الفصل الثالث:

الدفعات المتساوية

1-تعريف الدفعات المتساوية:

الدفعات المتساوية هي مبالغ مالية متساوية تُدفع دوريا في فترات متساوية. وتُسمى فترة الدفع أو السداد بالمدة، وقد تكون هذه المدة سنة، سداسي ، ثلاثي...

وتتميز الدفعات المتساوية بعدد من العناصر:

- قيمة الدفعات المقدمة دوريا متساوية؛
- الفترة الفاصلة بين دفعة وأخرى متساوية؛
- معدل فائدة متساوي؛
- تحديد تاريخ أول دفعة وتاريخ آخر دفعة؛
- عدد الدفعات.

2-أنواع الدفعات المتساوية:

في الواقع هناك نوعان من الدفعات المتساوية:

- دفعات عادية يتم بواسطتها تسديد دين، أو تغطية التزام سابق وأحيانا إيداع لتكوين رأس مال على أن الميزة المشتركة فيها هي كونها تُدفع في نهاية الفترات، فيُطلق عليها دفعات عادية، أو تسديد، أو دفعات نهاية المدة.
- دفعات تهدف إلى تكوين رأس مال، فهي تُقدم في بدية الفترات ويُطلق عليها دفعات استثمار أو دفعات بداية الفترة.

3-دفعات نهاية المدة:

3-1-جملة دفعات نهاية المدة:

جملة دفعات نهاية المدة هي ما تجمع للشخص المودع أو المسدد في نهاية عدد من الفترات n. وبالتالي فقد قدم n دفعة متساوية. وللبحث عن جملة مجموع هذه الدفعات يكفي جمع جمل هذه الدفعات في نهاية المدة أي عند أخر السنة n.

3-1-1 قانون جملة دفعات نهاية المدة:

لنفترض أن:

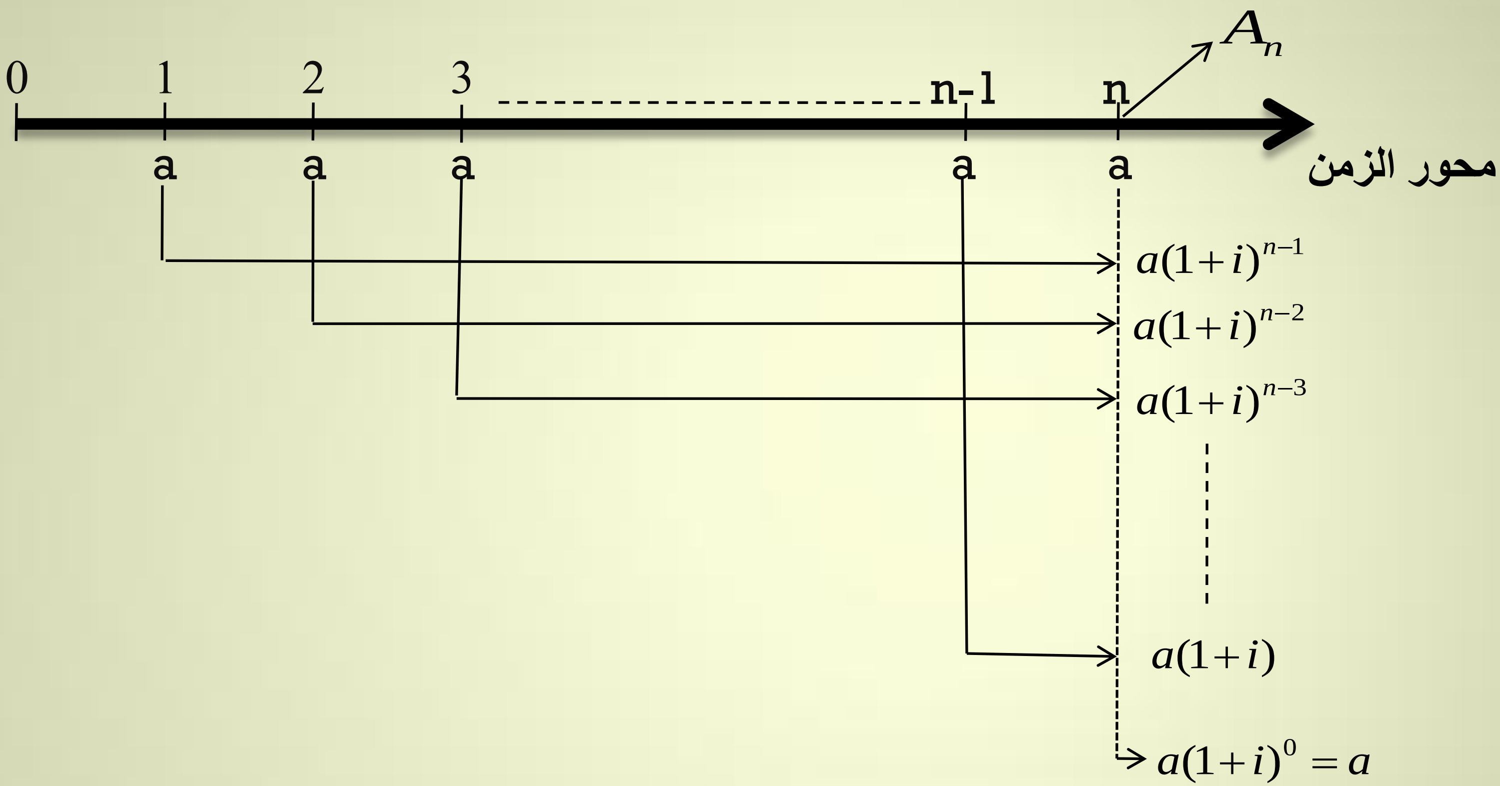
A_n : جملة دفعات نهاية المدة؛

a : قيمة الدفعة الثابتة المتساوية؛

i : معدل الفائدة؛

n: عدد الدفعات.

ونستعين بالشكل التالي الذي يُوضح محور الزمن للفترات وللدفعات وجملها كما يلي:



وجملة الدفعات كاملة A_n تكون ابتداء من آخر دفعة كما يلي:

$$A_n = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + \ldots\ldots + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^n$$

وبملاحظة عناصر هذه الجملة نجد أنها تكون متتالية هندسية متزايدة حدها الأول a وأساسها (1+i) وعدد حدودها n وبالتالي فإن مجموع المتتالية الهندسية أي جملة الدفعات يكون كما يلي:

$$A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \Rightarrow \boxed{A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

ولحساب جملة الدفعات نستعين بالجدول المالي رقم 3 الذي يُقدم العلاقة $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ بشرط وجود المعدل المستعمل في الجدول، وهنا نكون أمام حالتين:

<u>- حالة وجود معدل الفائدة في الجدول:</u>

<u>مثال 3-1</u>

يُودع احد الأشخاص في نهاية كل سنة ولمدة 5 سنوات مبلغ 4000 دج في احد البنوك بمعدل فائدة 3%.
<u>المطلوب</u>: اوجد الجملة في نهاية السنة الخامسة؟

<u>الحل:</u>

$$a = 4000$$
$$i = 3\%$$
$$n = 5$$

$$A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow A_5 = 4000\frac{(1+0,03)^5 - 1}{0,03} = 4000(5,30913581)$$

$$\boxed{A_5 = 21236,54 \text{دج}}$$

- **حالة عدم وجود معدل الفائدة في الجدول:** في هذه الحالة يتم حساب الجملة باستخدام طريقة الأجزاء المتناسبة كما يلي:

ليكن i هو المعدل الغير المجدول: نحدد المعدلين المجدولين الذين يحصران المعدل الغير المجدول وليكن المعدل الأكبر i_1 والمعدل الأصغر i_2 وبطريقة التناسب نكتب :

$$\boxed{\frac{(1+i)^n-1}{i}=\frac{(1+i_2)^n-1}{i_2}+\frac{\left(\frac{(1+i_1)^n-1}{i_1}-\frac{(1+i_2)^n-1}{i_2}\right)\times(i-i_2)}{(i_1-i_2)}}$$

ثم نقوم بعد ذلك باستخدام $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ في حساب الجملة.

مثال 2-3

يدفع احد الأشخاص مبلغ 30000دج في نهاية كل سنة ولمدة 6 سنوات وهذا لتسديد قيمة عقار معين مع العلم أن معدل الفائدة هو 2,8%.

المطلوب: احسب قيمة العقار في نهاية سنوات؟

الحل:

$$a = 30000$$
$$i = 2.8\%$$
$$n = 6$$

لدينا معدل فائدة 2,8% وهو معدل غير موجود في الجدول المالي وهو معدل محصور بين المعدلين المجدولين 3% و 2,75%. ومنه:

$$\frac{(1+i)^n-1}{i} = \frac{(1+i_2)^n-1}{i_2} + \frac{\left(\frac{(1+i_1)^n-1}{i_1} - \frac{(1+i_2)^n-1}{i_2}\right)\times(i-i_2)}{(i_1-i_2)}$$

$$\frac{(1+0{,}028)^6-1}{0{,}028} = \frac{(1+0{,}0275)^6-1}{0{,}0275} + \frac{\left(\frac{(1+0{,}03)^6-1}{0{,}03} - \frac{(1+0{,}0275)^6-1}{0{,}0275}\right)\times(0{,}028-0{,}0275)}{(0{,}03-0{,}0275)}$$

$$\frac{(1+0{,}028)^6-1}{0{,}028} = 6{,}4279404 + \frac{(6{,}46840988-6{,}4279404)\times(0{,}0005)}{(0{,}25)} = 6{,}436034296$$

$$A_n = a\frac{(1+i)^n-1}{i} \Rightarrow A_6 = 30000\frac{(1+0{,}028)^6-1}{0{,}028} = 30000(6{,}436034296)$$

$$\boxed{A_6 = 193081{,}03\text{دج}}$$

إيجاد الجملة في حالة المعدل يُحسب على أساس جزء من السنة: إذا كان معدل الفائدة يُحسب على أساس جزء من السنة (سداسي، ثلاثي،...الخ) فإنه في هذه الحالة نقوم بما يلي حسب المثال التالي:

مثال 3-3

يُودع احد الأشخاص في نهاية كل ثلاثي ولمدة 3 سنوات مبلغ 7000 دج في احد البنوك بمعدل فائدة 2%.

المطلوب: اوجد الجملة في نهاية السنة الثالثة؟

الحل:

$$a = 7000$$
$$i = 2\%$$

نلاحظ أن معدل الفائدة المركب يُحسب على أساس ثلاثي وبالتالي فإن عدد المرات التي يُحسب فيها المعدل هو ثلاثة مرات في السنة وبالتالي 9 مرات في 3 سنوات ومنه: n=9

$$A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow A_9 = 7000\frac{(1+0,02)^9 - 1}{0,02} = 7000(9,75462843)$$

$$\boxed{A_9 = 68282,4 \text{ دج}}$$

3-1-2 استخدام قانون جملة دفعات نهاية المدة:

باستخدام قانون جملة دفعات نهاية المدة يُمكن تحديد أي عنصر مجهول فيها مع ضرورة معلومية باقي العناصر.

1- تحديد قيمة الدفعة: يُمكن إيجاد قيمة الدفعة بطريقتين:

الطريقة الأولى :

$$A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow \boxed{a = \frac{A_n}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}}}$$

مثال 3-4

يُودع احد الأشخاص في كل نهاية سنة ولمدة 9 سنوات مبلغ من المال بمعدل فائدة مركب 3,75% ليتحصل بعد نهاية المدة على جملة مركبة قدرها 398050,95دج.

المطلوب: احسب قيمة ما يُودعه الشخص في نهاية كل سنة؟

الحل:

$$A_9 = 398050.95\text{ دج}$$

$$i = 3.75\%$$

$$n = 9\text{ سنوات}$$

$$a = \frac{A_n}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}} = \frac{A_9}{\frac{(1+0.0375)^9 - 1}{0.0375}} = \frac{398050.95}{10.475025} \Rightarrow \boxed{a = 38000\text{ دج}}$$

الطريقة الثانية:

من الطريقة الأولى لدينا:

$$a=\frac{A_n}{\frac{(1+i)^n-1}{i}} \Rightarrow a=A_n\frac{i}{(1+i)^n-1}$$

وبما أن المقدار $\frac{i}{(1+i)^n-1}$ لا يوجد في الجداول المالية، فإنه يُمكن التصرف فيه للحصول على علاقة موجودة في الجداول المالية كما يلي:

نستخدم المقدار $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ الموجود في الجدول المالي رقم 5

نضرب المقدار السابق في المقدار التالي: $\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}$

نطرح المقدار $\frac{i}{(1+i)^n-1}$ من حاصل الضرب السابق. ومنه:

$$\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\times\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}-\frac{i}{(1+i)^n-1}=\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}-\frac{i}{(1+i)^n-1}$$

$$=\frac{i(1+i)^n-i}{(1+i)^n-1}=\frac{i\left[(1+i)^n-1\right]}{(1+i)^n-1}=i$$

وبالتالي عند البحث عن المقدار $\frac{i}{(1+i)^{n}-1}$ فإننا نستخرج المقدار $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ من الجدول المالي رقم 5 ونطرح منه i. وبالتالي يُمكن إيجاد قيمة الدفعة كما يلي:

$$\boxed{a = A_n\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i\right]}$$

مثال 3-5

من المثال السابق اوجد قيمة ما يُودعه الشخص في نهاية كل سنة بالطريقة الثانية؟

الحل:

$$a = A_n\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i\right] \Rightarrow a = A_9\left[\frac{0.0375}{1-(1+0.0375)^{-9}} - i\right]$$

$$a = 398050{,}95\left[0{,}13296517 - 0{,}0375\right] = 398050{,}95(0{,}09546517)$$

$$\boxed{a = 38000 \text{ دج}}$$

2- تحديد معدل الفائدة:

انطلاقا من قانون جملة دفعات نهاية المدة:

$$A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{A_n}{a}$$

ثم نبحث عن حاصل القسمة في الجدول المالي رقم 3 وهنا نكون أمام حالتين:

الحالة الأولى: وجود حاصل القسمة في الجدول المالي: نبحث عن حاصل القسمة في السطر الذي تقع فيه المدة المحددة في المعطيات ومعدل الفائدة المبحوث عنه هو الذي يقع في العمود الذي يقع فيه حاصل القسمة.

مثال 3-6

يُودع احد الأشخاص في كل نهاية سنة ولمدة 4 سنوات مبلغ من المال قدره 6250دج ليتحصل بعد نهاية المدة على جملة مركبة قدرها 26540,4دج

المطلوب: اوجد معدل الفائدة؟

الحل:

$$A_4 = 26540.4 \text{دج}$$

$$a = 6250 \text{دج}$$

$$n = 4 \text{ سنوات}$$

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{A_n}{a} \Rightarrow \frac{(1+i)^4 - 1}{i} = \frac{26540.4}{6250} = 4.246464$$

نبحث عن المقدار 4,246464 في الجدول المالي رقم 3 عند السطر الذي يقابل 4 سنوات ونجد تلك القيمة عند العمود الذي يقابل معدل فائدة 4% إذا:

$$\boxed{i = 4\%}$$

الحالة الثانية: عدم وجود حاصل القسمة فى الجدول المالى: إذا بحثا في الجدول المالي رقم 3 عن حاصل القسمة ولم نجده فإننا في هذه الحالة نجد المعدل بطريقة التناسب كما يلي:

- نحدد القيمتين في الجدول المالي التي يقع بينهما حاصل قسمة $\frac{A_n}{a}$ عند السطر التي تقع فيه المدة المحددة في المعطيات ونرمز للقيمة الكبرى ب x_1 والقيمة الصغرى x_2.

- نحدد معدلي الفائدة الذين يقابلان القيمتين المتحصل عليهما في الخطوة السابقة ونرمز للمعدل الكبير ب i_1 والمعدل الصغير ب i_2؛

ويتم إيجاد معدل الفائدة بالتناسب كما يلي:

$$\boxed{i = i_2 + \frac{(i_1 - i_2)\times(\frac{A_n}{a} - x_2)}{(x_1 - x_2)}}$$

مثال 3-7

يُودع احد الأشخاص في كل نهاية سنة ولمدة 5 سنوات مبلغ من المال قدره 3000دج ليتحصل بعد نهاية المدة على جملة مركبة قدرها 16445دج.

المطلوب: اوجد معدل الفائدة؟

الحل:

$$A_4 = 16445 \text{ دج}$$

$$a = 3000 \text{ دج}$$

$$n = 5 \text{ سنوات}$$

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{A_n}{a} \Rightarrow \frac{(1+i)^5 - 1}{i} = \frac{16445}{3000} = 5.481666667$$

نرى أن هذا المقدار غير موجود في الجدول المالي وبالتالي نجد المعدل بطريقة التناسب

$$i = i_2 + \frac{(i_1 - i_2) \times (\frac{A_n}{a} - x_2)}{(x_1 - x_2)}$$

$$i = 0,045 + \frac{(0,0475 - 0,045) \times (5,481666667 - 5,47070973)}{(5,49810345 - 5,47070973)}$$

$$i = 4,59999497 \approx \boxed{4,6\%}$$

3- تحديد مدة أو عدد الدفعات :

انطلاقا من قانون جملة دفعات نهاية المدة:

$$A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{A_n}{a}$$

ثم نبحث عن حاصل القسمة في الجدول المالي رقم 3 وهنا نكون أمام حالتين:

الحالة الأولى: وجود حاصل القسمة في الجدول المالي: نبحث عن حاصل القسمة في العمود الذي يقع فيه معدل الفائدة المحدد في المعطيات والمدة أو عدد الدفعات المبحوث عنه هو الذي يقع في السطر الذي يقع فيه حاصل القسمة.

مثال 3-8

يُودع احد الأشخاص في كل نهاية سنة مبلغ من المال قدره 9070دج بمعدل فائدة مركب 3,5% ليتحصل بعد نهاية المدة على جملة مركبة قدرها 82098,799دج.

المطلوب: اوجد عدد الدفعات؟

الحل:

$A_n = 82098.799$ دج

$a = 9070$ دج

$i = 3.5\%$

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{A_n}{a} \Rightarrow \frac{(1+0.035)^n - 1}{0.035} = \frac{82098.799}{9070} = 9.05168677$$

نبحث عن المقدار 9,05168677 في الجدول المالي رقم 3 عند العمود الذي يقابل معدل فائدة 3,5% ونجد تلك القيمة عند السطر الذي يقابل مدة 8 سنوات. إذا:

$\boxed{n = 8 \text{ سنوات}}$

الحالة الثانية: عدم وجود حاصل القسمة في الجدول المالي: كما في البحث عن i فقد لا يوجد n أيضا في الجدول أو لا يكون عددا كاملا، هنا لا يُمكن أن توجد n بهذه الوضعية مادام n هي عدد الفترات، وبالتالي عند مصادفة هذه الحالة فإننا نقوم بما يلي:

نبحث في الجدول المالي رقم 3 عن القيمتين اللتين تحصران حاصل قسمة $\frac{A_n}{a}$ ونحدد عدد السنوات أو الدفعات التي تقابل تلك القيمتين.

ومن تم نأخذ احد الحلول التالية:

1- إعادة حساب قيمة الدفعة الجديدة في كل حالة من حالتي عدد السنوات أو الدفعات التين تحصران n المبحوث عنها؛

2- حساب قيمة الدفعة على أساس n التي تقابل القيمة الصغرى التي تحصر حاصل القسمة $\frac{A_n}{a}$ ثم نحدد الفارق بين الجملة الإجمالية وجملة n دفعة والفرق يتم تسديده مع الدفعة الأخيرة.

مثال 3-9

حتى يستطيع شخص تسديد دين جملته 31200دج بدفعات لنهاية كل سنة قيمتها 4000دج لكل منها فكم يلزمه من سنة إذا كان معدل الفائدة المستعمل هو 3%.

الحل:

$$A_n = 31200 \text{دج}$$

$$a = 4000 \text{دج}$$

$$i = 3\%$$

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{A_n}{a} \Rightarrow \frac{(1+0.03)^n - 1}{0.03} = \frac{31200}{4000} = 7.8$$

بالبحث في الجدول المالي رقم 3 نجد أن هذا المقدار محصور بين n=7 و n=8 وبالتالي هناك حلان:

الحل الأول: إعادة حساب قيمة الدفعة إما مع n=7 أو n=8

حساب قيمة الدفعة مع n=7

$$a = \frac{A_n}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}} = \frac{A_7}{\frac{(1+0.03)^7 - 1}{0.03}} = \frac{31200}{7.66246218} \Rightarrow \boxed{a = 4071.8\text{دج}}$$

حساب قيمة الدفعة مع n=8

$$a = \frac{A_n}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}} = \frac{A_8}{\frac{(1+0.03)^8 - 1}{0.03}} = \frac{31200}{8.89233605} \Rightarrow \boxed{a = 3508.64\text{دج}}$$

الحل الثاني:

دفع 7 دفعات متساوية قيمة كل منها 4000دج والباقي يُدفع مع الدفعة السابعة:

$$A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow A_7 = 4000\frac{(1+0,03)^7 - 1}{0,03} = 4000(7.66246218)$$

$$A_7 = 30649.85\text{دج}$$

وبالتالي فإن الباقي الذي يُدفع هو: $31200 - 30649.85 = 550.15$ دج

3-2القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:

3-2-1 قانون القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:

القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة هي مجموع القيم الحالية لعدد دفعات نهاية المدة أي قيمة الدفعات عند إمضاء عقد القرض أو الاستثمار وهذا في الزمن 0 أي فترة قبل الدفعة الأولى.

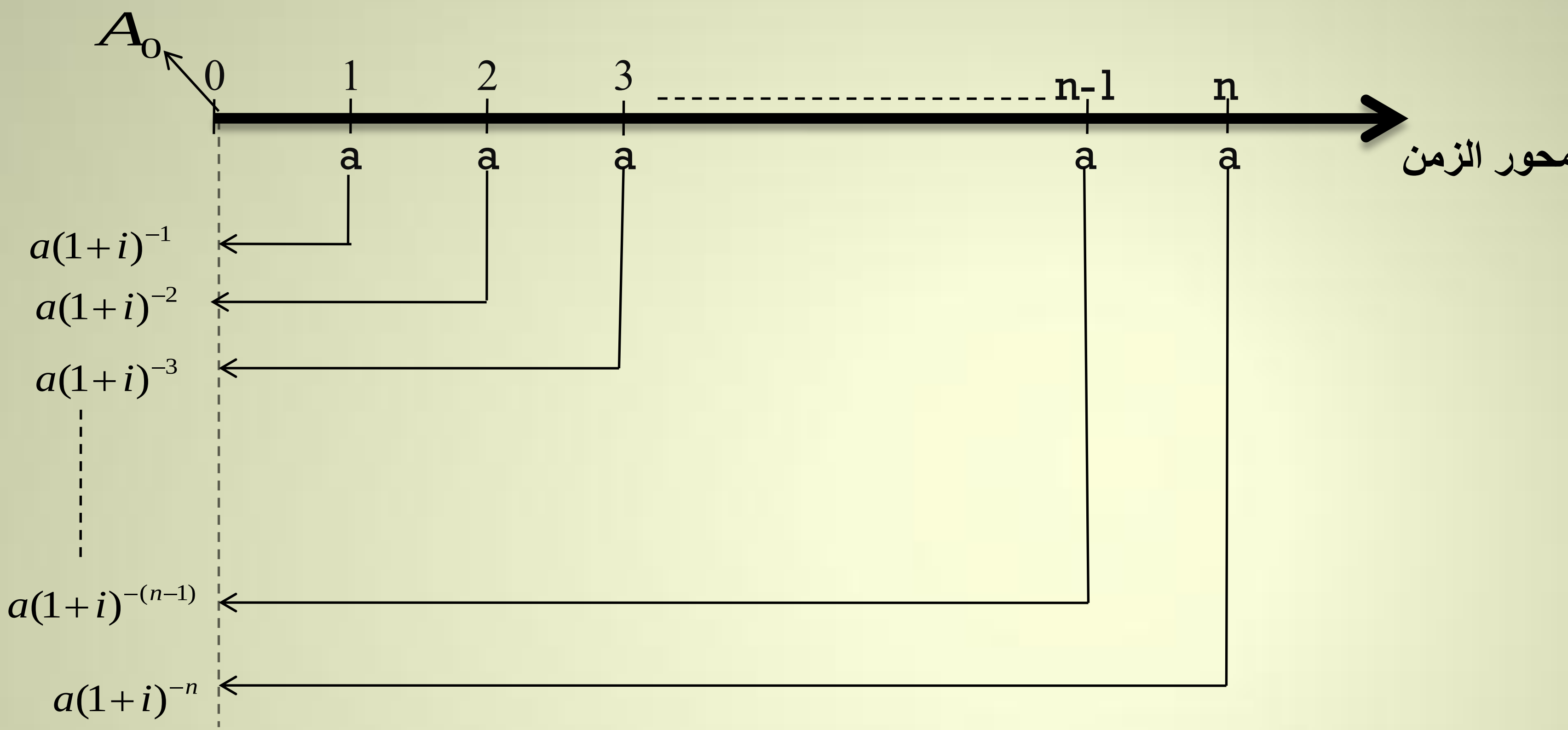
ويُمكن التوصل إلى قانون القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة بطريقتين:

<u>الطريقة الأولى:</u> باستعمال مجموع القيم الحالية للدفعات منفصلة:

لنفترض أن:

A_0 : القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة؛

ونستعين بالشكل التالي الذي يُوضح محور الزمن للفترات وللدفعات وقيمه الحالية كما يلي:



والقيمة الحالية للدفعات كاملة A_0 تكون ابتداء من آخر دفعة كما يلي:

$$A_0 = a(1+i)^{-n} + a(1+i)^{-(n-1)} + ... + a(1+i)^{-3} + a(1+i)^{-2} + a(1+i)^{-1}$$

وبملاحظة عناصر هذه القيمة الحالية نجد أنها تكون متتالية هندسية متزايدة حدها الأول $a(1+i)^{-n}$ وأساسها $(1+i)$ وعدد حدودها n وبالتالي فإن مجموع المتتالية الهندسية أي مجموع القيم الحالية للدفعات يكون كما يلي:

$$A_0 = a(1+i)^{-n} \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \Rightarrow \boxed{A_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

الطريقة الثانية: حساب القيمة الحالية لجملة الدفعات:

$$A_0 = A_n(1+i)^{-n} \Rightarrow A_0 = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-n} \Rightarrow \boxed{A_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

ولحساب القيمة الحالية للدفعات نستعين بالجدول المالي رقم 4 الذي يُقدم العلاقة $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ بشرط وجود المعدل المستعمل في الجدول، وهنا نكون أمام حالتين:

- حالة وجود معدل الفائدة في الجدول المالي:

مثال 3-10

يسدد شخص في نهاية كل سنة ولمدة 9 سنوات مبلغ 5600 دج بمعدل فائدة 5.5%.

المطلوب: احسب القيمة الحالية لهذه الدفعات؟

الحل:

$$a = 5600 \text{ دج}$$

$$i = 5.5\%$$

$$n = 9 \text{ سنوات}$$

$$A_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow A_0 = 5600\frac{1-(1+0.055)^{-9}}{0.055} = 5600(6.95219525)$$

$$\boxed{A_0 = 38932.3 \text{ دج}}$$

- **حالة عدم وجود معدل الفائدة في الجدول المالي:** في هذه الحالة يتم حساب القيمة الحالية باستخدام طريقة التناسب كما يلي:

ليكن i هو المعدل الغير المجدول: نحدد المعدلين المجدولين الذين يحصران المعدل الغير المجدول وليكن المعدل الأكبر i_1 والمعدل الأصغر i_2 وبطريقة التناسب نكتب :

$$\boxed{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1-(1+i_2)^{-n}}{i_2} - \frac{\left(\frac{1-(1+i_2)^{-n}}{i_2} - \frac{1-(1+i_1)^{-n}}{i_1}\right)\times(i-i_2)}{(i_1-i_2)}}$$

ثم نقوم بعد ذلك باستخدام $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ في حساب القيمة الحالية.

مثال 3-11

يسدد شخص في نهاية كل سنة ولمدة 4 سنوات مبلغ 3100 دج بمعدل فائدة 6.7%.

المطلوب: احسب القيمة الحالية لهذه الدفعات؟

الحل:

$$a = 3100 \text{ دج}$$

$$i = 6.7\%$$

$$n = 4 \text{ سنوات}$$

نلاحظ أن معدل الفائدة 6.7%غير موجود في الجدول المالي وهو محصور بين $i_1=6.75\%$ و $i_2=6.5\%$

وبطريقة التناسب:

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1-(1+i_2)^{-n}}{i_2} - \frac{\left(\frac{1-(1+i_2)^{-n}}{i_2} - \frac{1-(1+i_1)^{-n}}{i_1}\right)\times(i-i_2)}{(i_1-i_2)}$$

$$\frac{1-(1+0.067)^{-4}}{i} = \frac{1-(1+0.065)^{-4}}{0.065} - \frac{\left(\frac{1-(1+0.065)^{-4}}{0.065} - \frac{1-(1+0.0675)^{-4}}{0.0675}\right)\times(0.067-0.065)}{(0.0675-0.065)}$$

$$\frac{1-(1+0.067)^{-4}}{i} = 3.42579866 - \frac{(3.4257986 - 3.40641606)\times(0.002)}{(0.0025)} = 3{,}410292568$$

$$A_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow A_0 = 3100\frac{1-(1+0.067)^{-4}}{0.067} = 3100(3.410292568) \Rightarrow \boxed{A_0 = 10571.91 \text{ دج}}$$

3-2-2 استخدام قانون القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:

باستخدام قانون القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة يُمكن تحديد أي عنصر مجهول فيها مع ضرورة معلومية باقي العناصر

1- تحديد قيمة الدفعة: يُمكن إيجاد قيمة الدفعة كما يلي:

$$A_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow a = \frac{A_0}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \Rightarrow \boxed{a = A_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}}$$

ويُمكن أن نجد قيمة $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ في الجدول المالي رقم 5.

<u>مثال 3-12</u>

سدد احد الأشخاص 5 دفعات بمعدل فائدة 7,5% القيمة الحالية لتلك الدفعات تُقدر بـ 14969,774دج.

<u>المطلوب</u>: احسب قيمة الدفعة؟

<u>الحل:</u>

$$A_0 = 14969{,}774 \text{ دج}$$

$$i = 7{,}5\%$$

$$n = 5 \text{ دفعات}$$

$$a = A_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \Rightarrow a = 14969{,}774\frac{0{,}075}{1-(1+0{,}075)^{-5}} \Rightarrow a = 14969{,}774(0{,}24716472)$$

$$\boxed{a = 3700 \text{ دج}}$$

2- تحديد معدل الفائدة:

انطلاقا من قانون القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:

$$A_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{A_0}{a}$$

ثم نبحث عن حاصل القسمة في الجدول المالي رقم 4 وهنا نكون أمام حالتين:

الحالة الأولى: وجود حاصل القسمة في الجدول المالي: نبحث عن حاصل القسمة في السطر الذي تقع فيه المدة المحددة في المعطيات ومعدل الفائدة المبحوث عنه هو الذي يقع في العمود الذي يقع فيه حاصل القسمة.

مثال 3-13

سلسلة دفعات ثابتة قيمة كل منها 9002لمدة 4 فترات كانت قيمتها الحالية 30839,039دج

المطلوب: اوجد معدل الفائدة المطبق؟

الحل:

$$A_0 = 30839,039 \text{دج}$$

$$a = 9002 \text{دج}$$

$$n = 4$$

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{A_0}{a} \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-4}}{i} = \frac{30839,039}{9002} = 3,4257986$$

نبحث عن المقدار 3,4257986 في الجدول المالي رقم 4 عند السطر الذي يقابل 4 فترات ونجد تلك القيمة عند العمود الذي يقابل معدل فائدة 6,5% إذا:

$$\boxed{i = 6,5\%}$$

الحالة الثانية: عدم وجود حاصل القسمة فى الجدول المالى: إذا بحثا في الجدول المالي رقم 4 عن حاصل القسمة ولم نجده فإننا في هذه الحالة نجد المعدل بطريقة التناسب كما يلي:

- نحدد القيمتين في الجدول المالي التي يقع بينهما حاصل قسمة $\frac{A_0}{a}$ عند السطر التي تقع فيه المدة المحددة في المعطيات ونرمز للقيمة الكبرى ب x_1 ومعدل الفائدة المقابل بـ i_2 ونرمز للقيمة الصغرى x_2 ومعدل الفائدة المقابل بـ i_1.

ويتم إيجاد معدل الفائدة بالتناسب كما يلي:

$$\boxed{i = i_1 - \frac{(\frac{A_0}{a} - x_2)(i_1 - i_2)}{(x_1 - x_2)}}$$

مثال 3-14

سلسلة دفعات ثابتة قيمة كل منها 5000دج لمدة 7 فترات كانت قيمتها الحالية 28011,8دج

المطلوب: اوجد معدل الفائدة المطبق؟

الحل:

$A_0 = 28011{,}8$ دج

$a = 5000$ دج

$n = 7$ فترات

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{A_0}{a} \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-7}}{i} = \frac{28011{,}8}{5000} = 5{,}60236$$

نرى أن هذا المقدار غير موجود في الجدول المالي وبالتالي نجد المعدل بطريقة التناسب

$$i = i_1 - \frac{(\frac{A_0}{a} - x_2)(i_1 - i_2)}{(x_1 - x_2)} \Rightarrow i = 0{,}06 - \frac{(5{,}60236 - 5{,}58238144)(0{,}06 - 0{,}0575)}{(5{,}63232783 - 5{,}58238144)}$$

$$i = 0{,}058999999 \approx 0{,}059 = \boxed{5{,}9\%}$$

3- تحديد مدة أو عدد الدفعات :

انطلاقا من قانون القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:

$$A_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{A_0}{a}$$

ثم نبحث عن حاصل القسمة في الجدول المالي رقم 4 وهنا نكون أمام حالتين:

<u>الحالة الأولى: وجود حاصل القسمة في الجدول المالي:</u> نبحث عن حاصل القسمة في العمود الذي يقع فيه معدل الفائدة المحدد في المعطيات والمدة أو عدد الدفعات المبحوث عنه هو الذي يقع في السطر الذي يقع فيه حاصل القسمة.

مثال 3-15

سلسلة دفعات ثابتة قيمة كل منها 4264دج بمعدل فائدة 7% كانت قيمتها الحالية 22979,93دج

<u>المطلوب</u>: اوجد عدد الدفعات؟

الحل:

$A_0 = 22979{,}93$ دج

$a = 4264$ دج

$i = 7\%$

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{A_0}{a} \Rightarrow \frac{1-(1+0.07)^{-n}}{0.07} = \frac{22979{,}93}{4264} = 5{,}3892894$$

نبحث عن المقدار 5,3892894 في الجدول المالي رقم 4 عند العمود الذي يقابل معدل فائدة 7% ونجد تلك القيمة عند السطر الذي يقابل مدة 7 فترات. إذا:

$$\boxed{n = 7 \text{ فترات}}$$

الحالة الثانية: عدم وجود حاصل القسمة في الجدول المالي: كما في البحث عن i فقد لا يوجد n أيضا في الجدول أو لا يكون عددا كاملا، هنا لا يُمكن أن توجد n بهذه الوضعية مادام n هي عدد الفترات، وبالتالي عند مصادفة هذه الحالة فإننا نقوم بما يلي:

نبحث في الجدول المالي رقم 4 عن القيمتين اللتين تحصران حاصل قسمة $\frac{A_0}{a}$ ونحدد عدد السنوات أو الدفعات التي تقابل تلك القيمتين.

ومن تم نأخذ احد الحلول التالية:

1- إعادة حساب قيمة الدفعة الجديدة في كل حالة من حالتي عدد السنوات أو الدفعات التين تحصران n المبحوث عنها؛

2- حساب قيمة الدفعة على أساس n التي تقابل القيمة الصغرى التي تحصر حاصل القسمة $\frac{A_n}{a}$ ثم نحدد الفارق بين القيمة الحالية الإجمالية والقيمة الحالية لـ n دفعة والفرق يتم تسديده مع الدفعة الأخيرة.

مثال 3-16

اشترت إحدى المؤسسات سيارة بقيمة 34044دج واتفقت على تسديد قيمتها بأقساط متساوية قيمة الواحدة 6000دج بمعدل فائدة 1,75%

المطلوب: اوجد عدد الدفعات؟

الحل:

$A_0 = 34044$ دج

$a = 6000$ دج

$i = 1,75\%$

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{A_0}{a} \Rightarrow \frac{1-(1+0,0175)^{-n}}{0,0175} = \frac{34044}{6000} = 5,674$$

بالبحث في الجدول المالي رقم 4 نجد أن هذا المقدار محصور بين n=6 و n=7 وبالتالي هناك حلان:

الحل الأول: إعادة حساب قيمة الدفعة إما مع n=6 أو n=7

حساب قيمة الدفعة مع n=6

$$a = A_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \Rightarrow 34044 \frac{0{,}0175}{1-(1+0{,}0175)^{-6}} \Rightarrow a = 34044(0{,}17702256)$$

$$\boxed{a = 6026{,}56 \text{ دج}}$$

حساب قيمة الدفعة مع n=7

$$a = A_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \Rightarrow 34044 \frac{0{,}0175}{1-(1+0{,}0175)^{-7}} \Rightarrow a = 34044(0{,}15303059)$$

$$\boxed{a = 5209{,}77 \text{ دج}}$$

الحل الثاني:

دفع 6 دفعات متساوية قيمة كل منها 6000دج والمبلغ المتبقي يُدفع مع الدفعة الأخيرة

$$A_0 = a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow A_0 = 6000 \frac{1-(1+0{,}0175)^{-6}}{0{,}0175} \Rightarrow A_0 = 6000(5{,}64899762)$$

$$A_0 = 33893.99 \approx \boxed{33894 \text{ دج}}$$

وبالتالي فإن الباقي الذي يُدفع هو: $34044 - 33894 = 150$ دج

3-دفعات بداية المدة:

3-1-جملة دفعات بداية المدة:

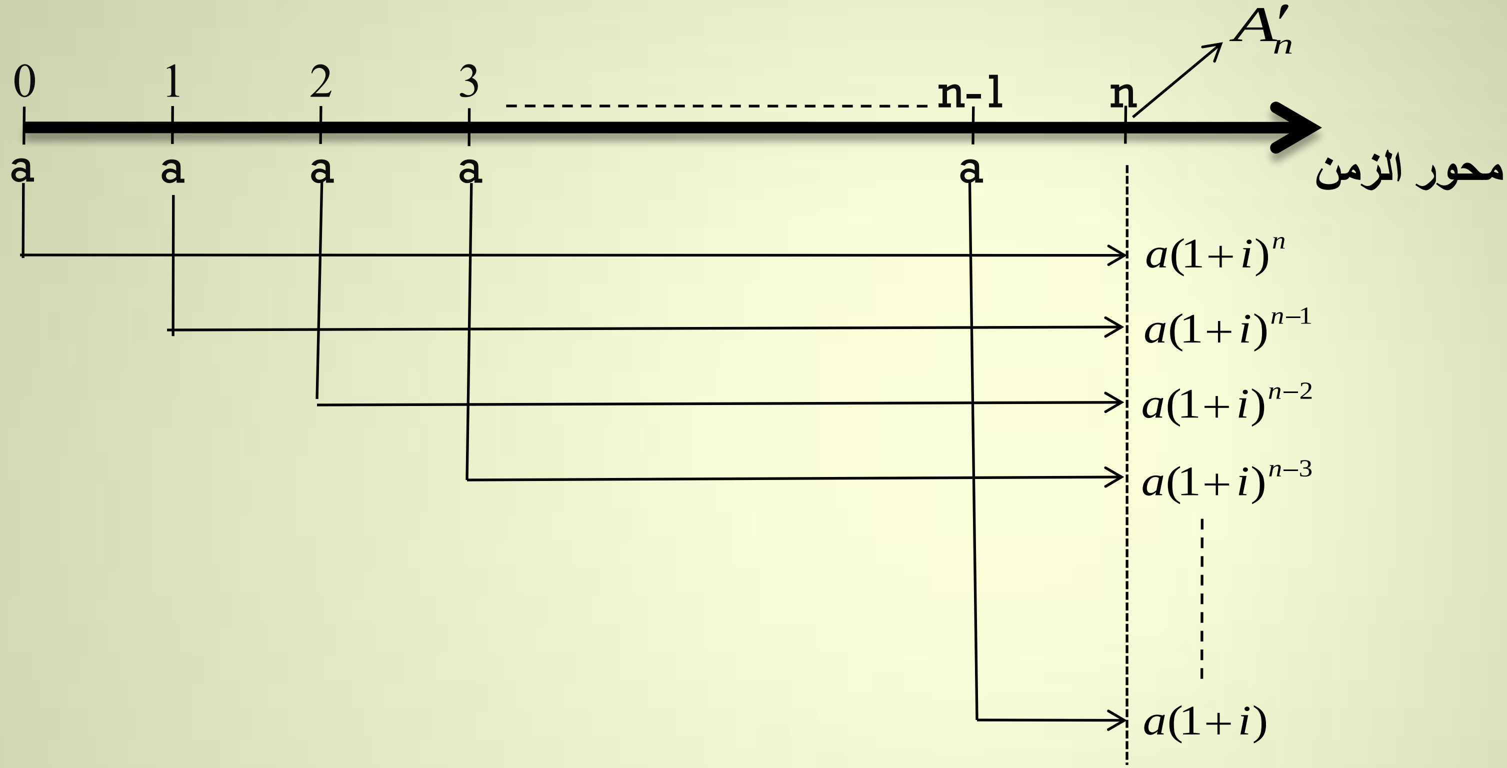
جملة دفعات بداية المدة تُحسب في نهاية مدة السداد للقرض أو تكوين رأس مال أي بعد القسط الأخير بفترة زمنية واحدة.

3-1-1 قانون جملة دفعات بداية المدة:

لنفترض أن:

A'_n : جملة دفعات بدايةالمدة؛

ونستعين بالشكل التالي الذي يُوضح محور الزمن للفترات وللدفعات وجملها كما يلي:



وجملة الدفعات كاملة A'_n تكون ابتداء من آخر دفعة كما يلي:

$$A'_n = a(1+i) + \ldots + a(1+i)^{n-3} + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^n$$

وبملاحظة عناصر هذه الجملة نجد أنها تكون متتالية هندسية متزايدة حدها الأول a(1+i) وأساسها (1+i) وعدد حدودها n وبالتالي فإن مجموع المتتالية الهندسية أي جملة الدفعات يكون كما يلي:

$$A'_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} \Rightarrow \boxed{A'_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

ولحساب جملة دفعات بداية المدة هنا نستعمل الجدول المالي رقم 3 لاستخراج العلاقة $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

ويُمكن تكوين علاقة جديدة لحساب جملة دفعات بداية المدة من خلال القانون السابق كما يلي:

$$A'_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} = a\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} = a\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - \frac{i}{i}$$

$$\boxed{A'_n = a\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]}$$

وهنا أيضا نقوم باستخدام الجدول المالي رقم 3 لاستخراج العلاقة $\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i}$

ويُمكن مقارنة جملة دفعات بداية المدة وجملة دفعات نهاية المدة كما يلي:

$$A'_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad\qquad A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

من خلال كل من القانونين يُمكن ملاحظة أن:

$$\boxed{A'_n = A_n(1+i)}$$

ولحساب جملة الدفعات نستعين بالجدول المالي رقم 3 الذي يُقدم العلاقة $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ أو العلاقة $\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i}$ بشرط وجود المعدل المستعمل في الجدول، وهنا نكون أمام حالتين:

- حالة وجود معدل الفائدة في الجدول:

مثال 3-17

أراد شخص تكوين رأس مال بـ 7دفعات متساوية مبلغ الواحدة 5000 دج، تدفع الأولى عند إمضاء العقد. معدل الفائدة السنوي 2%.

المطلوب: ماهو مبلغ رأس المال؟

الحل:

$$a = 5000$$
$$i = 2\%$$
$$n = 7$$

استخدام القانون الأول:

$$A_n' = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow A_7' = 5000(1,02)\frac{(1+0,02)^7 - 1}{0,02}$$

$$= 5000(1,02)(7,43428338)$$

$$\boxed{A_7' = 37914,85 \text{دج}}$$

استخدام القانون الثاني:

$$A_n' = a\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right] \Rightarrow A_7' 5000\left[\frac{(1,02)^{7+1} - 1}{0,02} - 1\right] = 5000(8,58296905 - 1)$$

$$\boxed{A_7' = 37914,85 \text{دج}}$$

- **حالة عدم وجود معدل الفائدة في الجدول:** في هذه الحالة يتم حساب الجملة باستخدام طريقة التناسب كما يلي:

ليكن i هو المعدل الغير المجدول: نحدد المعدلين المجدولين الذين يحصران المعدل الغير المجدول وليكن المعدل الأكبر i_1 والمعدل الأصغر i_2 وبطريقة التناسب نكتب :

$$\boxed{\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}=\frac{(1+i_2)^{n+1}-1}{i_2}+\frac{\left(\frac{(1+i_1)^{n+1}-1}{i_1}-\frac{(1+i_2)^{n+1}-1}{i_2}\right)\times(i-i_2)}{(i_1-i_2)}}$$

ثم نقوم بعد ذلك باستخدام $\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}$ في حساب جملة دفعات بداية المدة.

مثال 3-18

احسب جملة 4 دفعات متساوية قيمة الواحدة 8300دج الأولى تُدفع في بداية السنة الأولى بمعدل فائدة 4,6%.

الحل:

$$a = 8300 \text{ دج}$$

$$i = 4,6\%$$

$$n = 4$$

لدينا معدل فائدة 4,6% وهو معدل غير موجود في الجدول المالي وهو معدل محصور بين المعدلين المجدولين i_1 %=4,75% و i_2=4,5% ومنه:

$$\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} = \frac{(1+i_2)^{n+1}-1}{i_2} + \frac{\left(\frac{(1+i_1)^{n+1}-1}{i_1} - \frac{(1+i_2)^{n+1}-1}{i_2}\right)\times(i-i_2)}{(i_1-i_2)}$$

$$\frac{(1+0,046)^{4+1}-1}{0,046} = \frac{(1+0,045)^{4+1}-1}{0,045} + \frac{\left(\frac{(1+0,0475)^{4+1}-1}{0,0475} - \frac{(1+0,045)^{4+1}-1}{0,045}\right)\times(0,046-0,045)}{(0,0475-0,045)}$$

$$\frac{(1+0,046)^{4+1}-1}{0,046} = 5,47070973 + \frac{(5,49810345-5,47070973)\times(0,001)}{(0,0025)} = 5,481667218$$

$$A'_4 = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right] \Rightarrow A'_4 = 8300\left[\frac{(1+0,046)^{4+1}-1}{0,046}-1\right] = 8300(5,481667218-1)$$

$$\boxed{A'_4 = 37197,71 \text{ دج}}$$

2-1-3 استخدام قانون جملة دفعات بداية المدة:

باستخدام قانون جملة دفعات بداية المدة يُمكن تحديد أي عنصر مجهول فيها مع ضرورة معلومية باقي العناصر.

1- تحديد قيمة الدفعة:

لدينا :

$$A'_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

ويمكن إيجاد قيمة الدفعة كما يلي:

$$a = A'_n (1+i)^{-1} \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

وبما أن المقدار $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$ لا يوجد في الجداول المالية، فإنه يُمكن التصرف فيه للحصول على علاقة موجودة في الجداول المالية كما يلي:

نستخدم المقدار $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ الموجود في الجدول المالي رقم 5

نضرب المقدار السابق في المقدار التالي : $\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}$

نطرح المقدار $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$ من حاصل الضرب السابق. ومنه:

$$\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \times \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n} - \frac{i}{(1+i)^n - 1} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

$$= \frac{i(1+i)^n - i}{(1+i)^n - 1} = \frac{i\left[(1+i)^n - 1\right]}{(1+i)^n - 1} = i$$

وبالتالي عند البحث عن المقدار $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$ فإننا نستخرج المقدار $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ من الجدول المالي رقم 5 ونطرح منه i. وبالتالي يُمكن إيجاد قيمة الدفعة كما يلي:

$$\boxed{a = A'_n (1+i)^{-1} \left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i \right]}$$

مثال 3-19

اوجد قيمة الدفعة إذا علمت أن الجملة التي تكونت بـ 7 دفعات متساوية تساوي 85635,85دج بمعدل فائدة 8% وأن أول دفعة تم دفعها كانت في بداية الفترة؟

الحل:

$$A'_7 = 85635{,}85 \text{ دج}$$

$$i = 8\%$$

$$n = 7 \text{ دفعات}$$

$$a = A'_n(1+i)^{-1}\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i\right] \Rightarrow a = A'_7(1+0{,}08)^{-1}\left[\frac{0.08}{1-(1+0.08)^{-7}} - 0{,}08\right]$$

$$a = 85635{,}85(0{,}92592593)(0{,}1920724 - 0{,}08)$$

$$\boxed{a = 8886{,}5 \text{ دج}}$$

2- تحديد معدل الفائدة:

انطلاقا من قانون جملة دفعات بداية المدة:

$$A'_n = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right] \Rightarrow \frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1=\frac{A'_n}{a} \Rightarrow \boxed{\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}=\frac{A'_n}{a}+1}$$

ثم نبحث عن قيمة الطرف الثاني في الجدول المالي رقم 3 وهنا نكون أمام حالتين:

الحالة الأولى: وجود قيمة الطرف الثاني في الجدول المالي: نبحث عن قيمة الطرف الثاني في السطر الذي تقع فيه المدة المحددة في المعطيات ومعدل الفائدة المبحوث عنه هو الذي يقع في العمود الذي تقع فيه قيمة الطرف الثاني.

مثال 3-20

كون احد الأشخاص رأس مال قدره 15608,04دج عن طريق 3 دفعات متساوية قيمة الواحدة 5000دج، الأولى كانت في بداية السنة.

المطلوب: اوجد معدل الفائدة؟

الحل:

$A'_3 = 15608{,}04$ دج

$a = 5000$ دج

$n = 4$ دفعات

$$\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}=\frac{A'_n}{a}+1 \Rightarrow \frac{(1+i)^{3+1}-1}{i}=\frac{15608{,}04}{5000}+1=4{,}121608$$

نبحث عن المقدار 4,121608 في الجدول المالي رقم 3 عند السطر الذي يقابل 4 فترات ونجد تلك القيمة عند العمود الذي يقابل معدل فائدة 2% إذا:

$$\boxed{i = 2\%}$$

الحالة الثانية: عدم وجود قيمة الطرف الثاني في الجدول المالي: إذا بحثا في الجدول المالي رقم 3 عن قيمة الطرف الثاني ولم نجده فإننا في هذه الحالة نجد المعدل بطريقة التناسب كما يلي:

- نحدد القيمتين في الجدول المالي التي تقع بينهما قيمة الطرف الثاني $\frac{A'_n}{a}+1$ عند السطر التي تقع فيه المدة المحددة في المعطيات ونرمز للقيمة الكبرى ب x_1 والقيمة الصغرى x_2.

- نحدد معدلي الفائدة الذين يقابلان القيمتين المتحصل عليهما في الخطوة السابقة ونرمز للمعدل الكبير ب i_1 والمعدل الصغير ب i_2؛

ويتم إيجاد معدل الفائدة بالتناسب كما يلي:

$$\boxed{i = i_2 + \frac{(i_1 - i_2)\times((\frac{A'_n}{a}+1) - x_2)}{(x_1 - x_2)}}$$

مثال 3-21

كون احد الأشخاص رأس مال قدره 26587,45دج عن طريق 5 دفعات متساوية قيمة الواحدة 4748ج، الأولى كانت في بداية السنة.

المطلوب: اوجد معدل الفائدة؟

الحل:

$$A'_5 = 26587{,}45 \text{دج}$$

$$a = 4748 \text{دج}$$

$$n = 5 \text{ دفعات}$$

$$\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} = \frac{A'_n}{a} + 1 \Rightarrow \frac{(1+i)^{5+1}-1}{i} = \frac{26587{,}45}{4748} + 1 = 5{,}59971567 + 1 = 6{,}59971567$$

نرى أن هذا المقدار غير موجود في الجدول المالي وبالتالي نجد المعدل بطريقة التناسب

$$i = i_2 + \frac{(i_1 - i_2) \times \left(\left(\frac{A'_n}{a} + 1\right) - x_2\right)}{(x_1 - x_2)}$$

$$i = 0{,}0375 + \frac{(0{,}04 - 0{,}0375) \times (6{,}59971567 - 6{,}59142796)}{(6{,}63297546 - 6{,}59142796)}$$

$$i = 0{,}037998688 \approx 0{,}038 = \boxed{3{,}8\%}$$

3- تحديد مدة أو عدد الدفعات :

انطلاقا من قانون جملة دفعات بداية المدة:

$$A'_n = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right] \Rightarrow \frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} = \frac{A'_n}{a}+1$$

ثم نبحث عن قيمة الطرف الثاني في الجدول المالي رقم 3 وهنا نكون أمام حالتين:

الحالة الأولى: وجود الطرف الثاني في الجدول المالي: نبحث عن الطرف الثاني في العمود الذي يقع فيه معدل الفائدة المحدد في المعطيات والمدة أو عدد الدفعات المبحوث عنه هو الذي يقع في السطر الذي تقع فيه قيمة الطرف الثاني.

مثال 3-22

كون احد الأشخاص رأس مال قدره 28778,94دج بدفعات متساوية مبلغ الواحدة 5302دج، تدفع الأولى عند بداية المدة. معدل الفائدة السنوي 2,75%.

المطلوب: اوجد عدد الدفعات التي سمحت بتكوين رأس المال؟

الحل:

$$A'_n = 28778{,}94 \text{ دج}$$

$$a = 5302 \text{ دج}$$

$$i = 2{,}75\%$$

$$\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} = \frac{A'_n}{a}+1 \Rightarrow \frac{(1+0.0275)^{n+1}-1}{0.0275} = \frac{28778{,}94}{5302}+1 = 5{,}4279404+1 = 6{,}4279404$$

نبحث عن المقدار 6,4279404 في الجدول المالي رقم 3 عند العمود الذي يقابل معدل فائدة 2,75% ونجد تلك القيمة عند السطر الذي يقابل 6. ومنه:

$$\boxed{n = 6-1 = 5 \text{ دفعات}}$$

<u>الحالة الثانية: عدم وجود قيمة الطرف الثاني في الجدول المالي:</u> كما في البحث عن i فقد لا يوجد n أيضا في الجدول أو لا يكون عددا كاملا، هنا لا يُمكن أن توجد n بهذه الوضعية مادام n هي عدد الفترات، وبالتالي عند مصادفة هذه الحالة فإننا نقوم بما يلي:

نبحث في الجدول المالي رقم 3 عن القيمتين اللتين تحصران قيمة الطرف الثاني $\frac{A'_n}{a}+1$ ونحدد عدد الدفعات التي تقابل تلك القيمتين.

ومن تم نأخذ احد الحلول التالية:

1- إعادة حساب قيمة الدفعة الجديدة في كل حالة من حالتي عدد السنوات أو الدفعات التين تحصران n المبحوث عنها؛

2- حساب قيمة الدفعة على أساس n التي تقابل القيمة الصغرى التي تحصر قيمة الطرف الثاني $\frac{A'_n}{a}+1$ ثم نحدد الفارق بين الجملة الإجمالية وجملة n دفعة والفرق يتم تسديده عند استلام الجملة.

مثال 3-23

كون احد الأشخاص رأس مال قدره 62627,14بـدفعات متساوية مبلغ الواحدة 8300دج، تدفع الأولى عند بداية المدة. معدل الفائدة السنوي 3%.

المطلوب: اوجد عدد الدفعات التي سمحت بتكوين رأس المال؟

الحل:

$$A'_n = 62627{,}14 \text{ دج}$$

$$a = 8300 \text{ دج}$$

$$i = 3\%$$

$$\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} = \frac{A'_n}{a} + 1 \Rightarrow \frac{(1+0.03)^{n+1}-1}{0.03} = \frac{62627{,}14}{8300} + 1 = 8{,}545438554$$

بالبحث في الجدول المالي رقم 3 نجد أن هذا المقدار محصور بين 7 و8 أي أن n+1 محصور بين 7 و 8 ومنه فإن n محصور بين 6 و 7 . ويُمكن الأخذ بأحد الحلول التالية:

الحل الأول: إعادة حساب قيمة الدفعة إما مع n=6 أو n=7

حساب قيمة الدفعة مع n=6

$$a = A'_n (1+i)^{-1}\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i\right] \Rightarrow a = A'_6 (1+0,03)^{-1}\left[\frac{0,03}{1-(1+0,03)^{-6}} - 0,03\right]$$

$$a = 62627,14(0,97087379)(0,1545975) = 9399,999332 \approx \boxed{9400 \text{ دج}}$$

حساب قيمة الدفعة مع n=7

$$a = A'_n (1+i)^{-1}\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i\right] \Rightarrow a = A'_7 (1+0,03)^{-1}\left[\frac{0,03}{1-(1+0,03)^{-7}} - 0,03\right]$$

$$a = 62627,14(0,97087379)(0,13050635) = \boxed{7935,18 \text{ دج}}$$

الحل الثاني:

دفع 6 دفعات متساوية قيمة كل منها 8300دج والباقي يُضاف عند استلام الجملة.

$$A'_n = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right] \Rightarrow A'_6 = (8300)\left[\frac{(1+0{,}03)^{6+1}-1}{0{,}03}-1\right]$$

$$A'_5 = (8300)(7{,}66246218-1) = 55298{,}44\text{دج}$$

وبالتالي فإن الباقي الذي يُضاف عند استلام الجملة هو: $62627{,}14 - 55298{,}44 = 7328{,}7$ دج

3-2القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:

3-2-1 قانون القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:

القيمة الحالية لدفعات بداية المدة هي قيمة هذه الدفعات كلها في تاريخ أول مدة الإيداع أي عند الفترة 0 من الإيداع، ويتوافق هذا التاريخ مع تاريخ إيداع أول دفعة من سلسلة الدفعات.

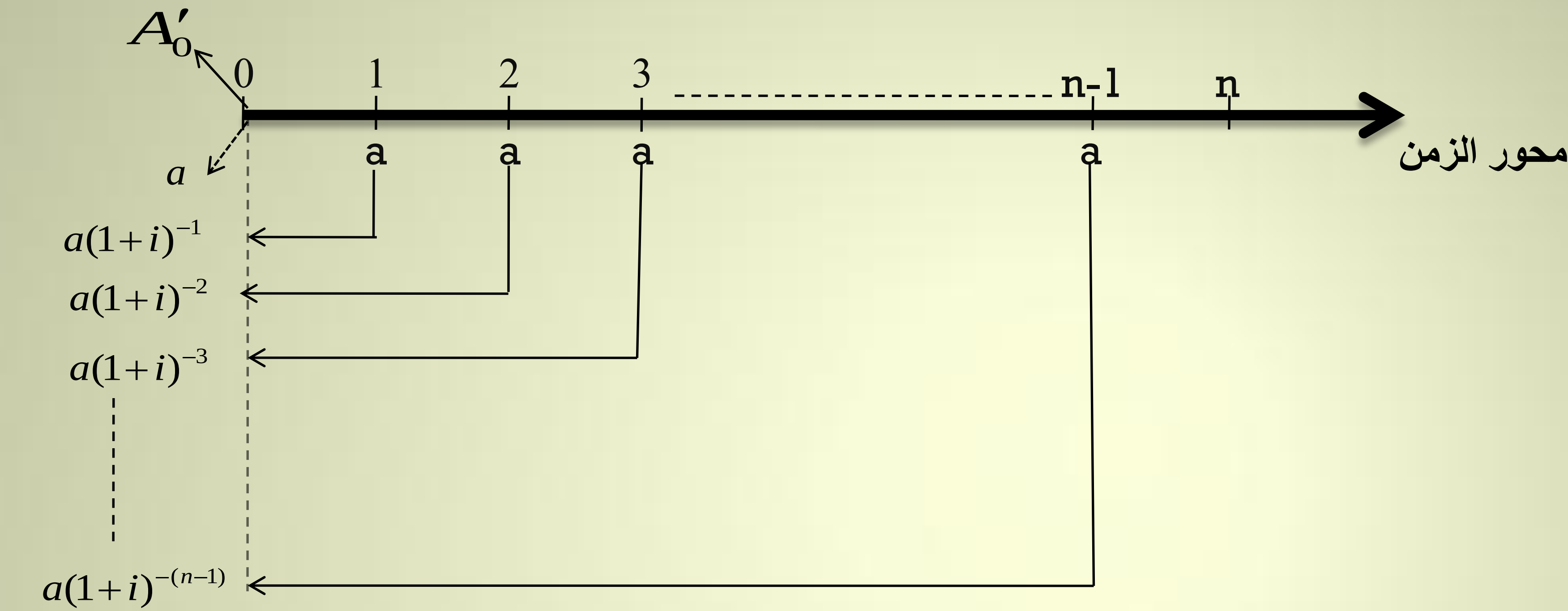
ويُمكن التوصل إلى قانون القيمة الحالية لدفعات بداية المدة بطريقتين:

الطريقة الأولى: باستعمال مجموع القيم الحالية للدفعات منفصلة:

لنفترض أن:

A'_0 : القيمة الحالية لدفعات بداية المدة؛

ونستعين بالشكل التالي الذي يُوضح محور الزمن للفترات وللدفعات وقيمها الحالية كما يلي:



والقيمة الحالية للدفعات كاملة A'_0 تكون ابتداء من أول دفعة كما يلي:

$$A_0 = a + a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + a(1+i)^{-3} + \ldots + a(1+i)^{-(n-1)}$$

وبملاحظة الطرف الأيسر من المعادلة نجد أنها تكون متتالية هندسية متزايدة حدها الأول a وأساسها $(1+i)^{-1}$ وعدد حدودها n وبالتالي فإن مجموع المتتالية الهندسية أي مجموع القيم الحالية للدفعات يكون كما يلي:

$$A'_0 = a\frac{\left((1+i)^{-1}\right)^n - 1}{(1+i)^{-1} - 1} = a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow \boxed{A'_0 = a\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right]}$$

الطريقة الثانية: حساب القيمة الحالية لجملة الدفعات:

$$A'_0 = A'_n(1+i)^{-n} \Rightarrow A'_0 = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right](1+i)^{-n} \Rightarrow \boxed{A'_0 = a\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right]}$$

ولحساب القيمة الحالية للدفعات نستعين بالجدول المالي رقم 4 الذي يُقدم العلاقة $\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}$ بشرط وجود معدل الفائدة في الجدول المالي، وهنا نكون أمام حالتين:

- حالة وجود معدل الفائدة في الجدول المالي:

مثال 3-24

احسب القيمة الحالية لـ 8 دفعات متساوية قيمة الواحدة تساوي 4429 دج الأولى تُدفع في بداية الفترة بمعدل فائدة 4%.

الحل:

$$a = 4429 \text{ دج}$$

$$i = 4\%$$

$$n = 8 \text{ دفعات}$$

$$A'_0 = a\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right] \Rightarrow A'_0 = 4429\left[1+\frac{1-(1+0.04)^{-(8-1)}}{0.04}\right] = 4429(7,00205467)$$

$$\boxed{A'_0 = 31012,1 \text{ دج}}$$

- **حالة عدم وجود معدل الفائدة في الجدول المالي:** في هذه الحالة يتم حساب القيمة الحالية باستخدام طريقة التناسب كما يلي:

ليكن i هو المعدل الغير المجدول: نحدد المعدلين المجدولين الذين يحصران المعدل الغير المجدول وليكن المعدل الأكبر i_1 والمعدل الأصغر i_2 وبطريقة التناسب نكتب :

$$\boxed{\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \frac{1-(1+i_2)^{-(n-1)}}{i_2} - \frac{\left(\frac{1-(1+i_2)^{-(n-1)}}{i_2} - \frac{1-(1+i_1)^{-(n-1)}}{i_1}\right)\times(i-i_2)}{(i_1-i_2)}}$$

ثم نقوم بعد ذلك باستخدام $\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}$ في حساب القيمة الحالية.

مثال 3-25

احسب القيمة الحالية لـ 5 دفعات متساوية قيمة الواحدة تساوي 8149دج الأولى تُدفع في بداية الفترة بمعدل فائدة 2,9%.

الحل:

$$a = 8149 \text{ دج}$$
$$i = 2,9\%$$
$$n = 5 \text{ دفعات}$$

نلاحظ أن معدل الفائدة 2,9%غير موجود في الجدول المالي وهو محصور بين $i_1=3\%$ و $i_2=2,75\%$

وبطريقة التناسب:

$$\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \frac{1-(1+i_2)^{-(n-1)}}{i_2} - \frac{\left(\frac{1-(1+i_2)^{-(n-1)}}{i_2} - \frac{1-(1+i_1)^{-(n-1)}}{i_1}\right)\times(i-i_2)}{(i_1-i_2)}$$

$$\frac{1-(1+0.029)^{-(5-1)}}{0,029} = \frac{1-(1+0.0275)^{-(5-1)}}{0.0275} - \frac{\left(\frac{1-(1+0.0275)^{-(5-1)}}{0.0275} - \frac{1-(1+0.03)^{-(5-1)}}{0.03}\right)\times(0.029-0.0275)}{(0.03-0.0275)}$$

$$\frac{1-(1+0.029)^{-(5-1)}}{0,029} = 3,73942787 - \frac{(3,73942787-3,7170984)\times(0.0015)}{(0.0025)} = 3,726030188$$

$$A'_0 = a\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right] \Rightarrow A'_0 = 8149\left[1+\frac{1-(1+0,029)^{-(5-1)}}{0,029}\right] = 8149(1+3,726030188)$$

$$\boxed{A'_0 = 38512,42 \text{ دج}}$$

2-2-3 استخدام قانون القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:

باستخدام قانون القيمة الحالية لدفعات بداية المدة يُمكن تحديد أي عنصر مجهول فيها مع ضرورة معلومية باقي العناصر

1- تحديد قيمة الدفعة: يُمكن إيجاد قيمة الدفعة كما يلي:

$$A'_0 = a\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right] \Rightarrow \boxed{a = \frac{A'_0}{1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}}}$$

ويُمكن أن نجد قيمة $\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}$ في الجدول المالي رقم 4.

مثال 3-26

تبلغ القيمة الحالية لسلسلة دفعات متساوية عددها 8 دفعات 57179,59 دج بمعدل فائدة 3,5%.

المطلوب: احسب قيمة الدفعة؟

الحل:

$$A'_0 = 57179{,}59 \text{ دج}$$

$$i = 3{,}5\%$$

$$n = 8 \text{ دفعات}$$

$$a = \frac{A'_0}{1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}} = \frac{57179{,}59}{1+\frac{1-(1+0{,}035)^{-(8-1)}}{i}} = \frac{57179{,}59}{1+6{,}11454398} \Rightarrow \boxed{a = 8037 \text{ دج}}$$

2- تحديد معدل الفائدة:

انطلاقا من قانون القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:

$$A_0' = a\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right] \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \frac{A_0'}{a}-1$$

ثم نبحث عن قيمة الطرف الأيسر من المعادلة في الجدول المالي رقم 4 وهنا نكون أمام حالتين:

الحالة الأولى: وجود القيمة في الجدول المالي: نبحث عن القيمة في السطر الذي تقع فيه المدة المحددة في المعطيات ومعدل الفائدة المبحوث عنه هو الذي يقع في العمود الذي تقع فيه القيمة.

مثال 3-27

سلسلة دفعات ثابتة عددها 7 وقيمة كل واحدة منها 6339 دج الأولى تُدفع في بداية الفترة كانت قيمتها الحالية 39841,069دج

المطلوب: اوجد معدل الفائدة المطبق؟

الحل:

$$A_0' = 30839{,}039\text{دج}$$

$$a = 9002\text{دج}$$

$$n = 4$$

$$\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \frac{A_0'}{a}-1 \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-(7-1)}}{i} = \frac{39841{,}069}{6339}-1 = 5{,}28507162$$

نبحث عن المقدار 5,28507162 في الجدول المالي رقم 4 عند السطر الذي يقابل 6 فترات ونجد تلك القيمة عند العمود الذي يقابل معدل فائدة 3,75% إذا:

$$\boxed{i = 3{,}75\%}$$

الحالة الثانية: عدم وجود القيمة في الجدول المالي: إذا بحثنا في الجدول المالي رقم 4 عن القيمة ولم نجدها فإننا في هذه الحالة نجد المعدل بطريقة التناسب كما يلي:

- نحدد القيمتين في الجدول المالي التي يقع بينهما القيمة $\frac{A'_0}{a}-1$ عند السطر التي تقع فيه المدة المحددة في المعطيات ونرمز للقيمة الكبرى ب x_1 ومعدل الفائدة المقابل بـ i_2 ونرمز للقيمة الصغرى x_2 ومعدل الفائدة المقابل بـ i_1.

ويتم إيجاد معدل الفائدة بالتناسب كما يلي:

$$\boxed{i = i_1 - \frac{\left(\left(\frac{A'_0}{a} - 1\right) - x_2\right)(i_1 - i_2)}{(x_1 - x_2)}}$$

مثال 3-28

سلسلة دفعات ثابتة عددها 9 وقيمة كل واحدة منها 5200دج الأولى تُدفع في بداية الفترة كانت قيمتها الحالية 39220,59دج

المطلوب: اوجد معدل الفائدة المطبق؟

الحل:

$A'_0 = 39220{,}59$ دج

$a = 5200$ دج

$n = 9$ دفعات

$$\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \frac{A'_0}{a} - 1 \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-(9-1)}}{i} - 1 = \frac{39220{,}59}{5200} - 1 = 6{,}542421154$$

نرى أن هذا المقدار غير موجود في الجدول المالي وبالتالي نجد المعدل بطريقة التناسب

$$i = i_1 - \frac{\left(\left(\frac{A'_0}{a} - 1\right) - x_2\right)(i_1 - i_2)}{(x_1 - x_2)} \Rightarrow i = 0{,}0475 - \frac{(6{,}542421154 - 6{,}52903633)(0{,}0475 - 0{,}045)}{(6{,}59588607 - 6{,}52903633)}$$

$$i = 0{,}046999443 \approx 0{,}047 = \boxed{4{,}7\%}$$

3- تحديد مدة أو عدد الدفعات :

انطلاقا من قانون القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:

$$A'_0 = a\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right] \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \frac{A'_0}{a} - 1$$

ثم نبحث عن قيمة الطرف الأيسر في المعادلة في الجدول المالي رقم 4 وهنا نكون أمام حالتين:

الحالة الأولى: وجود القيمة في الجدول المالي: نبحث عن القيمة في العمود الذي يقع فيه معدل الفائدة المحدد في المعطيات والمدة أو عدد الدفعات المبحوث عنه هو الذي يقع في السطر الذي تقع فيه القيمة.

مثال 3-29

سلسلة دفعات ثابتة قيمة كل منها 7263دج الأولى تُدفع في بداية الفترة بمعدل فائدة 5% كانت قيمتها الحالية 49289,43دج.

المطلوب: اوجد عدد الدفعات؟

الحل:

$$A'_0 = 49289{,}43 \text{ دج}$$

$$a = 7263 \text{ دج}$$

$$i = 5\%$$

$$\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \frac{A'_0}{a} - 1 \Rightarrow \frac{1-(1+0.05)^{-(n-1)}}{0.05} = \frac{49289{,}43}{7263} - 1 = 5{,}786373399$$

نبحث عن المقدار 5,786373399 في الجدول المالي رقم 4 عند العمود الذي يقابل معدل فائدة 5% ونجد تلك القيمة عند السطر الذي يقابل مدة 7 فترات. ومنه:

$$\boxed{n = 7 + 1 = 8 \text{ دفعات}}$$

<u>الحالة الثانية: عدم وجود القيمة فى الجدول المالى:</u> كما في البحث عن i فقد لا يوجد n أيضا في الجدول أو لا يكون عددا كاملا، هنا لا يُمكن أن توجد n بهذه الوضعية مادام n هي عدد الفترات، وبالتالي عند مصادفة هذه الحالة فإننا نقوم بما يلي:

نبحث في الجدول المالي رقم 4 عن القيمتين اللتين تحصران القيمة $\frac{A'_0}{a}-1$ ونحدد عدد السنوات أو الدفعات التي تقابل تلك القيمتين. ثم يُمكن أخد الحل التالي:

إعادة حساب قيمة الدفعة الجديدة في كل حالة من حالتي عدد السنوات أو الدفعات التين تحصران n المبحوث عنها؛

مثال 3-30

سلسلة دفعات ثابتة قيمة كل منها 6340دج الأولى تُدفع في بداية الفترة بمعدل فائدة 3,5% كانت قيمتها الحالية 45639,8دج.

المطلوب: اوجد عدد الدفعات؟

الحل:

$$A'_0 = 45639{,}8 \text{ دج}$$

$$a = 6340 \text{ دج}$$

$$i = 3{,}5\%$$

$$\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \frac{A'_0}{a} - 1 \Rightarrow \frac{1-(1+0{,}035)^{-(n-1)}}{0{,}035} = \frac{45639{,}8}{6340} - 1 = 6{,}198706625$$

بالبحث في الجدول المالي رقم 4 نجد أن هذا المقدار محصور بين n=7 و n=8 أي أن n-1 محصور بين 7 و 8 ومنه فإن n محصور بين 8 و 9 وبالتالي هناك حلان:

الحل الأول: إعادة حساب قيمة الدفعة إما مع n=8 أو n=9

حساب قيمة الدفعة مع n=8

$$a = \frac{A'_0}{1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}} = \frac{45639{,}8}{1+\frac{1-(1+0{,}035)^{-(8-1)}}{0{,}035}} = \frac{45639{,}8}{1+6{,}11454398}$$

$$\boxed{a = 6415 \text{ دج}}$$

حساب قيمة الدفعة مع n=9

$$a=\frac{A'_0}{1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}}=\frac{45639{,}8}{1+\frac{1-(1+0{,}035)^{-(9-1)}}{0{,}035}}=\frac{45639{,}8}{1+6{,}87395554}$$

$$\boxed{a=5796{,}3\text{دج}}$$