المركز الجامعي عبد الحفيظ بوالصوف – ميلة

معهد العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم علوم التسيير

محاضرات في مادة الاحصاء 3

موجهة لطلبة السنة الثانية علوم التسيير

السنة الجامعية 2024-2025

المحور الأول: أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

تمهيد:

رغم الطابع العشوائي للظواهر (غير المستقرة)، فإنه على العموم وفي غالب الأحيان لها سلوك معين نجهله، وعلى هذا الأساس حاول علماء الاحصاء والرياضيات تتبع سلوك الظواهر العشوائية في كثير من ميادين المعرفة واستطاعوا وضع قوانين احتمالية لها تفسر سلوك هذه الظواهر بطريقة علمية، فكلما كانت مجموعة من الظواهر العشوائية تستجيب لجملة من القواعد المشتركة (التكرار أي التحقق، المتوسط، الانتشار، شكل التوزيع وغيرها) كلما كان لها نفس القانون الاحتمالي.

يمكن أن نميز بين نوعين من القوانين الاحتمالية:

- قوانين احتمالية لمتغيرات عشوائية متصلة.
- قوانين احتمالية لمتغيرات عشوائية منفصلة.

المحاضرة الأولى: توزيع برنولي وتوزيع ذي الحدين

1. توزيع برنولي

1.1. التعريف بتوزيع برنولي:

سمي هذا التوزيع باسم مكتشفه جيمس برنولي، ويعد توزيع برنولي أو ما يسمى أحيانا بمحاولة برنولي الأساس لبناء العديد من التوزيعات الأخرى، وتعرف تجربة برنولي التي تعد من أبسط أنواع التجارب العشوائية بأنها: التجربة التي تكون نتيجتها إما نجاحا أو فشلا.

ملاحظة:

التسمية نجاح أو فشل تستخدم فقط لتعريف نتائج محاولة برنولي وليس للدلالة على تفضيل نتيجة على أخرى؛ أي أنه إذا كانت النتيجة نجاحا فهذا لا يعني بالضرورة أنها النتيجة المرغوب فيها.

ويعتبر النموذج الاحتمالي الذي يحتوي فراغه على حدثين بسيطين فقط من أبسط النماذج الاحتمالية، وبما أن الحدثين البسيطين النجاح p أو الفشل q لهما طبيعة وصفية؛ أي أنهما من البيانات الوصفية فإننا نحتاج عند إجراء عملية التحليل الإحصائي إلى تحويل البيانات الوصفية إلى كمية، ويستخدم عادة الرقم 1 للإشارة إلى النجاح والرقم 0 للإشارة إلى الفشل، وذلك بالاحتمالات التالية:

$$p(X=1)=p$$
$$p(X=0)=q$$

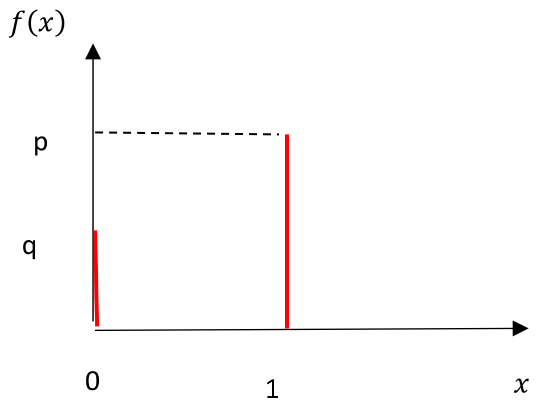
x_i	$p(X=x_i)$
1	p
0	q
$\sum$	$p+q=1$

وتعرف دالة الاحتمال لقانون برنولي كما يلي:

$$p(X=x)=p^x q^{1-x} \qquad x=0,1$$

2.1. التمثيل البياني لتوزيع برنولي

بما أن توزيع برنولي من التوزيعات المتقطعة فإن التمثيل البياني لهذا القانون يتم بواسطة الأعمدة، والمتغير له قيمتين فقط لذلك يمثل بعمودين طول كل منهما يتوقف على القيمة الاحتمالية لحادث النجاح (وبالتالي الفشل)، وهذا ما يبينه الشكل الموالي:

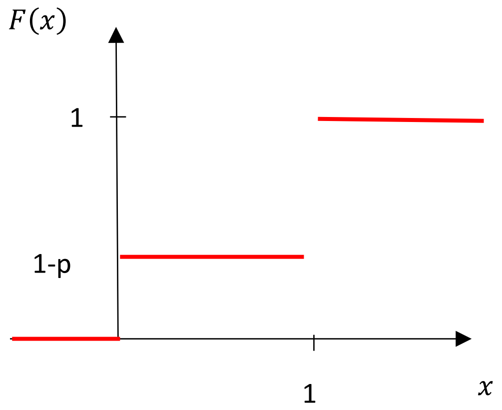


3.1. تابع التوزيع وشكله البياني

يعرف تابع التوزيع كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

ويمثل هذا التابع بثلاث درجات وفق العلاقات الثلاثة العاكسة لتابع التوزيع، وهذا ما يعكسه الشكل الموالي:



4.1. المميزات العددية لتوزيع برنولي

مثل أي متغير عشوائي فإنه متغير برنولي له مميزاته العددية التي نوضحها من خلال الآتي:

1.4.1. التوقع الرياضي

يعرف التوقع الرياضي لتوزيع برنولي كما يلي:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{1} xp(X=x)$$
$$= \sum_{x=0}^{1} xp^{x}q^{1-x}$$
$$= 0.q + 1.p$$

$$E\ (X) = p$$

.2.4.1 التباين:

يعرف التباين لتوزيع برنولي كما يلي:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{1} x^2 p(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{1} x^2 p^x q^{1-x} = p$$

$$V(X) = p - p^2$$

$$= p(1 - p)$$

$$V(X) = pq$$

.5.1 الدالة المولدة للعزوم

$$M_x(T) = E(e^{xt})$$

$$= \sum_{x=0}^{1} e^{xt} p(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{1} e^{xt} p^x q^{1-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{1} (pe^t)^x q^{1-x}$$

$$M_x(T) = q + pe^t$$

2. التوزيع الثنائي (توزيع ذو الحدين):

يعتبر التوزيع الثنائي من أبسط وأقدم القوانين الاحتمالية، وقد شكل نقطة الانطلاق لدراسة قوانين احتمالية أخرى مثل قانون بواسون، قانون فوق الهندسي وغيرها.

وتتمثل خصائص هذا التوزيع فيما يلي:

- تتضمن تجربة التوزيع الثنائي عددا محددا من المحاولات المستقلة.
- لكل محاولة من المحاولات نتيجتين فقط هما النجاح أو الفشل.
- أن احتمال النجاح ثابت لجميع المحاولات، وكذا الأمر بالنسبة لاحتمال الفشل.

إن عدد مرات النجاح X في تجربة ثنائية مكونة من n محاولة مكررة يدعى بمتغير عشوائي ثنائي، ويرمز للتوزيع الاحتمالي الثنائي كما يلي:

$$X \sim B(n,p)$$

n و p: هما معلمتا هذا التوزيع، وهذا يعني أن هذا التوزيع يتحدد تحديدا تاما بمعلومية معلمتيه n (حجم العينة) واحتمال النجاح p.

1.2. دالة الاحتمال للتوزيع الثنائي:

تعرف دالة الاحتمال للتوزيع الثنائي كما يلي:

$$p(X=x)=\begin{cases} c_n^x p^x q^{n-x} & x=0,1,2,\dots,n \\ 0 & \text{ما عدا ذلك} \end{cases}$$

ويمكن أن نلاحظ أن شروط دالة الاحتمال محققة:

$$\forall x \;\; f(x) \geq 0$$

$$\sum_{x=0}^{n} p(X=x)=\sum_{x=0}^{n} c_n^x p^x q^{n-x}=(p+q)^n=1$$

أما التمثيل البياني للتوزيع الثنائي فيتم بالاعتماد على الأعمدة، وبما أنه للتوزيع الثنائي معلمتين n و p فإن شكل منحنى هذا التوزيع يتحدد بناء عليهما تحديدا كاملا، ونميز بين الحالات التالية:

- إذا كانت $p \neq q$ فإن منحنى التوزيع يكون ملتويا، وتزداد درجة الإلتواء كلما ابتعدت قيمة p عن $\frac{1}{2}$، فإذا انخفضت قيمة p عن $\frac{1}{2}$ يصبح التوزيع ملتويا إلتواء موجبا، وإذا زادت قيمة p عن $\frac{1}{2}$ يصبح التوزيع ملتويا إلتواء سالبا.

- إذا كانت $p = q = \frac{1}{2}$ فإن منحنى التوزيع يكون متماثلا مهما كانت قيمة n.

2.2. المميزات العددية:

يمكن توضيح المميزات العددية لهذا التوزيع من خلال مايلي:

1.2.2. التوقع الرياضي:

يمكن التعبير عن التوقع الرياضي لمتغير ذي الحدين العشوائي X بدلالة التوقع الرياضي لمتغير بيرنولي، فبما أن عدد مرات تحقق النجاح $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ وهي متغيرات عشوائية برنولية مستقلة فإن التوقع الرياضي يعرف كما يلي:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\
E(X) &= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) \\
&= p + p + \cdots + p \\
&= np \\
E(X) &= np
\end{aligned}
$$

2.2.2. التباين:

بما أن هذا التوزيع ليس سوى عبارة عن تكرار لمحاولات برنولي، وبما أن تباين مجموع متغيرات عشوائية مستقلة يساوي مجموع تباين هذه المتغيرات، فإن التباين يعرف كما يلي:

$$
\begin{aligned}
V(X) &= V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\
V(X) &= V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) \\
&= pq + pq + \cdots + pq \\
&= npq \\
V(X) &= npq
\end{aligned}
$$

3.2. الدالة المولدة للعزوم:

تعرف الدالة المولدة للعزوم لهذا التوزيع كما يلي:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_x(T) &= E(e^{xt}) \\
&= \sum_{x=0}^{n} e^{xt} c_n^x p^x q^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} c_n^x (pe^t)^x q^{n-x}
\end{aligned}
$$

$$= (pe^t + q)^n$$

$$M_x(T) = (pe^t + q)^n$$