الإحصاء و الإحتمالات

الجزء II: الإحتمالات (Probability)

الفصل 2: مقدمة في الإحتمالات (Introduction to Probability)

يشير مصطلح الاحتمال إلى الدراسة العشوائية وعدم اليقين. وفي أي حالة من الحالات التي قد تحدث فيها إحدى النتائج المحتملة، توفر نظرية الاحتمالات طرقًا لقياس الفرص أو الاحتمالات المرتبطة بالنتائج الممكنة. في هذا الفصل، نقدم بعض المفاهيم الأولية للإحتمالات، ونشير إلى كيفية تفسير الاحتمالات، ونبين أيضا كيف يمكن تطبيق قواعد الاحتمال لحساب احتمالات العديد من الأحداث.

II.2.1_ بعض المفاهيم العامة حول المجموعات (Some General Concepts about Sets)

1/ تعريف المجموعة: هي مجموعة من العناصر تجمعها خصائص مشتركة.

<u>**مثال:**</u> طلبة السنة الأولى علوم وتكنولوجيا لجامعة ميلة.

2/ أنواع المجموعات: تنقسم المجموعات حسب معايير متعددة:

- ❖ حسب عدد العناصر المكونة لها:

1.2/ مجموعة منتهية: هي المجموعة التي عدد عناصرها محدّد (**منتهي**)، كمجموعة الأعداد الطبيعية الأقل من 5 وهي (0،1،2،3،4).

2.2/ مجموعة غير منتهية: هي المجموعة التي لايمكن تحديد عدد عناصرها (**عدد غيرمنتهي من العناصر**)، كمجموعة الأعداد الطبيعية.

- ❖ حسب العلاقة التي تجمع المجموعات فيما بينها:

3.2/ المجموعة الكلّية: هي المجموعة التي تضم جميع العناصر ونرمز لها بالرمز Ω، كما يمكن من خلال هذه المجموعة تشكيل مجموعات جزئية.

4.2/ المجموعة الجزئية: نقول عن المجموعة A مجموعة جزئية من Ω إذا وفقط إذا كانت A تضم مجموعة من العناصر التي تنتمي إلى Ω، وبالتالي A محتواة في Ω ونكتب: $A \subseteq \Omega$.

5.2/ المجموعة المتمّمة: إذا كانت المجموعة A مجموعة جزئية من Ω و كانت هناك عناصر أخرى تختلف عن عناصر A وتنتمي إلى Ω فإن هذه الأخيرة تشكّل مجموعة تدعى بـ: **المجموعة المتمّمة**، نرمز لها بالرمز $\overline{A}$ وتدعى أيضا **نفي** A.

<u>**ملاحظات:**</u>

- ✓ إن عدد عناصر أي مجموعة يدعى بـــ: **أصلي** المجموعة ونرمز له بالرمز card.

- ✓ العناصر التي تنتمي إلى A لاتنتمي إلى $\overline{A}$ ، أي أن: $\overline{A} \cap A = \emptyset$.
- ✓ إن دمج عناصر A مع عناصر $\overline{A}$ (**إتحاد**) يعطي المجموعة الكلية Ω ، أي أن: $\overline{A} \cup A = \Omega$.
- ✓ يمكن تحديد عناصر $\overline{A}$ بواسطة العلاقة: $\overline{A} = \Omega - A$.
- ✓ ناتج نفي المجموعة الكلّية هي المجموعة الخالية، أي أن: $\overline{\Omega} = \emptyset$.
- ✓ ناتج نفي المجموعة الخالية هي المجموعة الكلّية، أي أن: $\overline{\emptyset} = \Omega$.

3/ خصائص العمليات على المجموعات: المجموعات تخضع إلى عمليات منطقية تتمثل فيما يلي:

1.3/ الإتحاد (Union): إذا كانت A و B مجموعتان جزئيتان من Ω، فإن العناصر التي تنتمي إلى A أوB تشكل لنا إتحاد المجموعتين A وB، بعبارة أخرى:

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \,/\omega \in A \quad \text{or} \quad \omega \in B\}$$

مثال: لتكن المجموعتين A و B، حيث A تحتوي على الأعداد الطبيعية التي هي أقل من 6، والمجموعة B تحتوي على الأعداد الطبيعية التي هي أكبر تماما من 2 وأقل أو تساوي 8. المطلوب أوجد اتحاد المجموعتين A و B؟

الحل:

لدينا : $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ و $B = \{3,4,5,6,7,8\}$ ومنه $A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

❖**أهم خواص الإتحاد:**

- ✓ $A \cup A = A$.
- ✓ $A \cup \Omega = \Omega$.
- ✓ $A \cup \emptyset = A$.
- ✓ خاصية التجميع $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$.
- ✓ خاصية التوزيع $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- ✓ إذا كانت $A \subseteq B$ فإن: $A \cup B = B$.

2.3/ التقاطع (Intersection): المجموعة التي ينتمي كل عناصرها إلى المجموعتين A و B في آن واحد تسمى **بتقاطع** المجموعتين A و B، بعبارة أخرى:

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega \,/\omega \in A \quad \text{and} \quad \omega \in B\}$$

_ بالرجوع للمثال أعلاه: $A \cap B = \{3,4,5\}$

❖**أهم خواص التقاطع:**

✓ $A \cap A = A$.

✓ $A \cap \Omega = A$.

✓ $A \cap \emptyset = \emptyset$.

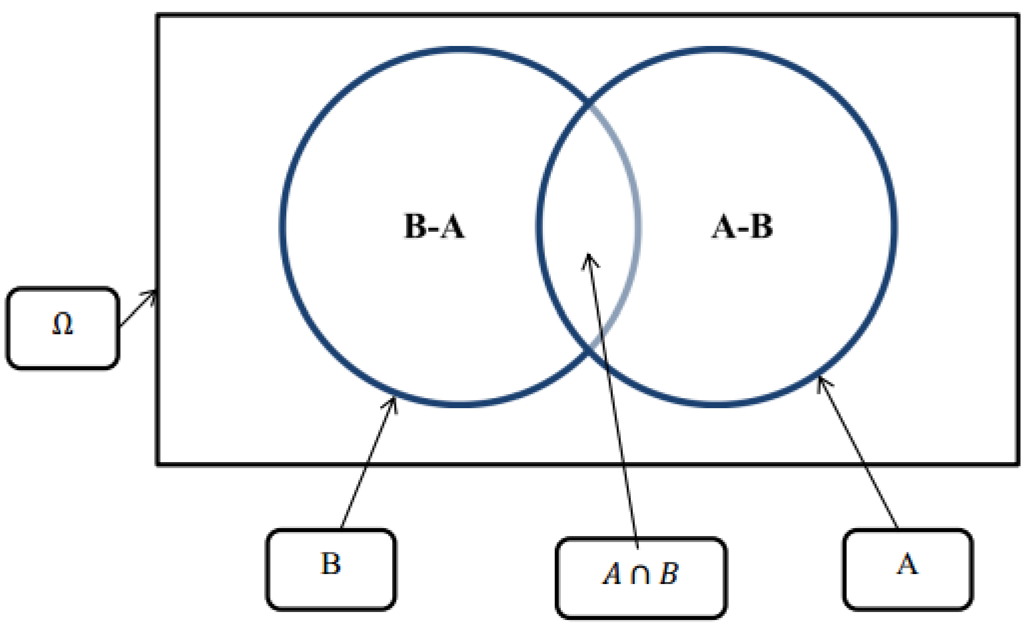
✓ خاصية التجميع $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$.

✓ خاصية التوزيع $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cap (A \cup C)$.

✓ إذا كانت $B \subseteq A$ فإن: $A \cap B = A$.

3.3 / الفرق:

مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B تسمى بالفرق بين A وB ونرمز لهذا بالرمز $A - B$، نفس الشيء بالنسبة لمجموعة العناصر التي تنتمي إلى B ولا تنتمي إلى A تسمى بالفرق بين B و A والتي نرمز لها بالرمز $B - A$. يمكن توضيح هذه المجموعات بالمخطط الآتي:



❖**أهم خواص الفرق:**

✓ $A - B = A - (A \cap B) = A \cap \overline{B}$

✓ $B - A = B - (A \cap B) = \overline{A} \cap B$

✓ $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

✓ $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$

✓ $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$

✓ العناصر التي لاتنتمي لا إلى A ولا إلى B في نفس الوقت وتنتمي إلى Ω هي: $\bar{A} \cap \bar{B}$.

✓ $\bar{A} \cap \bar{B} = \Omega - (A \cup B)$

✓ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

✓ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

II.2.2_ مفاهيم أساسية في الاحتمالات

1/ التجربة العشوائية (Random experiment): التجربة العشوائية في علم الإحتمالات هي عملية يتمخّض عنها عدة نتائج ممكنة (أحداث) ولا يمكن التنبؤ بنتائجها بشكل مؤكد مسبقا.

2/ فضاء التجربة العشوائية (sample space): هو مجموعة تتألف من جميع الحالات الممكن ظهورها عند قيامنا بتجربة عشوائية. يسمى أيضا بالفضاء الأساسي، فضاء العينة أو مجموعة الإمكانيات، ونرمز له بالرمز Ω.

3/ الحدث (Event): هو مجموعة جزئية (فرعية) من فضاء التجربة العشوائية لأن التجربة تتفرغ بالضرورة إلى أحداث. كما يشير الحدث إلى بعض النتائج التي قد تحدث أولا تحدث عند القيام بتجربة عشوائية إحصائية معينة. ويمكننا تقسيم الحوادث حسب عدة معايير:

❖ حسب درجة التأكد:

1.3/ الحدث الأكيد (sure event): هو الذي لا بد أن يظهر في أي حالة من الحالات الممكنة. فمثلا إذا اعتبرنا تجربة عشوائية تتمثل في سحب رقم من من مجموعة الأرقام التالية: $\{0,1,2,3,4,5\}$ واعتبرنا الحادث A ظهور رقم أكبر أو يساوي واحد، في هذه الحالة فإن الحدث A هو حدث أكيد سيتحقق.

2.3/ الحدث المستحيل (Impossible event): هو الذي يستحيل ظهوره في أي حالة من الحالات الممكنة. فمثلا إذا اعتبرنا تجربة عشوائية تتمثل في سحب رقم من من مجموعة الأرقام التالية: $\{0,1,2,3,4,5\}$ واعتبرنا الحادث B ظهور رقم أكبر أو يساوي 6، في هذه الحالة فإن الحدث B هو حدث مستحيل.

❖ حسب العلاقة بين الحوادث:

3.3/ الحوادث المتنافية فيما بينها والغير المتنافية (Conflicting Events and Non-conflicting Events):

نقول عن حدثين أنهما متنافيين إذا كان ظهور أحدهما يمنع من ظهور الحدث الآخر، أي استحالة تحقّقهما في آن واحد.

فمثلا نجاح الطالب وعدم نجاحه هما حدثين متنافيين.

ونقول عن حدثين أنهما غير متنافيين إذا كان ظهور أحدهما لايمنع من ظهور الحدث الآخر، أي أنه يمكن تحقّقهما في آن واحد.

4.3/ الأحداث المستقلة فيما بينها والغير مستقلة (Independent events and dependent events): نقول عن حدثين أنهما مستقلّين إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر ولا يتأثر بقوع الحدث الآخر. فمثلا عند سحب على التوالي كريتين عشوائيا دون إرجاع من صندوق به أربع كريات بيضاء وواحدة سوداء، حيث نسحب الكرية الاولى **ولانقوم بإرجاعها** ثم نسحب الكرية الثانية وفي هذه الحالة نجد الكرية الثانية تتأثر بالكرية الأولى، فإذا ظهرت في عملية السحب الأولى كرية سوداء فالكرية الثانية حتما ستكون بيضاء وفي هذه الحالة نسمي الحدث الأخير حدث شرطي لأنه مرتبط بتحقق الحدث الأول. لكن مثلا عند رمي زهرة النرد أربع مرات فإن الرقم الذي يظهر عند أي رمية ليس لو علاقة بالرميات الأخرى وبالتالي هنا الأحداث مستقلة عن بعضها.

4/ الإحتمال (Probability): هو تخصيص عدد P(A) لكل حدث A في فضاء العينة Ω ويسمى احتمال الحدث A، والذي سيعطي قياسًا دقيقًا لفرصة حدوث الحدث A، وبهذا فهويشير إلى قوة ما نعتقد حدوثه في المستقبل. يتم حساب الإحتمال بالصيغة التالية:

$$P(A) = \text{إحتمال تحقق الحدث } A = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

ملاحظة: يكمن الفرق بين الحدث العشوائي والإحتمال في أن الحدث العشوائي هو واقعة أو نتيجة أو إمكانية ناتجة عن تجربة ما، أما الاحتمال فهو عدد محصور بين الصفر والواحد يعبر عن حظوظ أو فرص وقوع هذا الحدث.

مثال: ماهو احتمال الحصول على عدد زوجي عند رمي زهرة النرد؟

الحل: لدينا الحالات الممكنة هي: $\{1,2,3,4,5,6\}$ و الحالات الملائمة هي: $A = \{2,4,6\}$ و بالتالي:

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0.5$$

❖ **خواص الإحتمال:**

✓ قيمة الاحتمال محصورة بين 0 و1، فإذا كانت تساوي 1 فهذا يعني الحدث أكيد، وإذا كانت قيمتة تساوي 0 فهذا يعني أن الحدث مستحيل.

✓ مجموع احتمالات أحداث تجربة ما يساوي الواحد لأن: $P(\Omega) = 1$.

✓ إحتمال تحقق حدث A والحدث المتمّم له $\overline{A}$ يساوي دوما 1، أي: $P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Leftrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

5/ قواعد ونظريات أساسية في حساب الإحتمال (Basic Rules and Theories in Probability Calculations):

1.5/ قاعدة الجمع (Addition Rule): إذا كان A و B عبارة عن حدثين وكان المطلوب هو حساب إحتمال تحقق أحد الأحداث المعنية (A أو B) على الأقل، وعليه فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

و نميز الحالتين الآتيتين:

✓ **حالة الأحداث المتنافية:** إذا كان A و B حدثين متنافيين فإن احتمال حدوث A أو B هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad و \quad P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0.$$

مثال: عند رمي قطعة نرد مرة واحدة، نفرض أن الحدث A يتمثل في الحصول على الرقم 5 و الحدث B يتمثل في الحصول على رقم زوجي. أحسب احتمال تحقق A و B ؟

الحل: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2}{3}$

✓ **حالة الأحداث المتلائمة (الغير متنافية):** إذا كان A و B حدثين متلائمين فإن احتمال حدوث A أو B هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad و \quad P(A \cap B) \neq 0.$$

مثال: عند رمي قطعة نرد مرة واحدة، نفرض أن الحدث A يتمثل في الحصول على الرقم 4 و الحدث B يتمثل في الحصول على رقم زوجي. أحسب احتمال تحقق A و B ؟

الحل: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

2.5/ قاعدة الضرب (Multiplication Rule):

✓ **حالة الأحداث المستقلة:** إذا كان A و B حدثين مستقلين فإن احتمال حدوثهما في آن واحد هو:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

مثال: نتائج رمي قطعتي نقود متتاليتين هي حوادث مستقلة. لأن نتائج قطعة النقود الأولى غير مرتبط بنتائج قطعة النقود الثانية. فإذا اعتبرنا ظهور صورة قطعة النقود الأولى حدث A وظهور صورة قطعة النقود الثانية حدث B فإن احتمال ظهور الصورة هو:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

✓ **حالة الأحداث غير المستقلة:** إذا كان A و B حدثين غير مستقلين فإن احتمال حدوثهما في آن واحد هو:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

ونقرأ: احتمال وقوع الحدثين A وB يساوي احتمال وقوع الحدث A مضروب في احتمال وقوع الحدث B علما أن الحدث A قد وقع.

و $P(B/A)$ يدعى **الإحتمال الشرطي**.

الفصل 3: الاحتمال الشرطي و نظرية بايز

1/ الاحتمال الشرطي (Conditional Probability): ليكن الحدثين A و B، إن احتمال وقوع الحدث A علما الحدث B قد وقع يسمى بالإحتمال الشرطي، ويرمز له بالرمز $P(B/A)$ حيث:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ملاحظة: إذا كان A و B حدثين مستقلين فإن الاحتمال الشرطي يصبح: $P(A/B) = P(A)$.

مثال: لتكن تجربة تتمثل في رمي قطعة نرد. إذا كان العدد الظاهر زوجي أحسب احتمال أن يكون أوّلي.

الحل: لدينا عدد الحالات الممكنة هو: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

نرمز بـالحرف A للحدث ظهور عدد زوجي وبالحرف B للحدث ظهور عدد أوّلي: $A = \{2,4,6\}$، $B = \{2,3,5\}$

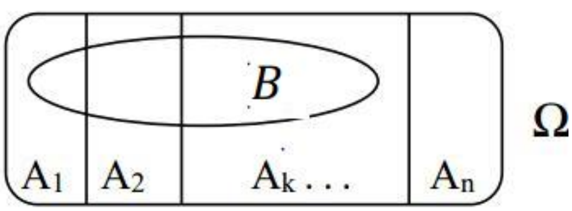
ومنه: $A \cap B = \{2\}$

وبالتالي:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

2/ **الاحتمال الكلي** (Total Probability):

إذا كان B حدثا ينتج عن أحد أو بعض الأحداث المتنافية: $A_1 , A_2 , A_3 \ldots\ldots A_n$ التي اتحادها يشكل المجموعة الكلية Ω، فإن الحدث B هو:



$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$$

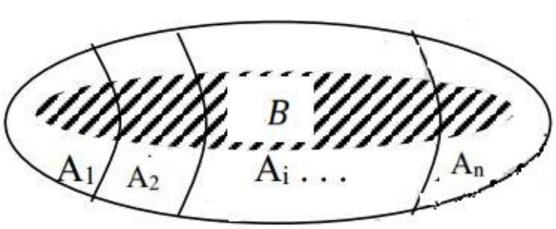
و احتمال حدوث (تحقق) الحدث B يعطى كما يلي:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

ويسمى هذا القانون بقانون **الإحتمال الكلي**.

3/ نظرية بايز (Bayes' Theorem):

لتكن الأحداث المتنافية التالية: $A_1 , A_2 , A_3 \ldots\ldots A_n$ والتي اتحادها يشكل المجموعة الكلية Ω، وليكن B حدثا ما يتحقق عن طريق أحد أو بعض الأحداث A_i، إذا علمنا أن الحدث B تحقق فعلا، فإن احتمال تحققه عن طريق الحدث A_i فقط يعطى كالتالي:



$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B/A_i)}$$

مثال: لدى مصنع للأقمصة ثلاث آلات M_1، M_2 و M_3 تنتج على الترتيب 20%، 30%، 50% من إنتاج المصنع. وكانت نسبة الأقمصة الجيّدة المنتجة من طرف الآلات على الترتيب هي 90% ، 66%، 90%، وبالتالي نسبة الاقمصة التي بها عيب والمنتجة بواسطة هذه الآلات على الترتيب هي 10%، 34%، 10%.

1_ ماهو احتمال انتاج قميص جيد من طرف الآلة M_2؟

2_ ما هو احتمال انتاج قميص به عيب من طرف الآلة M_1؟

الحل

1_ احتمال انتاج قميص جيد من طرف الآلة M_2:

نرمز للحدث انتاج قميص جيد بــالحرف G

نرمز للحدث انتاج قميص به عيب بــالحرف B

و اعتمادا عل نظرية بايز لدينا

$$\mathrm{P}(M_2/\mathrm{G}) = \frac{\mathrm{P}(M_2)\mathrm{P}(\mathrm{G}/M_2)}{\mathrm{P}(M_2)\mathrm{P}(\mathrm{G}/M_2) + \mathrm{P}(M_1)\mathrm{P}(\mathrm{G}/M_1) + \mathrm{P}(M_3)\mathrm{P}(\mathrm{G}/M_3)}$$
$$= \frac{0.3 \times 0.66}{0.3 \times 0.66 + 0.2 \times 0.9 + 0.5 \times 0.9}$$
$$= 0.24 = 24\%$$

2_ احتمال انتاج قميص به عيب من طرف الآلة M_1:

اعتمادا عل نظرية بايز لدينا

$$\mathrm{P}(M_1/\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(M_1)\mathrm{P}(\mathrm{B}/M_1)}{\mathrm{P}(M_1)\mathrm{P}(\mathrm{B}/M_1) + \mathrm{P}(M_2)\mathrm{P}(\mathrm{B}/M_2) + \mathrm{P}(M_3)\mathrm{P}(\mathrm{B}/M_3)}$$
$$= \frac{0.2 \times 0.1}{0.2 \times 0.1 + 0.3 \times 0.34 + 0.5 \times 0.1}$$
$$= 0.116 \approx 0.12 = 12\%$$