Centre Universitaire de Mila
Institut des Mathématiques et Informatique
Deuxième année Mathématiques et Mathématiques Appliquées 2024/2025

Matière : *Algèbre 3*
Responsable : *N. Haddad*

Série de TD N° 2 (Diagonalisation)

Exercice 1 : Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (2x + y, y - z, 2y + 4z) \end{array}$$

1. Trouver les valeurs propres de f et les sous-espace propres qui leurs sont associés.
2. Donner une base de chacun des sous-espace propres de f .

Exercice 2 : Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R}_2[X] & \to \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto (1 - X)P' \end{array}$$

1. Trouver les valeurs propres de g et les sous-espace propres qui leurs sont associés.
2. Donner une base de chacun des sous-espace propres de g .

Exercice 3 : Déterminer les polynômes caractéristiques et les valeurs propres des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 : Soit f un endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ vérifie $f \circ f = f$. On suppose que f est différent de l'application nulle et de l'identité.

1. Calculer les valeurs propres de f.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, les vecteurs $u = f(x)$ et $v = x - f(x)$ sont des vecteurs propres de f. Préciser les valeurs propres associée à u et v.
3. En déduire que f est diagonalisable.
4. Exprimer les sous espaces propres en fonction de $Kerf$ et Imf.

<u>Exercice 5 :</u> Soit A_α la matrice suivante

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-\alpha & \alpha-2 & \alpha \end{pmatrix}$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de $A\alpha$.
2. Déterminer les valeurs de α pour que A_α soit diagonalisable
3. Supposons $\alpha = 2$, déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A_2 = PDP^{-1}$.

<u>Exercice 6 :</u>

I) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que

$$0 \in sp\,(f) \Leftrightarrow f\, n'est\, pas\, surjectif.$$

II) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, alors A^k est aussi diagonalisable.

<u>Exercice 7 :</u>(**Supplmentaire**)

Soit dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les valeurs propres de A et montrer que A est diagonalisable.
3. Trouver une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

<u>Exercice 8 :</u>(**Supplmentaire**)

Soit f l'application

$$f : \begin{array}{ll} \mathbb{C}^3 & \to \mathbb{C}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (2x + 2y, -x, z) \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Calculer la matrice associée à f par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer le polynôme caractéristique $\mathbf{P}_f(\lambda)$
4. Déterminer les valeurs propres de f et montrer que f est diagonalisable.