

Série no 2 : Gestion des files d'attente

Exercice 1. Dans un système d'attente avec un seul serveur, les arrivées de clients suivent un processus de Poisson de taux $\lambda = 3$ clients par minute.

- Déterminez l'instant d'arrivée de la 10-ième personne.
- Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, où X_i est le temps inter-arrivée entre la $(i - 1)$ -ième et la i -ième personne. Calculer l'espérance et la variance de cette somme.

Exercice 2. Dans un système de file d'attente, le temps d'attente d'un client W_{n+1} pour être servi est donné par la formule de Lindley suivante :

$$W_{n+1} = \max(W_n + S_n - T_{n+1}, 0),$$

Où, $W_1 = 0$, $S_n = 4$ min et $T_n = 3$ min (pour chaque client).

1. Calculez les temps d'attente W_2 , W_3 , et W_4 des clients 2, 3, et 4.
2. Si le temps de service passe à $S_n = 5$ minutes, recalculez W_2 , W_3 , et W_4 .
3. Établissez une formule générale pour W_n en fonction de W_{n-1} , S_{n-1} , et T_n . Ensuite, en utilisant les valeurs de $S_n = 4$ minutes et $T_n = 3$ minutes, trouvez une expression récurrente pour W_n .

Exercice 3. Dans une banque, les clients arrivent selon un processus de Poisson avec un taux d'arrivée de $\lambda = 3$ clients par minute. La banque dispose d'un seul guichet, et le temps de service est exponentiellement distribué avec un taux de service de $\mu = 5$ clients par minute.

1. Calculer le taux d'occupation ρ de la file d'attente et déterminer si le système peut atteindre un état stationnaire.
2. Déterminer la probabilité de stationnarité de chaque état n , c'est-à-dire la probabilité qu'il y ait exactement n clients dans la banque.
3. Calculer le nombre moyen de clients dans la banque (file et service compris).
4. Déterminer le temps moyen passé par un client dans la banque, en incluant son attente et son temps de service.

Exercice 4. Dans un système de file d'attente $M/M/1$, la file d'attente est composée d'un seul serveur ayant un taux de service de $\mu = 5$ clients par minute. Les arrivées des clients suivent un processus de Poisson avec un taux moyen d'arrivée $\lambda = 3$ clients par minute.

1. Calculez le taux d'occupation ρ du serveur. En déduire si le système est en régime stationnaire et justifier pourquoi.
2. Calculez l'espérance du temps d'attente $\mathbb{E}(W)$ dans la file d'attente pour un client.
3. Déterminez la probabilité $P(T > 1)$ du temps total de séjour (temps d'attente plus temps de service).
4. Calculez l'espérance du nombre de clients présents dans le système $\mathbb{E}(Q)$ ainsi que dans la file d'attente $\mathbb{E}(L)$.
5. Calculez la probabilité que le temps d'attente d'un client soit inférieur à $t = 0.25$ minute.