المحاضرة الرابعة: التوزيع فوق الهندسي

تمهيد:

تعد تجارب التوزيع فوق الهندسي من التجارب المتكررة غير المستقلة، فهذا النوع من التجارب مبني على أساس مفهوم السحب بدون إرجاع، مما يجعل احتمال الحصول على صفة معينة غير ثابت؛ أي أن الاحتمال يتغير من محاولة إلى أخرى، على عكس تجارب توزيع برنولي وتوزيع ذي الحدين التي يكون فيها الاحتمال ثابت من محاولة إلى أخرى كونهما من التجارب المستقلة، وإن السحب بموجبهما يتم بالإرجاع.

فعلى سبيل المثال، لو كان لدينا مجتمع يحتوي على (N) من العناصر، فيه(N_1) لنوع معين من العناصر نسميها (نجاحا)، أما المتبقي منه هو$(N - N_1)$ لنوع آخر من العناصر نسميها (فشلا)، وتم اختيار عينة عشوائية بحجم (n) منه بدون إرجاع، فإن عدد حالات النجاح التي يمكن الحصول عليها هي (N_1)، وإن عدد حالات الفشل هي $(N - N_1)$.

أمثلة عن التجربة فوق الهندسية:

المثال الأول: مجموعة مكونة من 20 شخصا منهم 12 رجلا و 8 سيدات اختيرت عشوائيا عينة مكونة من 5 أفراد لتكوين لجنة.

هذه التجربة هي تجربة فوق هندسية لتوفر الشروط التالية:

- محولات متكررة وغير مستقلة (نتيجة كل محاولة تؤثر وتتأثر بنتائج المحاولات السابقة أو اللاحقة لها).
- للتجربة نتيجتين هما النجاح أو الفشل.
- احتمال النجاح غير ثابت من محاولة لأخرى.

المثال الثاني: طلبية مكونة من 11 جهازا من بينها 4 أجهزة بها عطب، فإذا تم اختيار 4 أجهزة عشوائيا من طرف زبون لفحصها فهذه التجربة هي تجربة فوق هندسية لتوفر الشروط التالية:

- محولات متكررة وغير مستقلة.
- للتجربة نتيجتين هما النجاح أو الفشل.
- احتمال النجاح غير ثابت من محاولة لأخرى.

1. دالة الكثافة الاحتمالية:

تعرف دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع فوق الهندسي وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$p(X = x) = \begin{cases} \dfrac{C_{N_1}^{x} C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n} & x = \mathbf{0}, 2,3, \dots, n \\ 0 & \text{ما عدا ذلك} \end{cases}$$

حيث:

N: عدد عناصر المجتمع.

N_1: عدد عناصر المجتمع التي تحقق الخاصية المرغوبة.

n: حجم العينة؛ أي عدد العناصر المسحوبة دون ارجاع.

ويمكن التأكد من أن دالة الاحتمالية للتوزيع فوق الهندسي هي دالة كثافة احتمالية كما هو مبين من خلال ما يلي:

$$\forall\, x \;/\; x \in \aleph \quad : \quad f(x) \geq 0$$

$$\sum_{x=0}^{n} p(X=x) = \sum_{x=0}^{n} \frac{C_{N_1}^{x} C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$$

$$= \frac{1}{C_N^n} \sum_{x=0}^{n} C_{N_1}^{x}\, C_{N_2}^{n-x}$$

$$= \frac{1}{C_N^n} C_N^n = 1$$

2. المميزات العددية:

يمكن توضيح المميزات العددية للتوزيع الهندسي من خلال مايلي:

1.2. التوقع الرياضي:

يمكن ايجاد التوقع الرياضي كما هو مبين من خلال ما يلي:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x p(X=x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \frac{C_{N_1}^{x} C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$$

$$= \frac{1}{C_N^n} \sum_{x=0}^{n} x \frac{N\,!}{x!\,(N-x)!} C_{N_2}^{n-x}$$

$$= \frac{1}{C_N^n} \sum_{x=0}^{n} \frac{N\,!}{(x-1)!\,(N-x)!} C_{N_2}^{n-x}$$

$$= \frac{N_1}{C_N^n} \sum_{x=0}^{n} C_{N_1-1}^{x-1}\, C_{N_2}^{n-x}$$

$$= \frac{N_1}{C_N^n} C_{N-1}^{n-1}$$

$$= \frac{N_1}{\frac{n}{N} C_{N-1}^{n-1}} C_{N-1}^{n-1}$$

$$= n \frac{N_1}{N}$$

$$E(X) = np$$

2.2. التباين:

يعرف التباين وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X)$$

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{C_{N_1}^{x} C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{C_{N_1}^{x} C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$$

$$= \frac{N_1(N_1-1)}{C_N^n} \sum_{x=2}^{n} C_{N_1-2}^{x-2} C_{N_2}^{n-x}$$

$$= \frac{N_1(N_1-1)}{C_N^n} C_{N-2}^{n-2}$$

$$= \frac{N_1(N_1-1)n(n-1)}{N(N-1)}$$

$$V(X) = \frac{N_1(N_1-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{nN_1}{N} - \frac{n^2 N_1^2}{N^2}$$

$$= \frac{nN_1(N-N_1)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

$$= \frac{(N-n)}{(N-1)} \quad (n)\left(\frac{N_1}{N}\right)\left(1 - \frac{N_1}{N}\right)$$

$$V(X) = npq \frac{(N-n)}{(N-1)}$$

مثال:

قسم به 20 طالبا من الجنسين ذكور وإناث منهم 8 طلبة ذكور والباقي طالبات، أرادت الإدارة تكوين عينة

من 3 طلبة مكونة بذلك لجنة لتمثيل هذا القسم، فإذا كان المتغير العشوائي يمثل عدد الطلبة الذكور في هذه اللجنة:

- أوجد دالة التوزيع الخاصة بهذا المتغير.
- أوجد احتمال أن يكون في اللجنة طالبين من جنس ذكر.