الفصل الثالث: التطبيقات الخطية.

1. التطبيق الخطي.

فيما يلي، نفرض أن E و F فضاءين شعاعيين على نفس الجسم IK (IR أو ℂ).

تعريف 1:

ليكن f تطبيق من E في F. نقول أن f هو تطبيق خطي من E في F إذا تحقق ما يلي:

1) $\forall x, y \in E \qquad f(x+y) = f(x) + f(y).$

2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in IK \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x)$

ملاحظة:

ليكن f تطبيق خطي من E في F. لدينا:

$f(0_E) = 0_F.$

$\forall x \in E, \qquad f(-x) = -f(x)$

مثال:

$$f : IR^2 \to IR^3$$

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = (x+y, x-y, y).$$

أثبت أن f تطبيق خطي.

f تطبيق خطي:

لنضع $X = (x, y)\ ,\ Y = (u, v)$

لدينا:

1. $f(X+Y) = f((x,y) + (u, v))$

$= f((x+u, y+v))$

$= (x+u+y+v\ ,\ x-y+u-v\ ,\ y+v)$

$= (x+y, x-y, y) + (u+v, u-v, v)$

$= f(x,y) + f(u,v)$

$= f(X) + f(Y).$

2. $f(\lambda X) = f(\lambda(x, y))$

$= f(\lambda x, \lambda y)$

$= (\lambda x + \lambda y,\ \lambda x - \lambda y, \lambda y)$

$= \lambda\ (x + y, x - y, y)$

$= \lambda f\ (x, y) = \lambda\ f(X)$

قضية 1:

يكون f تطبيق خطي من E في F إذا وفقط إذا كان:

$\forall x, y \in E \quad, \forall \alpha, \beta \in IK, \qquad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$

2. تركيب تطبيقين خطيين.

نظرية 1:

لتكن F, E و G ثلاث فضاءات شعاعية على نفس الجسم IK.

إذا كان f تطبيقا خطيا من E في F و g تطبيقا خطيا من F في G، فإن التطبيق المركب

$g \circ f$ هو تطبيق خطي من E في G.

مثال: ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منته على IK والعائلة $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ أساسا لـ E.

و $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ سلّميات من IK. التطبيق f المعرف كما يلي:

$f : E \rightarrow IK$

$x = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n \mapsto f(x) = \alpha_1 \lambda_1 + \ldots + \alpha_n \lambda_n$

حيث: $\lambda_i \in IK$ هو تطبيق خطي يقال عنه شكل خطي.

3. نواة وصورة تطبيق خطي.

ليكن E و F فضاءين شعاعيين على نفس الجسم IK. و f تطبيق خطي من E في F.

تعريف 2:

نسمي مجموعة الأشعة x من **E** حيث: $f(x) = 0$ بنواة التطبيق f ونرمز لها بالرمز **Ker** f ونكتب.

$Ker f = \{x \in E \ /\ f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$

تعريف 3:

نسمي مجموعة الأشعة $f(x)$ حيث $x \in E$ بصورة التطبيق f ونرمز لها بالرمز $Im\, f$ ونكتب.

$Im\, f = \{ y \in F, \exists x \in E / f(x) = y = f(E) \}$

قضية 2:

1. $Ker\, f$ فضاء شعاعي جزئي من E.
2. $Im\, f$ فضاء شعاعي جزئي من F.

مثال:

ليكن E فضاء شعاعي على IK و f_k التطبيق الخطي المعرف في المثال 1 السابق:

$f_k : E \to E$

$x \mapsto f_k(x) = kx \quad (k \in IK)$

إذا كان $k=0$ ، f_k هو التطبيق المعدوم، و $\ker f_0 = E$ ، $Im f_0 = \{0\}$

إذا كان $k \neq 0$ ، f_k هو تطبيق تقابلي، و $\ker f_0 = 0$ ، $Im f_k = \{E\}$

مثال:

$f : IR^2 \to IR^3$

$(x,y) \mapsto f_k(x,y) = (x, x, -x)$

f تطبيق خطي، ولدينا:

$Im f = \{Y \in IR^3, \exists X \in IR^2 \quad / f(x) = Y\}$

$= \{Y \in IR^3, \exists X \in IR \quad / (x, x, -x) = Y\}$

$= \{Y \in IR^3, \exists X \in IR \quad / x(1,1,-1) = Y\}$

$= \{x(1,1,-1) \quad / x \in IR\}$

$= vec\{(1,1,-1)\}$

$Ker f = \{X = (x_1, x_2) \in IR^2 \quad / f(X) = (0,0,0)\}$

$= \{(x_1, x_2) \in IR^2 \quad / (x_1, x_1, -x_1) = (0,0,0)\}$

$= \{(0, x_2) \quad , \quad x_2 \in IR\}$

$= \{x_2(0,1) \quad , \quad x_2 \in IR\}$

$= vec\{(0,1)\}$

قضية 3:

1. f تطبيق غامر $\mathrm{Im}\, f = F$.
2. f تطبيق متباين $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$

مثال:

$f : IR^2 \to IR^3$

$(x,y) \mapsto f(x,y) = (x, x, y)$

التطبيق الخطي f متباين لأن:

$\mathrm{Ker}\, f = \{(x,y) \in \mathrm{IR}^2 \ / \ f(x,y) = (0,0,0)\}$

$= \{(x_1 1, x_2) \in IR^2 \ / (x,x,y) = (0,0,0)\}$

$= \{(0,0)\}$

لكن f ليس غامر لأن $(1,2,3) \in IR^3$ و $(1,2,3) \notin \mathrm{Im} f$ أي: $\mathrm{Im} f \neq IR^3$

4. رتبة تطبيق خطي.

فيما يلي، نفرض أن E و F فضاءين شعاعيين ببعد منته على نفسالجسم IK ، و f تطبيق خطي من E في F.

تعريف 4 :

نسمي بعد f (E) برتبة f (Rang) ، وندل عليها بالرمز rg (f) ونكتب:

$\mathrm{Rg}(f) = \dim \mathrm{Im} f$

نظرية 2 :

$\mathrm{Rg}(f) = \dim \mathrm{Im} f = \dim E - \dim \mathrm{Ker}\, f$

نتيجة 2:

$\mathrm{Rg}(f) \leq \dim E$ و $\mathrm{rg}(f) \leq \dim F$

f تطبيق غامر $\leftrightarrow \dim F = \mathrm{rg}(f)$

f تطبيق متباين $\leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = \dim E$

نظرية 3:

ليكن $dim\ \ E = n$ و fتطبيق خطـي من E نحو E : القضايا التالية متكافئة:

1. f متباين.
2. f غامر.
3. f تقابلي (تشاكل).
4. $\mathrm{rg}\ (f) = n$
5. صورة أساس في E بالتطبيق f هي أيضا أساس في E.

سلسلة تمارين التطبيقات الخطية.

التمرين الأول:

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x,y,z) \mapsto (2x+3y,\ x-2y+z)$$

- بيّن أن هذا التطبيق هو تطبيق خطي.
- أوجد أساس وبعد $kerf$
- أوجد أساس وبعد Imf
- هل التطبيق تقابلي ولماذا؟

التمرين الثاني:

ليكن التطبيق $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto (x+y,\ x-y)$$

- بيّن أن هذا التطبيق هو تطبيق خطي.
- أوجد $kerf$
- استنتج Imf
- هل التطبيق تقابلي ولماذا؟

التمرين الثالث:

ليكن لدينا:

$f_1(x,y,z) = x-y$, $f_2(x,y,z) = y-z$

$E = \{(x,y,z) \in IR^3 : f_1 = 0 \wedge f_2 = 0\}$

- بيّن أن E هي فضاء شعاعي جزئي من الفضاء IR^3، ثم أوجد أساس وبعد E.

ليكن $f(x,y,z) = (f_1, f_2, z)$

- بيّن أن هذا التطبيق هو تطبيق خطي.
- أوجد النواة وبُعدها.
- استنتج صورة هذا التطبيق مبيّنا ما إذا كان هذا التطبيق هو تطبيق تقابلي؟