الخطوة -1: نتحقق من قابلية تقطير المصفوفة A.

الخطوة -2: نشكل مصفوفة التقطير (الانتقال) P التي تمثل أعمدتها الأشعة الذاتية لـ: A.

الخطوة-3: نحسب المصفوفة القطرية $D = P^{-1}AP$.

مثال-3: تعطى المصفوفة A حيث: $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

هل A قابلة للتقطير علما أنها تقبل قيمة ذاتية بسيطة، $\lambda_1 = 1$ ، وقيمة ذاتييه مضاعفة $-3 = \lambda_2$؟

الحل:

....

3- تطبيقات تقطير المصفوفات المربعة

A مصفوفة مربعة من الدرجة n، وقابلة للتقطير. قيمها الذاتية: $\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_p$.

عندئذ: إذا كان تقطير المصفوفة A بالشكل: $D = P^{-1}AP$ فإن: $\forall n \in \mathbb{N}^*: A^n = PD^nP^{-1}$ حيث :

$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$، وإذا $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$ فإن: $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1^n & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_1^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_1^n \end{pmatrix}$

مثال-4: تعطى المصفوفة A حيث: $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$1-$ بين أن -2، -1هما قيمتان ذاتيتان للمصفوفةA.

$2-$ حدد الشعاعين الذاتيين للمصفوفةA ثم بين أنها قابلة للتقطير.

$3-$ أحسب المصفوفة A^n من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n.

الحل:

....

مسألة: إذا أعطيت لك المصفوفتان : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 0,8 & -1 \\ 0,2 & 1 \end{pmatrix}$

الجزء الأول: أحسب ما يلي: أ) $A = PBP^{-1}$ ب) $B^n/(n \in \mathbb{N})$ بالتراجع ج) استنتج A^n

الجزء الثاني: a ، b حسابان ماليان بحيث في نهاية كل سنة 10%من مبلغ الحساب a تحول (تودع إلى) الحساب b، أما من الحساب b فتحول 40% للحساب a ، وبافتراض أن هذه التحويلات لا يوجد إيداع أو أي تحويل آخر على هذين الحسابين.

إذا كان في الفترة الابتدائية (0) 9 مليون دج بالحساب a و 10مليون دج بالحساب b.

DM

تقطير المصفوفات ومصفوفة التباين –التباين المشترك (التغاير)

1- تعريف المصفوفات القابلة للتقطير

A مصفوفة مربعة، نقول أن المصفوفة A قابلة للتقطير إذا و فقط إذا وجدت مصفوفة مربعة قطرية D ومصفوفة قابلة للقلب P حيث: $D = P^{-1}AP$ (تسمى P مصفوفة للانتقال) .

مثال-1: أدرس قابلية تقطير المصفوفة A حيث: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

الحل:

1- يمكن التحقق من أن المصفوفة $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ قابلة للقلب، وأن: $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$،

2- نتحقق من أن المصفوفة: $D = P^{-1}AP$ مربعة قطرية:

$$D = P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

إذن المصفوفة قابلة للتقطير.

مبرهنة: A مصفوفة مربعة من الدرجة n، عندئذ القضايا التالية متكافئة:

أ- المصفوفة A قابلة للتقطير؛

ب-رتبة تضاعف كل قيمة ذاتية= بعد الفضاء الشعاعي الذاتي المرفق بها؛

ت-يوجد أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^n$ مشكل فقط من الأشعة الذاتية للمصفوفةA.

مثال-2: تعطى المصفوفة A حيث: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1- أثبت أن المصفوفة A قابلة للتقطير، علما أنها تقبل ثلاث قيم ذاتية $\lambda_1 = 1$، $\lambda_1 = 2$، $\lambda_1 = 3$

أشعتها المرافقة هي على الترتيب: $u_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$، $u_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$، $u_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

الحل:

....

2- طريقة تقطير مصفوفة مربعة

A مصفوفة مربعة من الدرجة n، لتقطير المصفوفة A لابد من اتباع الخطوات التالية:

المطلوب: ما هو رصيد كل من الحسابين a و b بعد سنتين؟ بعد 10 سنوات؟

الحل:

أ) حساب $A = PBP^{-1}$

لدينا: $1 = 0,8 + 0,2 = \begin{vmatrix} 0,8 & -1 \\ 0,2 & 1 \end{vmatrix} = det(A)$. إذن المصفوفة P قابلة للقلب حيث:

$$P^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

إذن: $A = PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 0,8 & -1 \\ 0,2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$

ب) نبرهن بالتراجع أن المصفوفة $B^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (0,5)^n \end{pmatrix}$

- من أجل $n = 1$: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^1 & 0 \\ 0 & (0,5)^1 \end{pmatrix} = B^1$ وهي صحيحة من أجل $n = 1$
- نفرض أن: $\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (0,5)^n \end{pmatrix} = B^n$ ونبرهن أن $B^{n+1} = \begin{pmatrix} 1^{n+1} & 0 \\ 0 & (0,5)^{n+1} \end{pmatrix}$

لدينا: $\begin{pmatrix} 1^{n+1} & 0 \\ 0 & (0,5)^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (0,5)^n \end{pmatrix} = B^{n+1} = B * B^n$

إذن بالفعل لدينا: $\forall n \in \mathbb{N}:\ B^{n+1} = \begin{pmatrix} 1^{n+1} & 0 \\ 0 & (0,5)^{n+1} \end{pmatrix}$

جـ) استنتج A^n:

نعلم أن: $A = PBP^{-1}$ وبالتالي فإن

$$A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0,8 & -1 \\ 0,2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (0,5)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,8 & -(0.5)^n \\ 0,2 & (0.5)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 + 0,2(0.5)^n & 0,8 - 0,8(0.5)^n \\ 0,2 - 0,2(0.5)^n & 0,2 + 0,8(0.5)^n \end{pmatrix}$$

الجزء الثاني:

يمكن التعبير عن رصيدي الحسابين a و b بصيغة مصفوفاتية كما يلي:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0.9a_n + 0,4b_n \\ b_{n+1} = 0,1a_n + 0,6b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad \dots (I)$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$(I) \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}}$$

- رصيدا الحسابين a و b بعد سنتين هما على التوالي:

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 + 0,2(0.5)^2 & 0,8 - 0,8(0.5)^2 \\ 0,2 - 0,2(0.5)^2 & 0,2 + 0,8(0.5)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\begin{cases} a_2 = 6,85 \\ b_2 = 4,15 \end{cases}$$

- رصيدا الحسابين a و b بعد عشر سنوات هما على التوالي:
- $$\begin{pmatrix} a_{10} \\ b_{10} \end{pmatrix} = A^{10} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 + 0,2(0.5)^{10} & 0,8 - 0,8(0.5)^{10} \\ 0,2 - 0,2(0.5)^{10} & 0,2 + 0,8(0.5)^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$
- ومنه:

$$\begin{cases} a_{10} = 8,79 \\ b_{10} = 2,21 \end{cases}$$

4-مصفوفة التغاير (التباين-التباين المشترك) Variance-Covariance Matrix

تعريف: يتم تعريف هذه المصفوفة على النحو التالي:

لتكن X مصفوفة ذات n سطر و p عمود و X_{ij} هي قيم ممركزة.

$$X = \begin{array}{c} \text{Variables} \\ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & x_{11} & \cdots & x_{2p} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots\cdots & x_{np} \end{pmatrix} \end{array} \downarrow \text{Individus}$$

عندئذ بالتعريف، مصفوفة التباين-التباين المشترك هي المصفوفة: $M = \frac{1}{n}X^t.X$ حيث:

$$\frac{1}{n}X^t.X = \begin{pmatrix} var(x_1) & \cdots & \cdots & \cdots & cov(x_1, x_p) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & var(x_j) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ cov(x_1, x_p) & \cdots & \cdots & \cdots & var(x_p) \end{pmatrix}$$

حيث X_{ij} قيم ممركزة

حالة المتغيرات الممركزة والمختصرة:

نعلم أن: $r_{x_1x_2} = \frac{cov(x_1,x_2)}{\sigma_1\sigma_2}$ ، فإذا كان: $\sigma_i = 1$ و $\sigma_j = 1$ فإن: $cov(x_i,x_j) = r_{x_ix_j}$

ويصبح لدينا:

$$\frac{1}{n}X^t.X = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & \cdots & \cdots & r_{x_1x_p} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ r_{x_1x_p} & \cdots & & \cdots & \cdots & 1 & \end{pmatrix}$$

حالة خاصة (من أجل p=2):

نستبدل المتغيرات للتبسيط: $X = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{X} & y_1 - \bar{Y} \\ x_2 - \bar{X} & y_2 - \bar{Y} \\ x_3 - \bar{X} & y_3 - \bar{Y} \\ \vdots & \vdots \\ x_p - \bar{X} & y_p - \bar{Y} \end{pmatrix}$

وبالتالي: $\frac{1}{n}X^t.X = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} x_1 - \bar{X} & x_2 - \bar{X} & x_3 - \bar{X} & \cdots & x_n - \bar{X} \\ y_1 - \bar{Y} & y_2 - \bar{Y} & y_3 - \bar{Y} & \cdots & y_n - \bar{Y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - \bar{X} & y_1 - \bar{Y} \\ x_2 - \bar{X} & y_2 - \bar{Y} \\ x_3 - \bar{X} & y_3 - \bar{Y} \\ \vdots & \vdots \\ x_p - \bar{X} & y_p - \bar{Y} \end{pmatrix}$

ومنه:

$$\boldsymbol{\frac{1}{n}(X)^t(X) = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2 & \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y}) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y}) & \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{Y})^2 \end{pmatrix}}$$

<u>**تطبيق توضيحي**</u>

مجتمع مكون من 4 أفراد (Individus) أين نهتم بدراسة 3 متغيرات إحصائية x, y, z. هؤلاء الأفراد هم 4 عائلات من 5 أطفال يعيشون بأجرة واحدة. والمتغيرات الإحصائية الثلاثة معرفة بمئات الدنانير، وهي على التوالي:

x: الأجرة المتحصل عليها في جنافي لهذه السنة؛

y: النفقات المخصصة للاستهلاك خلال هذا الشهر؛

z : النفقات المخصصة للتسلية خلال هذا الشهر.

أوجد مصفوفة التباين–التباين المشترك، علما أن القيم الخاصة بهذه المتغيرات محددة في الجدول التالي:

	الأجرة x	نفقات الاستهلاك y	نفقات التسلية z
العائلة 1	35	10.7	1
العائلة 2	08	2.5	0.5
العائلة 3	12	3.8	1.5
العائلة 4	25	7	5

1- أحسب مصفوفة التباين–التباين المشترك.

2- أحسب مصفوفة الارتباط، ثم علق عليها.

الحل:

1- حساب مصفوفة التباين–التباين المشترك.

أ) حساب المتوسطات الحسابية للمتغيرات

$$\bar{X} = \frac{35+8+12+25}{4} = 20 \text{ و} \bar{Y} = \frac{7+3.5+10.7+2.5}{4} = 6 \text{ و } \bar{Z} = \frac{1+0.5+1.5+5}{4} = 2$$

ب) حساب مصفوفة البيانات الممركزة: $X = \begin{pmatrix} 15 & 4.7 & -1 \\ -12 & -3.5 & -1.5 \\ -8 & -2.2 & -0.5 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

وبالتالي فإن مصفوفة التباين–التباين المشترك تعطى بالصيغة التالية: $\frac{1}{n}X^t.X$

$$\frac{1}{n}X^t.X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 15 & -12 & -8 & 5 \\ 4.7 & -3.5 & -2.2 & 1 \\ -1 & -1.5 & -0/5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & 4.7 & -1 \\ -12 & -3.5 & -1.5 \\ -8 & -2.2 & -0.5 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 114.5 & 12.775 & -3.5 \\ 12.775 & 10.075 & 1.1625 \\ -3.5 & 1.1625 & 3.125 \end{pmatrix}$$

ت) حساب مصفوفة الارتباط:

بعد حساب الانحرافات المعيارية للمتغيرات x, y, z، حيث:

$$\sigma_X = \sqrt{114.5} = 10.7005;\ \ \sigma_Y = \sqrt{10.075} = 3.1741;\ \sigma_Z = \sqrt{3.125} = 1.7678$$

وبالتالي يمكن حساب القيم الممركزة المختصرة يصبح لدينا:

		X	Y	Z
$\frac{1}{n}X^t.X =$	X	1	0.9959	0.2908
	Y	0.9959	1	0.2075
	Z	0.2908	0.2075	1

<u>مسألة</u>: نهتم في هنا بدراسة الارتباط بين نقاط 10 طلبة لثلاثة مواد: انجليزية، ورياضيات، ودراسة حالة.

N°**etudiant**	**Anglais**	**Maths**	**Etude de cas**
1	12	9	8
2	8	17	15
3	10	12	14
4	4	7	4
5	15	11	13
6	5	14	18
7	8	10	12
8	12	14	6
9	12	16	13
10	4	10	7
Moyenne	9	12	11

1- أوجد المصفوفة A للقيم الممركزة لـ: 10 طلبة لنقاط المواد الثلاث.

2- أحسب المصفوفة $V = A^t * A$، ماذا تمثل؟

3- استنتج معامل الارتباط بين كل مادتين,

الحل:

1- أيجاد المصفوفة A للقيم الممركزة لـ: 10 طلبة لنقاط المواد الثلاث.

$$A = X - \bar{X} = \begin{array}{c} \begin{matrix} (X_1)A & (X_2)M & (X_3)EC \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -5 & -5 & -7 \\ 6 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 7 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 2 \\ -5 & -2 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$

2- حساب المصفوفة $V = A^t * A$، ماذا تمثل؟

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -5 & 6 & -4 & -1 & 3 & 3 & -5 \\ -3 & 5 & 0 & -5 & -1 & 2 & -2 & 2 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 3 & -7 & 2 & 7 & 1 & -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -5 & -5 & -7 \\ 6 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 7 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 2 \\ -5 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

إذن:

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 132 & 27 & 19 \\ 27 & 92 & 80 \\ 19 & 80 & 182 \end{pmatrix}$$

بمعنى أن الأعداد الموجودة على القطر الرئيسي هي من الشكل: $\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x_i} - \bar{\boldsymbol{X}})^2$

أما الإعداد خارج القطر الرئيسي فهي من الشكل: $\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x_i} - \bar{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{y_i} - \bar{\boldsymbol{Y}})$؛

وعليه، فإن مصفوفة التباين-التباين المشترك هي:

$$\frac{1}{10} A^t \cdot A = \begin{pmatrix} vra(x_1) & cov(x_1, x_2) & cov(x_1, x_3) \\ cov(x_1, x_2) & vra(x_2) & cov(x_2, x_3) \\ cov(x_1, x_3) & cov(x_2, x_3) & vra(x_3) \end{pmatrix}$$

حيث:

معامل ارتباط مادة الإنجليزية والرياضيات هو: $r_{x_1x_2} = r_{AM} = \frac{27}{\sqrt{132}\sqrt{92}} = 0.245$

ومعامل ارتباط مادة الرياضيات ودراسة الحالة هو: $r_{x_2x_3} = r_{M\cdot EC} = \frac{80}{\sqrt{92}\sqrt{182}} = 0.618$

ومعامل ارتباط مادة الإنجليزية ودراسة الحالة هو: $r_{x_1x_3} = r_{A\cdot EC} = \frac{19}{\sqrt{132}\sqrt{282}} = 0.123$

وعليه، فإن مصفوفة معاملات الارتباط هي: $\frac{1}{10}A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0.245 & 0.123 \\ 0.245 & 1 & 0.618 \\ 0.123 & 0.618 & 1 \end{pmatrix}$

9