Centre Universitaire de Mila
Institut des Mathématiques et Informatique
Deuxième année Mathématiques et Mathématiques Appliquées 2024/2025

Matière : *Algèbre 3*
Responsable : *N. Haddad*

Série de TD N° 1(Révision)

Exercice 1 :

Soit f et g les applications définies par :

$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (2x-4y, x-2y) \end{array}$$

$$g: \begin{array}{ll} \mathbb{R}_3[X] & \to \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto (1+X)P' \end{array}$$

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes.
2. Donner la matrice M_f de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
3. Donner la matrice M_g de g dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 2 :

Soit l'application

$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R}_2[X] & \to \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto (1+X)P' \end{array}$$

1. Montrer que f un endomorphisme.
2. Déterminer M la matrice assoiée à f dans la base canonique B de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $B' = \{1, (1+X), (1+X)^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer M' la matrice assoiée à f par rapport à B′ et B′.
5. Déterminer P la matrice de passage de B à B′.
6. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
7. Déduire la matrice M' à partir des matrices P, P^{-1} et M.

Exercice 3 :

Calculer les déterminants des matrices suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 123 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -79 & 61 & 0 \\ 85 & -93 & 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & a & b & a \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}.$$

.

Exercice 4 :

Soit dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice $M_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha - 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de M_α et déduire les valeurs de α pour être M_α inversible.
2. Calculer M_1^{-1} l'inverse de M_1.

Exercice 5 : (*Examen Algèbre 2*)

Soit l'application

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^4 \\ & (x, y, z) & \mapsto f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z) \end{array}$$

1. Montrer que f est un application linéaire et déterminer M la matrice associée a f par rapport a B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et B' la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de Im(f). Déduire le rang de f.
3. Déterminer une base de ker(f).
   L'application f est-elle injective ? surjective ?

Références bibliographiques :

1. Algèbre linéaire et bilinéaire 510/516.
2. Algèbre, exercices et problème 510/420.
3. Exercices corrigé d'algèbre linéaire, Tom 2 510/27.
4. Algèbre linéaire 510/24.
5. Les mathématiques en licence, tom 4 510/1056.
6. Algèbre linéaire 510/1065.
7. Réduction des endomorphismes : exercices corrigés avec rappels de cours 510/15.
8. http// www.exo7.fr.