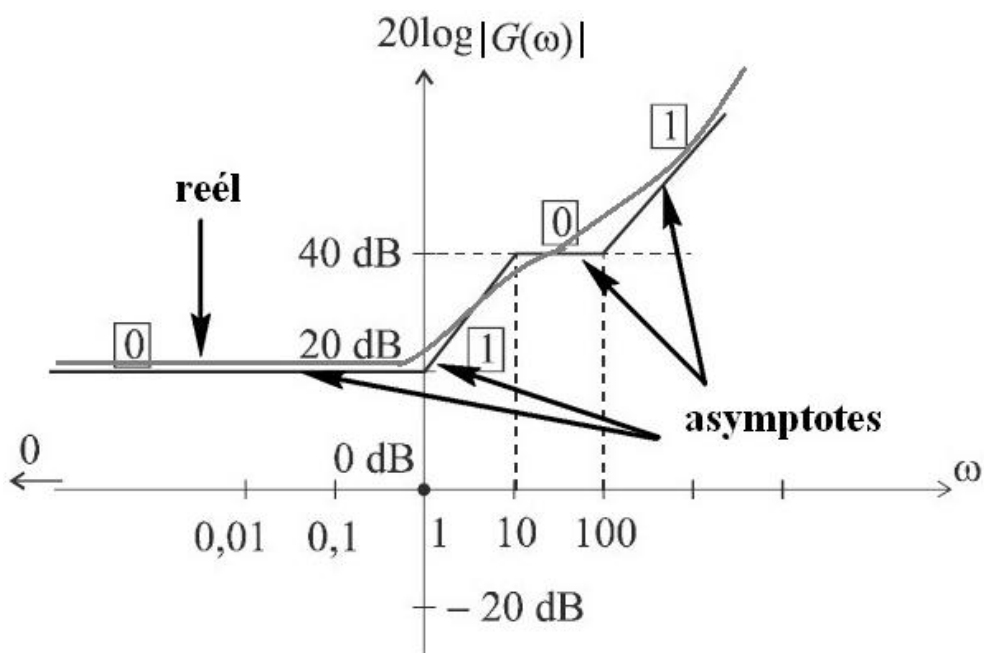


Figure 4.5 : Diagramme de Bode de gain du système (4.9)

4.2.2 Cas particuliers

Quelques cas particuliers sont maintenant étudiés. Ils peuvent souvent aider au tracé de diagrammes plus complexes.

- le terme d'intégration d'ordre N ($1/(j\omega)^N$) a une phase constante valant $-90 \times N$ deg. Le module est défini par :

$$20 \log_{10} \left| \frac{K}{(j\omega)^N} \right| = 20 \log_{10} \frac{K}{\omega^N} = 20 \log_{10} K - 20N \log_{10} \omega \quad (4.11)$$

La courbe de gain est donc une droite de pente $-20 \times N$ dB/dec qui coupe l'axe 0 dB au point $\omega_{co} = (K)^{1/N}$,

- le terme de dérivation d'ordre N ($K(j\omega)^N$) se déduit directement du précédent en changeant le signe de la pente de la courbe de gain et le signe de la phase.

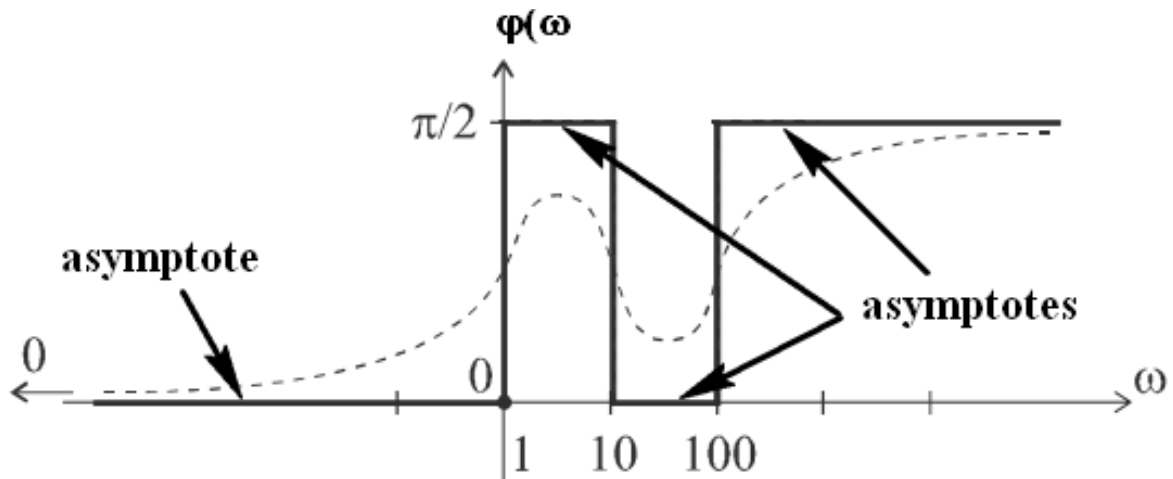


Figure 4.6 : Diagramme de Bode de phase du système (4.9)

4.3 Diagramme de Nyquist

Le diagramme de Nyquist, correspond à la représentation dans le plan complexe de la fonction de transfert complexe $G(j\omega) = \text{Re}(G(j\omega)) + j\text{Im}(G(j\omega))$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$ (Figure 4.7) [7, 9, 11, 12]. Ce diagramme est toujours orienté dans le sens des ω croissants.

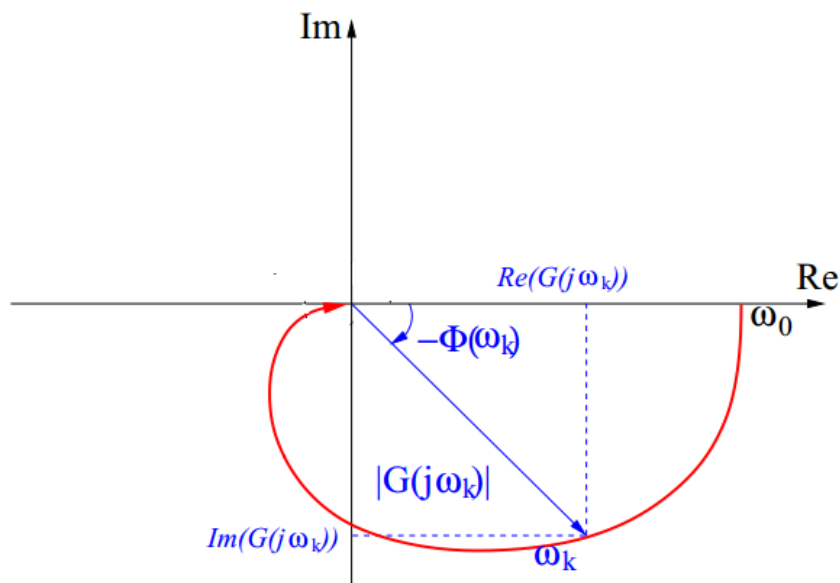


Figure 4.7 : Diagramme de Nyquist

Systèmes du premier ordre

Pour tracer le diagramme de Nyquist, il faut décomposer $G(j\omega)$ en partie réelle et partie imaginaire, on a :

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1+j\tau\omega)} = \frac{K(1-j\tau\omega)}{(1+j\tau\omega)(1-j\tau\omega)} = \frac{K(1-j\tau\omega)}{(1+\tau^2\omega^2)} \quad (4.12)$$

$$\text{soit : } G(j\omega) = \frac{K}{1+\tau^2\omega^2} + j \frac{-K\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2} = X + jY \quad (4.13)$$

Le lieu de Nyquist d'un système du premier ordre est un demi-cercle de centre $(K/2, 0)$ et de rayon $K/2$ comme le montre la Figure 4.8.

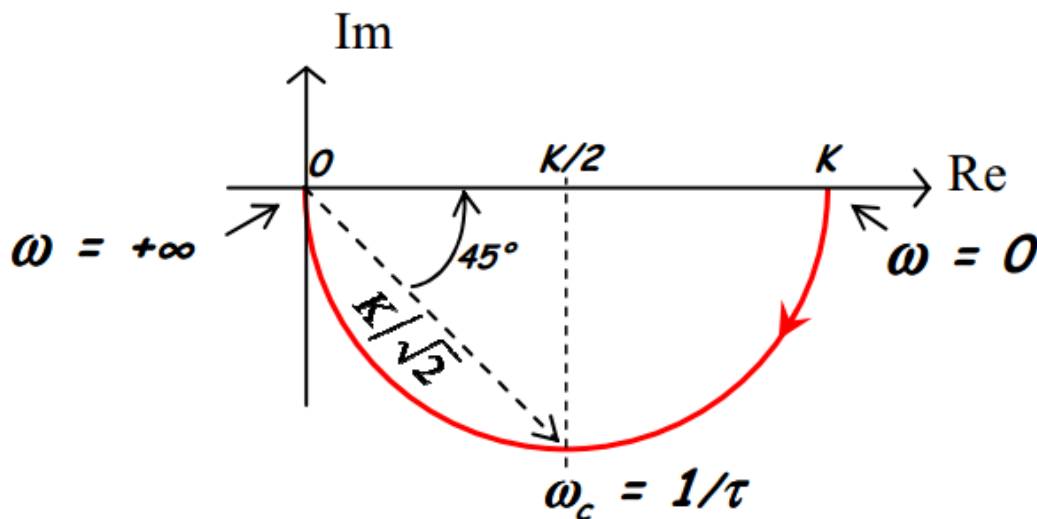


Figure 4.8 : Diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre

A la pulsation de cassure pour $\omega = \omega_c = 1/\tau$: $|G(j\omega)| = K/\sqrt{2}$, $\varphi(\omega) = -45^\circ$.

Systèmes du second ordre

Le diagramme de Nyquist d'un système du second ordre est défini à partir de l'expression suivante :

$$G(j\omega) = \frac{K(1-(\omega/\omega_n)^2)}{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + 4\xi^2(\omega/\omega_n)^2} - 2j \frac{K\xi(\omega/\omega_n)}{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + 4\xi^2(\omega/\omega_n)^2} \quad (4.14)$$

La Figure 4.9 illustre les tracés obtenus en fonction des différents cas. On remarquera que tous les tracés ont les mêmes points de départ et d'arrivée. Aux hautes fréquences (ω tend vers l'infini), l'analyse asymptotique montre que la phase tend vers $-\pi$ c'est-à-dire la courbe

est tangente à l'axe des réels, par la gauche, au point 0. Une éventuelle résonance ($\xi < 0.707$) s'observe par une courbe qui présente alors un maximum de gain (une inflexion de la courbe) [11].

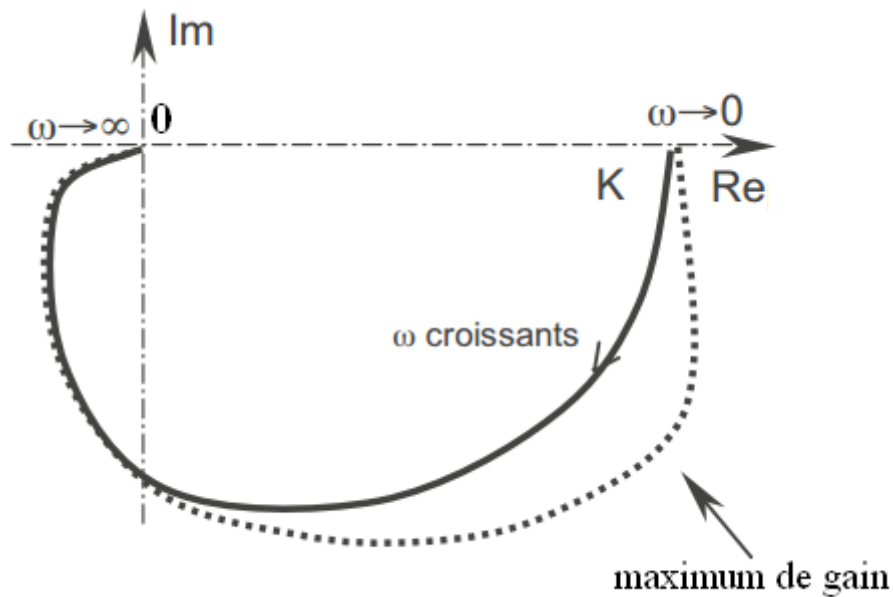


Figure 4.9 : Diagramme de Nyquist d'un système du second ordre

4.4 Marge de phase et marge de gain

Définition 4.2 : (Marge de phase)

La marge de phase est définie par [4, 7, 9, 11]:

$$M_\varphi = \varphi(\omega_{co}) + 180^\circ \quad (4.15)$$

où ω_{co} est la pulsation de coupure à 0 dB de la fonction de transfert complexe $G(j\omega)$:

$$20\log_{10} |G(j\omega_{co})| = 0\text{dB} \Rightarrow |G(j\omega_{co})| = 1 \quad (4.16)$$

Définition 4.3 : (Marge de gain)

La marge de gain est définie par [4, 7, 9, 11]:

$$M_G = \frac{1}{|G(j\omega_{180^\circ})|} \Rightarrow M_G\text{dB} = -20\log_{10} |G(j\omega_{180^\circ})| \quad (4.17)$$

où ω_{180° est la pulsation pour laquelle la phase de $G(j\omega)$ vaut :

$$\arg[G(j\omega_{180^\circ})] = -180^\circ \quad (4.18)$$

Exercices sur le chapitre 4

Exercice 1 :

Un système est caractérisé par la fonction de transfert complexe :

$$G(j\omega) = \frac{20}{4 + j\omega}$$

1. quelle est l'équation différentielle liant l'entrée $u(t)$ et la sortie $y(t)$?
2. quelle est l'expression de la réponse du système à un signal d'entrée sinusoïdal $u(t) = 2\sin(10t)$?
3. tracer le diagramme de Bode de $G(j\omega)$.

Exercice 2 :

Soit le système dont la fonction de transfert $G(s)$ est :

$$G(s) = \frac{10(s+10)}{(s+1)}$$

On utilise dans ce système un signal d'entrée $u(t) = A\cos(\omega t)$. Calculer l'expression du signal de sortie $y(t)$ dans les deux cas suivants :

$$\begin{cases} A = 10 \\ \omega = 1 \text{ rad/s} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A = 100 \\ \omega = 1000 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Exercice 3 :

Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) des systèmes suivants :

$$G_1(s) = \frac{1000(s+1)}{s(s+10)}, G_2(s) = \frac{10s}{(s+1)(s+100)}, G_3(s) = \frac{(s+1)(s+100)}{(s+10)^2}$$

Exercice 4 :

On considère le système de fonction de transfert $G(s)$ définie par :

$$G(s) = \frac{10^4}{s(s+10)(s+100)}$$

Tracer le diagramme de Bode asymptotique de ce système et en déduire son lieu de Nyquist.

Exercice 5 :

Considérons un système de fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{5}{\left(\frac{s}{100} + 1\right)^3}$$

Calculer la marge de phase et marge de gain.

Chapitre 5. Stabilité et précision des systèmes asservis

5.1 La stabilité des systèmes linéaires continus

La stabilité est la qualité essentielle pour un système, et donc exigée en premier. Un système instable est caractérisé soit par des oscillations d'amplitude de plus en plus grande de la sortie, soit par une croissance négative ou positive de la sortie. En effet, la stabilité du système commandé est le premier objectif qui doit être assuré pour le bon fonctionnement de l'asservissement. Les autres objectifs d'un asservissement (précision et rapidité) ne peuvent pas être obtenus si le système commandé est instable.

Ce chapitre présente des méthodes permettant de déterminer la stabilité d'un système linéaire continu dont on connaît soit l'expression analytique de la fonction de transfert, soit une représentation graphique de sa réponse fréquentielle (Bode, Nyquist) [3-9, 11-16].

Définition 5.1 :

Qu'il soit en boucle ouverte ou fermée, un système est stable si toute entrée bornée produit une sortie bornée.

Cette définition caractérise la stabilité entrée bornée-sortie bornée (BIBO usuellement en abrégé, d'après l'anglais bounded input bounded output).

5.2 Critère des pôles

Théorème 5.1 :

Un système linéaire invariant à temps continu de fonction de transfert $G(s)$ est BIBO-stable si et seulement si tous les pôles de $G(s)$ appartiennent au demi-plan complexe gauche, c'est-à-dire tous les pôles sont à partie réelle négative (Figure 5.1). Le demi-plan gauche est appelé la région de stabilité.

Exemple 5.1 :

Soit la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{3s^2 + 1}{s^3 - 4s^2 + 2s^2 - 1}$$

Son polynôme caractéristique est $s^3 - 4s^2 + 2s^2 - 1$, nous obtenons les racines suivantes : $0.24 \pm 0.47j$ et 3.51 .

Le polynôme caractéristique a 3 racines instables, c'est-à-dire à droite du plan complexe, donc le système est instable.

Type de pôle	Plan complexe $s = \sigma \pm j\omega_0$	Graphe de la réponse impulsionnelle	Remarques
Réel négatif			stable
Réel positif			Instable
Nul (Multiplicité = 1)			stable
Complexe conjugué Partie réelle négative			stable
Imaginaire conjugué (Multiplicité = 1)			Marginalement stable
Imaginaire conjugué (Multiplicité = 2)			Instable
Complexe conjugué Partie réelle positive			Instable
Nuls (Multiplicité = 2)			Instable

Figure 5.1 : Pôles et stabilité d'un système

Si des pôles sont situés sur l'axe imaginaire, le système est marginalement stable : la moindre variation d'un paramètre peut le rendre instable [4, 5, 14].

5.3 Critère de Routh

Le critère des pôles nécessite le calcul des pôles de la fonction de transfert, ce qui est une opération relativement complexe pour des ordres élevés. Le critère de Routh que nous allons maintenant détailler permet de savoir si les racines du polynôme caractéristique possèdent toutes une partie réelle négative sans nécessairement les calculer explicitement [9, 11, 14-16].

Soit un système ayant pour fonction de transfert $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ avec :

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (5.1)$$

- Si un des coefficients du polynôme caractéristique $D(s)$ est nul ou négatif alors qu'un autre coefficient au moins est positif, il existe une racine ou des racines imaginaires ou nulle ou à partie réelle positive,
- Si tous les coefficients du polynôme caractéristique $D(s)$ sont positifs, l'examen de la première colonne du tableau de Routh permet de conclure à la stabilité du système.

Tableau 5.1 : Tableau de Routh

Poser	s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}
	s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}
Calculer	s^{n-2}	$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$	$b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$	$b_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$
	s^{n-3}	$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}$	$c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}$	$c_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	s^0	h_1	h_2	h_3

Les cases vides sont remplies par des zéros,

- Appliquer le critère de Routh.

Théorème 5.2 :

Le nombre de racines du polynôme caractéristique dont la partie réelle est positive est égal au nombre de changements de signes des coefficients de la première colonne du tableau de Routh.

Le système considéré est donc stable si et seulement si tous les coefficients de la première colonne sont positifs.

Si un élément de la première colonne est nul, on le remplace alors par $\varepsilon > 0$ et on continue la construction du tableau. Si l'élément au-dessous de ε est négatif, il y a un changement de signe et donc il existe une racine à partie réelle positive.

Remarque 5.1 : Le tableau de Routh associé à un polynôme $D(s)$ d'ordre n comporte $n+1$ lignes.

Exemple 5.2 : étude de la stabilité d'un système d'ordre 4

Considérons le polynôme caractéristique suivant :

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5$$

Tous les coefficients du polynôme caractéristique sont positifs : on ne peut pas conclure immédiatement de la stabilité du système, il faut construire le tableau de Routh :

Poser	s^4	1	3	5
	s^3	2	4	0
Calculer	s^2	1	5	0
	s^1	-6	0	0
	s^0	5	0	0

Il y a deux changements de signe de la première colonne (deux pôles à partie positive), le système est instable.

Exemple 5.3 : Zéro dans la première colonne

Considérons le polynôme caractéristique suivant :

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3$$

Tous les coefficients du polynôme caractéristique sont positifs, il faut construire le tableau de Routh pour étudier la stabilité.

Poser	s^5	1	3	5
	s^4	2	6	3
Calculer	s^3	$0 \rightarrow \varepsilon$	$7/2$	0
	s^2	$(6\varepsilon-7)/\varepsilon$	3	0
	s^1	$(42\varepsilon-49-6\varepsilon^2)/(12\varepsilon-14)$	0	0
	s^0	3	0	0

L'examen de la première colonne révèle l'existence de deux changements de signe quel que soit le signe de ε (Il y a donc deux pôles à partie réelle positive), le système est instable.

Exemple 5.4 : Ligne de Zéros

Dans ce cas, il faut former un polynôme auxiliaire avec les coefficients de la ligne précédent les zéros. La construction du tableau de Routh peut être poursuivie en remplaçant les zéros de la ligne nulle par les coefficients du polynôme obtenu en dérivant le polynôme auxiliaire. Il faut noter que les racines du polynôme auxiliaire sont aussi des racines du polynôme original et doivent être testées. Considérons polynôme caractéristique suivant :

$s^5 + 5s^4 + 11s^3 + 23s^2 + 28s + 12$. Le tableau de Routh s'écrit :

Poser	s^5	1	11	28	$Q(s) = 3s^2 + 12$ $Q'(s) = 6s$
	s^4	5	23	12	
Calculer	s^3	6.4	25.6	0	
	s^2	3	12	0	
	s^1	0	0	0	
	s^1	6	0	0	
	s^0	12	0	0	

Les termes de la première colonne sont tous strictement positifs, mais il faut vérifier le polynôme auxiliaire : $Q(s) = 3s^2 + 12 = 0$ qui nous donne les racines $s = \pm 2j$. Donc le système est marginalement stable

5.4 Critère graphique du revers

Les critères graphiques permettent d'étudier la stabilité d'un asservissement à partir de la représentation harmonique de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO). Cette section présente le critère de revers qui peut être déduit à partir des diagrammes de Bode et de

Nyquist pour juger la stabilité d'un asservissement. Ce n'est pas le seul critère graphique, mais c'est le plus simple [7, 11, 14-16].

Soit l'asservissement décrit par le diagramme fonctionnel suivant :

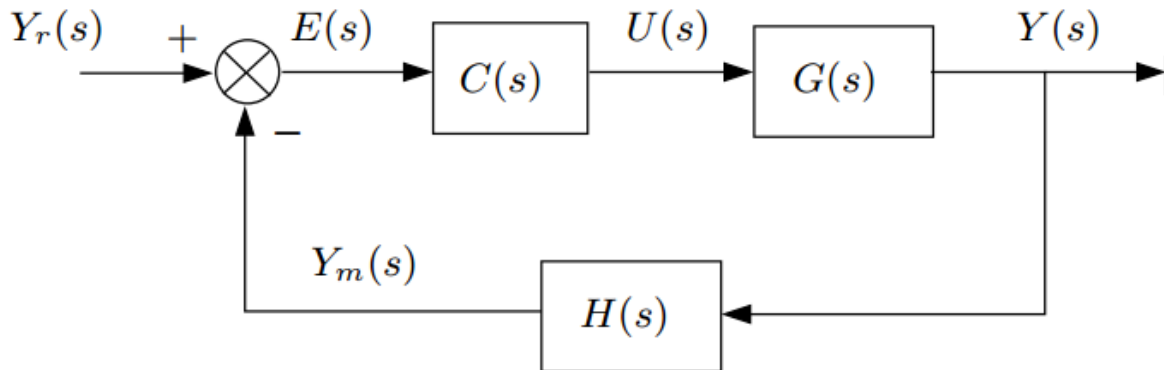


Figure 5.2 : Asservissement a temps continu idéal

La fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) de cet asservissement est $C(s)G(s)H(s)$ ($CGH(s)$). Il s'agit de la relation entrée-sortie quand la chaîne de retour n'est pas connectée au comparateur. La fonction de transfert en boucle fermée est $C(s)G(s)/1+C(s)G(s)H(s)$.

Théorème 5.3 : (Critère du revers)

Si le système en boucle ouverte est stable et à minimum de phase (pôles et zéros à partie réelle strictement négative) alors le système en boucle fermée est stable si, en parcourant dans le sens des pulsations croissantes le lieu de transfert dans le plan de Nyquist de la FTBO on laisse le point critique $(-1, 0)$ sur la gauche (Figure 5.3). Il est instable dans le cas contraire.

Dans le plan de Bode, un système asservi est stable si, pour la pulsation ω_{co} définie par $|FTBO(j\omega_{co})| = 1$ (soit 0dB), le déphasage est supérieur à -180° (Figure 5.4).

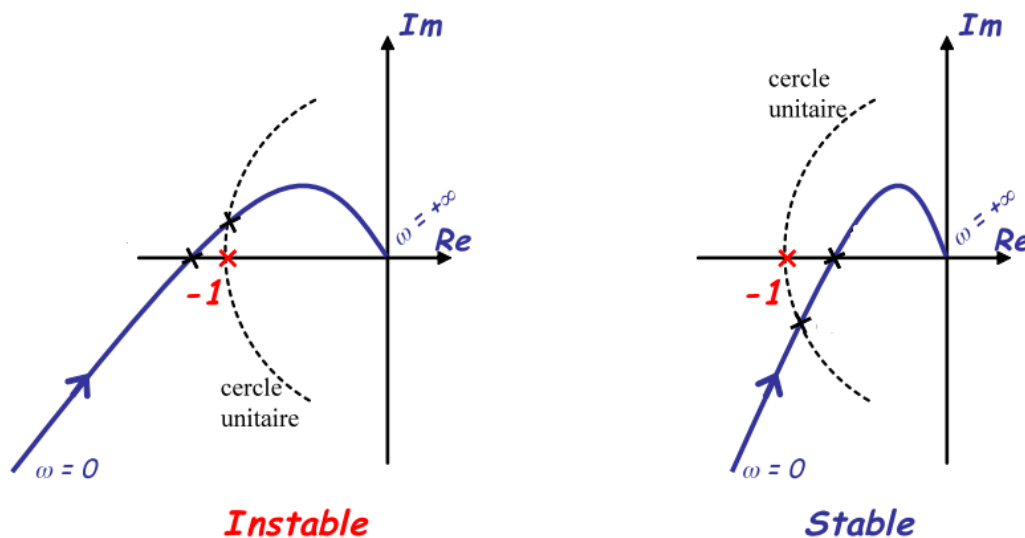


Figure 5.3 : Illustration du critère du revers dans le plan de Nyquist

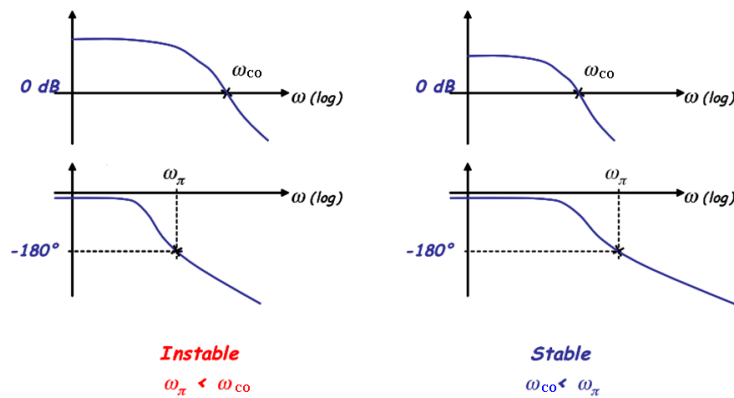


Figure 5.4 : Illustration du critère du revers dans le plan de Bode

5.5 Marges de stabilité

Les critères précédents permettent de dire si un système est théoriquement stable, marginalement stable ou instable. Mais en pratique il faut qu’il soit suffisamment. On utilise alors les marges de gain et de phase pour s’assurer qu’un système est loin du point critique (-1, 0) du plan complexe. Ces marges permettent de quantifier la distance séparant le lieu de la FTBO du point critique (synonyme de limite de stabilité) [14].

Théorème 5.4 : (Stabilité et marges de stabilité)

Un système est stable en boucle fermée si la marge de phase de FTBO est positive (Figure 5.5).

Valeurs courantes des Marge : $6\text{dB} < M_G < 12\text{dB}$ et $40^\circ < M_\varphi < 60^\circ$.

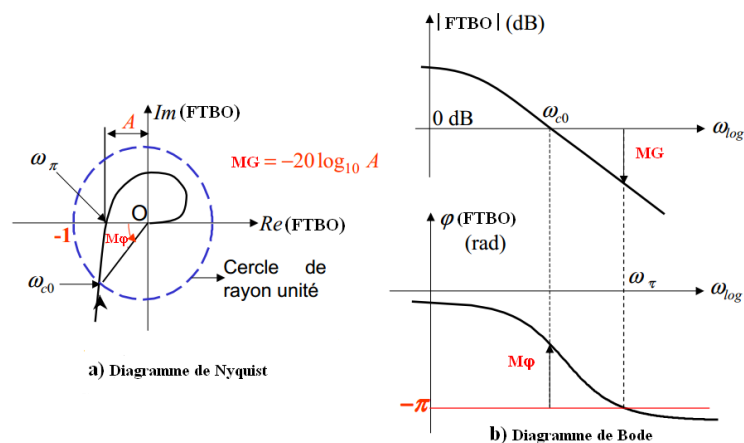


Figure 5.5 : Marges de stabilité

5.6 Précision des systèmes asservis

On peut caractériser à chaque instant la précision d’un système asservi par la différence (ou erreur) entre la consigne (sortie désirée) et la sortie réelle :

$$e(t) = y_r(t) - y(t) \quad (5.2)$$

On distingue :

- **l'erreur dynamique** : c'est l'erreur $e(t)$ lors du régime transitoire,
- **l'erreur statique** : c'est l'erreur en régime permanent :

$$e_s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (5.3)$$

Le but est de minimiser l'erreur $e(t)$.

5.6.1 Précision dynamique

La précision dynamique d'un système est caractérisée durant la phase transitoire essentiellement à une entrée en échelon. Elle est étudiée à l'aide des paramètres du régime dynamique : temps de réponse, dépassement, etc.

5.6.2 Précision statique

La précision statique d'un asservissement est caractérisée par l'erreur en régime permanent. On considère un système asservi tel que celui représenté à la Figure 5.2. D'après l'équation (5.2) la transformée de Laplace de l'erreur est donnée par :

$$E(s) = \frac{Y_r(s)}{1 + CGH(s)} \quad (5.4)$$

L'application du théorème de la valeur finale permet de déterminer l'erreur en régime permanent.

Erreur de position

On appelle erreur de position d'un système en boucle fermée, le paramètre e_p lorsque le signal de consigne est un échelon d'amplitude E_0 ($Y_r(s) = E_0/s$). En appliquant le théorème de la valeur finale, on a :

$$e_p = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{E_0}{1 + CGH(s)} \quad (5.5)$$

L'erreur de position est l'erreur le plus couramment utilisé pour caractériser la précision statique dans les systèmes de régulation.

Erreur de vitesse

On appelle erreur de vitesse (erreur de traînage) d'un asservissement, le paramètre e_v lorsque le signal de consigne est une rampe de pente b ($Y_r(s) = b/s^2$). En appliquant le théorème de la valeur finale, on a :

$$e_v = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b}{s(1 + CGH(s))} \quad (5.6)$$

Erreur d'accélération

On appelle erreur d'accélération d'un système asservi, le paramètre ϵ_a lorsque le signal de consigne est un échelon d'accélération (fonction quadratique du temps) ($Y_r(s) = 2c/s^3$). En appliquant le théorème de la valeur finale, on a :

$$e_a = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2c}{s^2(1 + CGH(s))} \quad (5.7)$$

5.6.1 Calcul de l'erreur

Pour calculer l'erreur statique, il est intéressant de faire apparaître le nombre d'intégrations dans la FTBO. L'expression générale de la FTBO est la suivante :

$$CGH(s) = \frac{K}{s^\alpha} \frac{1 + \beta_1 s + \dots}{1 + \alpha_1 s + \dots} \quad (5.8)$$

où α , la classe du système, représente le nombre d'intégrations pures de la FTBO. Alors, l'erreur ϵ_s peut être calculée à l'aide de (5.4) et (5.8). En effet, en tenant compte de ces deux équations, il vient :

$$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\alpha+1}(1 + \alpha_1 s + \dots)}{K(1 + \beta_1 s + \dots) + s^\alpha(1 + \alpha_1 s + \dots)} Y_r(s) \quad (5.9)$$

Comme le montre le Tableau 5.2, plus α est élevé, meilleure est la précision du système asservi [11, 12, 14].

Tableau 5.2 : Précision des systèmes asservis linéaires continus, en fonction de leur classe

consigne Nombres d'intégrations	Échelon d'amplitude E_0 $y_r(t) = E_0 u_{-1}(t)$ $Y_r(s) = E_0 / s$	Rampe de pente b $y_r(t) = b t u_{-1}(t)$ $Y_r(s) = b / s^2$	Échelon d'accélération $y_r(t) = c t^2 u_{-1}(t)$ $Y_r(s) = 2c / s^3$
$\alpha = 0$	$e_p = \frac{E_0}{1 + K}$	$e_v \rightarrow \infty$	$e_a \rightarrow \infty$
$\alpha = 1$	$e_p = 0$	$e_v = \frac{b}{K}$	$e_a \rightarrow \infty$
$\alpha = 2$	$e_p = 0$	$e_v = 0$	$e_a = \frac{c}{K}$

Exercices sur le chapitre 5

Exercice 1 :

Etudier la stabilité des systèmes suivants :

$$G_1(s) = \frac{(s-2)(s+1)}{(3s+2)}, \quad G_2(s) = \frac{12s}{(5s-1)}, \quad G_3(s) = \frac{(s+12)(s+1)}{(s-2)(s+1)s},$$

$$G_4(s) = \frac{1}{(s^2-s-6)} \quad \text{et} \quad G_5(s) = \frac{(s+1)}{(s^2+2s+2)}$$

Exercice 2 :

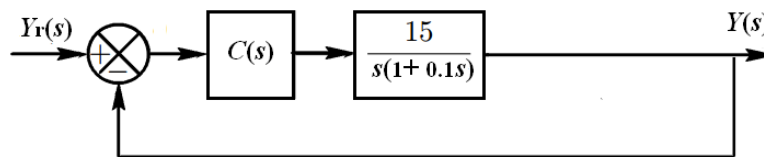
Soit le système dont la fonction de transfert $G(s)$ est :

$$G(s) = \frac{3}{s^5 + 2s^4 + s^3 + s^2 + 2s + 1}$$

1. étudier la stabilité du système.
2. quel est le nombre de pôles stables et instable? justifier.

Exercice 3 :

Considérons l'asservissement suivant :



on considère que le correcteur est décrit par la fonction de transfert :

$$C(s) = K_p \left(\frac{T_i s + 1}{T_i s} \right)$$

Calculer la fonction de transfert en boucle fermée du système. Déterminer pour quelles valeurs de K_p et T_i le système est stable en boucle fermée.

Exercice 4 :

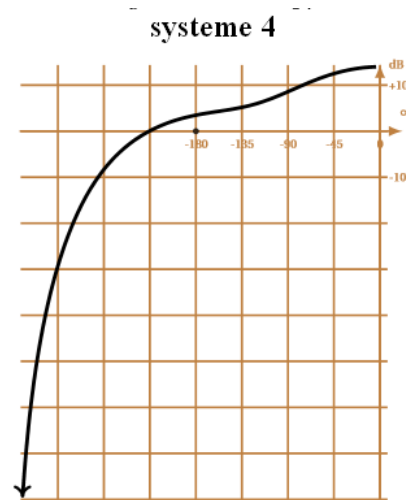
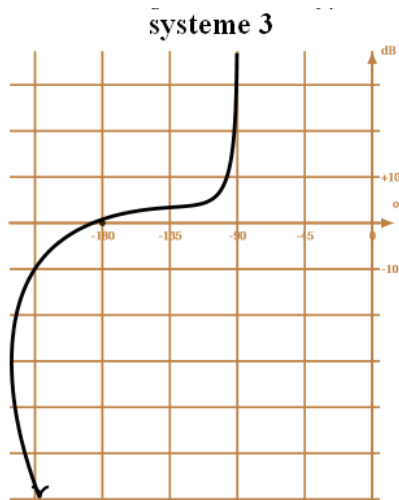
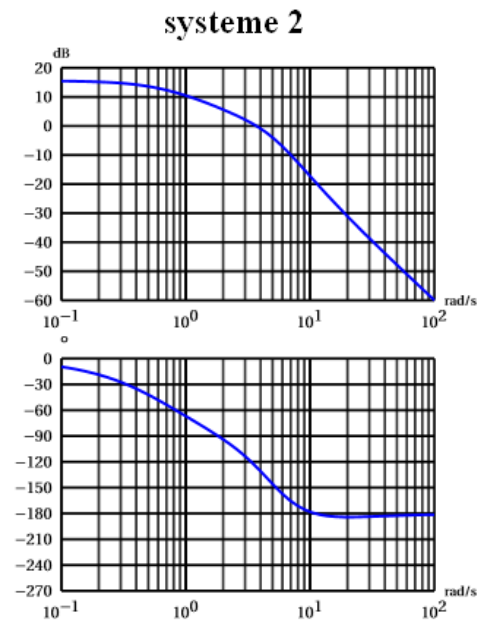
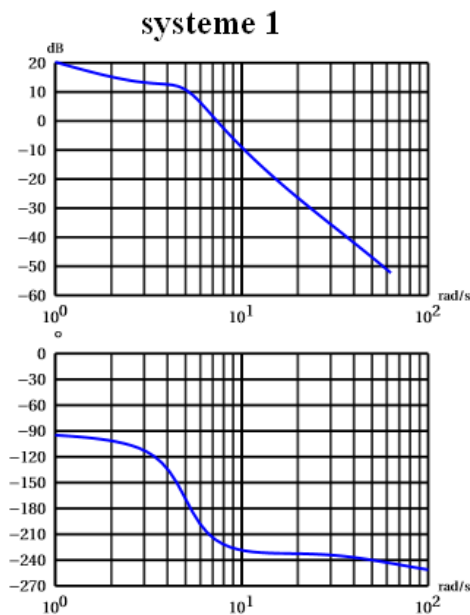
On considère le système de fonction de transfert $G(s)$ définie par :

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)^2}$$

Calculer, en boucle fermée, l'erreur de position, l'erreur de vitesse et l'erreur d'accélération de ce système placé dans une boucle à retour unitaire.

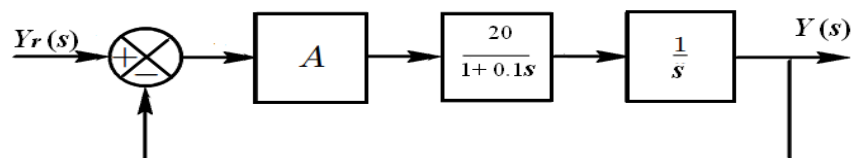
Exercice 5 :

Pour chacune des fonctions de transfert en boucle ouverte tracées sur les figures ci-dessous, déterminer par le critère du revers si le système en boucle fermée est stable.



Exercice 6 :

Considérons le système suivant:



1. calculer la valeur de A nécessaire pour obtenir un facteur amortissement en boucle fermée de $\xi = 0.5$,
2. à partir de la valeur A, déterminer la valeur de l'erreur de position et de l'erreur de vitesse.

Références bibliographiques

1. Adouane, L., & Château, T. (2012). Contrôle et régulation des systèmes linéaires. Notes de Cours, Polytech Clermont-Ferrand.
2. Alani, T. (2011). Modélisation et commande des systèmes. Notes de Cours, Département d'informatique, École d'ingénieurs généraliste dans les domaines des nouvelles technologies de Paris.
3. Allenbach, J. M. (2005). Systèmes asservis, Volume 1: Asservissements linéaires classiques. Notes de Cours, École d'Ingénieurs de Genève.
4. Arzelier, D. (2013). Représentation et analyse des systèmes linéaires. Notes de Cours, École nationale supérieure d'ingénieurs de constructions aéronautiques (ENSICA) de Toulouse.
5. Bayle, B. (2013). Systèmes et Asservissements à Temps Continu. Notes de Cours, École Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg.
6. Choqueuse, V. (2014). Introduction à l'automatique. Notes de Cours, Département de génie électrique et informatique industrielle, Institut universitaire de technologie de Brest.
7. Dutertre, J. M. (2012). Automatique linéaire 1. Notes de Cours, École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne.
8. Gourdeau, R. (2010). Introduction à l'automatisation : Commande des systèmes linéaires. Notes de Cours, Département de génie électrique, École Polytechnique de Montréal.
9. Granjon, Y. (2015). Automatique-: Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'états. Dunod.
10. Karris, S. T. (2006). Signals and systems with MATLAB computing and Simulink modeling. Orchard publications.
11. Le Gallo, O. (2009). Automatique des Systèmes mécaniques. Dunod.
12. Egon, H., Marie, M., & Porée P. (2000). Traitement du signal et automatique. Volume 1, Traitement du signal et asservissements analogiques. Hermann.
13. Ogata, K. (2001). Modern control engineering, Fourth edition, Prentice Hall International Editions.
14. Prouvost, P. (2005). Automatique : contrôle et régulation, Dunod.
15. Rivoire, M., & Ferrier, J. L. (1996). Cours d'Automatique, tomes 1et 2, Editions Eyrolles.
16. Rivoire, M., & Ferrier, J. L. (1996). Exercices d'Automatique, tomes 1et 2, Editions Eyrolles.
17. Rosario, T. (2005). Commande et diagnostic des systèmes dynamiques. Elipses.