Centre Universitaire -Abdelhafid Boussouf- Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

1ere Année Master

Mathématiques Appliquées et fondamentales

Introduction aux processus aléatoires

Serie d'exercices I

<u>Exercice 1:</u>

Soit X une variable aléatoire avec la densité

$$f_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp^{-x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$$

1) Représenter f_X d'un graphe.

2) Calculer $P(X \geq 1)$.

3) Calculer la fonction de repartition.

<u>Exercice 2:</u>

Soit X une variable aléatoire admétant une densité f defini par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4} & , \ x \geq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1) Calculer: $E(X) = m$, $var(X) = \sigma^2$.

2) Soit $Q(h) = P\{m - h\sigma \leq x \leq m + h\sigma\}$

montrer que $Q(h) \geq \frac{h^2-1}{h^2}$.

3) Calculer $Q(h)$.

<u>Exercice 3:</u>

Démontrer l'inégalité de Tchebychev.

Centre Universitaire -Abdelhafid Boussouf- Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

1ere Année Master

Mathématiques Appliquées et fondamentales

Introduction aux processus aléatoires

Serie d'exercices II

Exercice 1:

Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité jointe:

$$f_{X,Y}(x,y) = 2\exp^{-(x+y)}.\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq y\}}$$

1) Montrer que $f_{X,Y}(x,y)$ est une densité de probabilité.

2) Determiner la densité marginale $f_X(.)$ de X et deduire $E(X)$.

3) Montrer que la densité marginale $f_Y(.)$ de X est donnée par:

$$f_Y(y) = 2\exp^{-y}(1-\exp^{-y}).\mathbb{1}_{[0,+\infty[}$$

.

4) Determiner la densité conditionnelle $f_{Y/X}(x,y)$ de Y sachant que $X = x$.

5) Calculer $E(Y/X = x)$ et deduire $E(Y/X)$.

6) calculer $\int_{\mathbb{R}} E(Y/X = x) f_X(x)dx$ et deduire que $E(E(Y/X)) = E(Y)$.

7) Déterminer la valeur de $E(Y)$ par deux methodes differentes.

Exercice 2:

Montrer que si $X \in \mathbb{L}^2$ et Y est $\mathbb{G}-mesurable$. $E(X/G) = Y$ et $E(X^2/G) = Y^2$ alors: $X = Y$.

Exercice 3:

Soit X et Y deux variables aléatoires et $X - Y$ independante de G d'esperance $E(X - Y) = m$ et $var(X - Y) = \sigma^2$.

On suppose que Y est $\mathbb{G}-mesurable$.

1) Calculer $E(X - Y/G)$ et on deduire $E(X/G)$.

2) Calculer $E((X - Y)^2/G)$ en deduire $E(X^2/G)$.

Centre Universitaire -Abdelhafid Boussouf- Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

1ere Année Master

Mathématiques Appliquées et fondamentales

Introduction aux processus aléatoires

Serie d'exercices III

Exercice 1:

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivants la loi normale centrée reduite $\mathcal{N}(0,1)$ on pose $S_0 = 0$,$F_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ et pour $n \geq 1$:

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n,\ F_n = \sigma\left\{X_1, \ldots, X_n\right\}$$

. 1) Soit t un réel on note pour $n \in \mathbb{N}$: $z_n = \exp^{(tS_n)}$.montrer que $(z_n)_{n\geq 0}$ est une sous-martingal par rapport à $(F_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 2:

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de variable aléatoire de carré intégrable indépendante. on note m la moyenne de X_1 et σ^2 sa variance. on pose $S_0 = 0$ $M_0 = 0$ $F_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ et pour $n \geq 1$:

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, M_n = S_n - nm, F_n = \sigma\left\{X_1, \ldots, X_n\right\}.$$

1) Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une F_n-Martingale.

2) Montrer que $(M_n^2)_{n\geq 0}$ est une F_n-Sous martingale.

3) Montrer que $(M_n^2 - n\sigma^2)_{n\geq 0}$ est une F_n-Martingale