# Réduction des Endomorphismes

# Chapitre 1

# Applications de diagonalisation

Dans cet chapitre, on donne quelques applications de diagonalisation, plus précisément en donnant trois applications, le calcul de la puissance d'une matrice, Résoudre les systèmes de suites récurrentes et la résolution des systèmes différentiels à coefficients constants.

## 1.1 Application aux puissances d'une matrice carrée

Voici une première application de la diagonalisation d'une matrice carrée. Il est facile de calculer la puissance k-ème d'une matrice diagonale puisqu'il suffit d'élever à la puissance $k$ chacun des termes diagonaux :

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} \alpha_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1}^k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n^k \end{pmatrix}.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour un nombre naturelle $k$ on a

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k\ fois}.$$

Si $A$ est diagonalisable, alors il existe une matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

et une matrice inversible $P$ tels que

$$A = PDP^{-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
A^k &= \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k\ fois} \\
&= \underbrace{(PDP^{-1}) \times (PDP^{-1}) \times \ldots \times (PDP^{-1})}_{k\ fois} \\
&= PDI_nDI_n \ldots I_nDP^{-1} \\
&= P\underbrace{D \times D \times \ldots \times D}_{k\ fois}P^{-1}, \\
&= PD^kP^{-1}.
\end{aligned}$$

D'où

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1}^k & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

**Exemple 1.1.1.** *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. *D'après l'exemple* (**??**) *on a* $A$ *est diagonalisable et*

$$A = P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \times P^{-1}$$

*avec* $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $P^{-1} = \frac{1}{-30}\begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

*Nous avons donc*

$$A^k = \frac{1}{-30}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

*D'où*

$$A^k = \frac{1}{-30}\begin{pmatrix} -2(2)^{k+2} - 10(-4)^k & -12 - 3(-4)^{k+1} & -18 + 5(2)^{k+2} - 2(-4)^k \\ -15(2)^k + 15(-4)^k & -12 - 18(-4)^k & -18 + 15(2)^k + 3(-4)^k \\ 5(2)^{k+1} - 10(-4)^k & -12 - 3(-4)^{k+1} & -18 - 5(2)^k - 2(-4)^k \end{pmatrix}.$$

**Exemple 1.1.2.** *Soit la matrice* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. *D'après l'exemple* (**??**) *on a B est diagonalisable et*

$$B = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

*avec* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $P^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

*Nous avons donc*

$$B^{2016} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^{2016} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

*D'où*

$$B^{2016} = \begin{pmatrix} 4^{2015} & 4^{2015} & 4^{2015} & 4^{2015} \\ 4^{2015} & 4^{2015} & 4^{2015} & 4^{2015} \\ 4^{2015} & 4^{2015} & 4^{2015} & 4^{2015} \\ 4^{2015} & 4^{2015} & 4^{2015} & 4^{2015} \end{pmatrix} = 4^{2015} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 1.2 Application aux systèmes des suites récurrentes

Soient $(U_{1_n}), (U_{2_n}), \ldots, (U_{k_n})$ $k$ suites, et soit le système des suites récurrentes

$$\begin{cases} U_{1_{n+1}} = a_{11}U_{1_n} + a_{12}U_{2_n} + \cdots + a_{1k}U_{k_n} \\ U_{2_{n+1}} = a_{21}U_{1_n} + a_{22}U_{2_n} + \cdots + a_{2k}U_{k_n} \\ \qquad \vdots \\ U_{k_{n+1}} = a_{k1}U_{1_n} + a_{k2}U_{2_n} + \cdots + a_{kk}U_{k_n} \end{cases} \tag{1.1}$$

On écrit le système sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} U_{1_{n+1}} \\ U_{2_{n+1}} \\ \vdots \\ U_{k_{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{12} \\ a_{12} & a_{12} & \ldots & a_{12} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1_n} \\ U_{2_n} \\ \vdots \\ U_{k_n} \end{pmatrix}.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} U_{1_n} \\ U_{2_n} \\ \vdots \\ U_{k_n} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{12} \\ a_{12} & a_{12} & \dots & a_{12} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{12} \end{pmatrix}$. Donc le système (1.1) s'écrit

$$X_{n+1} = AX_n.$$

Qui nous donne :

$$X_n = A^n X_0.$$

Si $A$ est diagonalisable, alors il existe une matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix},$$

et une matrice inversible $P$ tels que

$$A = PDP^{-1}.$$

- **Méthode 1 :**

$$X_n = A^n X_0 = PD^n P^{-1} X_0,$$

  c'est à dire :

$$\begin{pmatrix} U_{1_n} \\ U_{2_n} \\ \vdots \\ U_{k_n} \end{pmatrix} = P \times \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{k-1}^n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k^n \end{pmatrix} P^{-1} \times \begin{pmatrix} U_{1_0} \\ U_{2_0} \\ \vdots \\ U_{k_0} \end{pmatrix}.$$

- **Méthode 2 :**
  On pose $Y_n = P^{-1} X_n$, alors

$$\begin{aligned} X_{n+1} = AX_n \quad & \Leftrightarrow \quad PY_{n+1} = APY_n \\ & \Leftrightarrow \quad Y_{n+1} = P^{-1}APY_n \\ & \Leftrightarrow \quad Y_{n+1} = DY_n. \end{aligned}$$

  Donc, $Y_n = D^n Y_0$ avec $Y_0 = P^{-1} X_0$, c'est à dire

$$Y_n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{k-1}^n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k^n \end{pmatrix} \times Y_0, \quad Y_0 = P^{-1} \begin{pmatrix} U_{1_0} \\ U_{2_0} \\ \vdots \\ U_{k_0} \end{pmatrix}.$$

Finalement

$$X_n = P \times \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{k-1}^n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k^n \end{pmatrix} \times Y_0.$$

**Exemple 1.2.1.** *Soit le système des suites récurrentes suivant :*

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + 4V_n \\ V_{n+1} = \frac{1}{2} U_n \end{cases} \tag{1.2}$$

*avec $U_0 = 1$ et $V_0 = 2$.*

*Le système* (1.2) *s'écrit sous la forme matricielle*

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}.$$

*On pose $X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.*

$$X_{n+1} = AX_n.$$

**Diagonaliser $A$ :**

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1).$$

*la matrice $A$ est d'ordre 2 et admet deux valeurs propre distinctes qui sont $-1$ et $2$, donc $A$ est diagonalisable.*

$$E_{-1} = \left\{ (x, y) : \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} =< (2, -1) > .$$

$$E_2 = \left\{ (x, y) : \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} =< (4, 1) > .$$

*Alors,*

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

*et*

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Posant* $Y_n = P^{-1}X_n$, *donc*

$$X_{n+1} = AX_n \Leftrightarrow Y_{n+1} = DY_n.$$

*D'où* $Y_n = D^n Y_0 = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(-1)^n \\ 2^{n-1} \end{pmatrix}.$

*Finalement*

$$X_n = PY_n = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(-1)^n \\ 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3}(-1)^n + 2^{n+1} \\ \frac{1}{3}(-1)^n + 2^{n-1} \end{pmatrix},$$

*ce qui nous donne l'expression du terme général de chacune des deux suites :*

$$U_n = \frac{-2}{3}(-1)^n + 2^{n+1}, \quad V_n = \frac{1}{3}(-1)^n + 2^{n-1}.$$

**Exemple 1.2.2.** *Soit le système des suites récurrentes suivant :*

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + v_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n) \end{cases} \tag{1.3}$$

*avec* $u_0 = 0, v_0 = 22$ *et* $w_0 = 22$.

*Le système* (1.3) *s'écrit sous la forme matricielle*

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

*On pose* $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. *Donc on aura*

$$X_{n+1} = AX_n.$$

**Diagonaliser** $A$ **:**

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2+C_3}{=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_3-L_1}{\overset{L_2-L_1}{=}} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{12}-\lambda & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\frac{1}{12}-\lambda\right)\left(\frac{1}{4}-\lambda\right).$$

*la matrice $A$ est d'ordre 3 et admet trois valeurs propre distinctes qui sont* $1$, $\frac{1}{12}$ *et* $\frac{1}{4}$, *donc $A$ est diagonalisable.*

$$E_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} =< (1,1,1) > .$$

$$E_{\frac{1}{4}} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} =< (1,0,-1) > .$$

$$E_{\frac{1}{12}} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} =< (3,-8,3) > .$$

*La matrice de passage $P$ est égale à*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

*D'autre part on a*

$$P^{-1} = \frac{1}{detP} {}^t(Co(P)) = \frac{1}{22} {}^t\begin{pmatrix} 8 & 11 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \\ 8 & -11 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 11 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

*D'où*

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

*Donc,* $\forall n \in \mathbb{N} : X_n = A^n X_0 = PD^nP^{-1}X_0$

$$= \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 11 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 22 \\ 22 \end{pmatrix}$$

*et donc :* $\forall n \in \mathbb{N}$
$$\begin{cases} u_n = 14 - \dfrac{11}{4^n} - \dfrac{3}{12^n} \\ v_n = 14 + \dfrac{8}{12^n} \\ w_n = 14 + \dfrac{11}{4^n} - \dfrac{3}{12^n} \end{cases}$$

## 1.3 Application aux systèmes différentiels

Voici une autre application de la diagonalisation d'une matrice carrée. Il est facile de calculer l'exponentiel d'une matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{t\alpha_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{t\alpha_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{t\alpha_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{t\alpha_n} \end{pmatrix}.$$

Soient $x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)$ $k$ fonctions de classe $C^1$ et soit le système différentiel

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1k}x_k(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2k}x_k(t) \\ \quad \vdots \dots \\ x_k'(t) = a_{k1}x_1(t) + a_{k2}x_2(t) + \dots + a_{kk}x_k(t) \end{cases} \tag{1.4}$$

où les $a_{ij}$ dont des réels ou des complexes.

On écrit le système sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_k'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}.$$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$. Donc le système (1.4) s'écrit

$$X'(t) = AX(t).$$

Qui nous donne :

$$X(t) = e^{At}X_0.$$

Si $A$ est diagonalisable, alors il existe une matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix},$$

et une matrice inversible $P$ tels que

$$A = PDP^{-1}.$$

- **Méthode 1 :**

  On pose $Y_t = P^{-1}X_t$, alors

$$\begin{aligned} X'(t) = AX(t) &\Leftrightarrow PY'(t) = APY(t) \\ &\Leftrightarrow Y'(t) = P^{-1}APY(t) \\ &\Leftrightarrow Y'(t) = DY(t). \end{aligned}$$

Donc, $Y(t) = e^{Dt}C$, c'est à dire

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \\ \alpha_k \end{pmatrix},$$

Finalement

$$X(t) = P \times Y(t) = P \times \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \\ \alpha_k \end{pmatrix},$$

où les $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont des constantes.

- **Méthode 2 :**

  En notant $v_1, v_2, \dots, v_k$ les vecteurs propres que l'on a trouvé en diagonalisant la matrice ( ce sont donc les colonnes de la matrice P), on obtient la solution sous la forme vectorielle :

$$X't) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \alpha_1 e_2^{\lambda_1 t} + \cdots + \alpha_k e^{\lambda_k t} V_k,$$

  où les $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont des constantes.

**Exemple 1.3.1.** *Résoudre le système différentiel :*

$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) - 9y(t) \\ y'(t) = x(t) - 5y(t) \end{cases}$$

*La forme matricielle est*

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

*Si on pose* $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ *le système s'écrit*

$$X'(t) = AX(t).$$

Diagonaliser $A$ :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -9 \\ 1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 4).$$

*la matrice $A$ d'ordre 2 et admet deux valeurs propre distinctes qui sont* $4$ *et* $-4$*, donc $A$ est diagonalisable.*

$$E_4 = \left\{ (x,y) : \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} =< (9,1) > .$$

$$E_{-4} = \left\{ (x,y) : \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} =< (1,1) > .$$

*Alors,*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

*et*

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

*A partir des deux valeurs propres* $-4$ *et* $4$*, nous formons les deux fonctions :*

$$u(t) = \alpha e^{-4t}, \quad v(t) = \beta e^{4t},$$

*et nous calculons finalement :*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{4t} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^{-4t} + 9\beta e^{4t} \\ \alpha e^{-4t} + \beta e^{4t} \end{pmatrix}.$$

**Exemple 1.3.2.** *Résoudre le système différentiel :*

$$\begin{cases} x'(t) = 2y(t) - z(t) \\ y(t) = 3x(t) - 2y(t) \\ z(t) = -2x(t) + 2y(t) + z(t) \end{cases}$$

*La forme matricielle est*

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

*Si on pose* $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *le système s'écrit*

$$X'(t) = AX(t).$$

*D'après l'exemple* (**??**) *on a* $A$ *est diagonalisable et*

$$A = P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \times P^{-1}$$

*avec* $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $P^{-1} = \dfrac{1}{-30} \begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

*A partir des trois valeurs propres* $1, 2$ *et* $-4$, *nous formons les trois fonctions :*

$$u(t) = \alpha e^t, \quad v(t) = \beta e^{2t}, \quad w(t) = \gamma e^{-4t}$$

*et nous calculons finalement :*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma e^{-4t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^t + 4\beta e^{2t} + 2\gamma e^{-4t} \\ \alpha e^t + 3\beta e^{2t} - 3\gamma e^{-4t} \\ \alpha e^t - 2\beta e^{2t} + 2\gamma e^{-4t} \end{pmatrix}.$$