الإحصاء و الإحتمالات

الجزء II: الإحتمالات (Probability)

الفصل 1: التحليل التوفيقي (Combinatorial Analysis)

يتضمن التحليل التوفيقي مجموعة من الأساليب و الطرق التي تجعل من الممكن تحديد جميع النتائج المحتملة للتجربة أو عدد العناصر في مجموعة معينة. وتتمثل طرق العد في الإحتمالات أساسا في التبديلة، الترتيبة و التوفيقة. وقبل التطرّق لطرق العد في الإحتمالات سنقدم لمحة موجزة عن أسس التحليل التوفيقي.

1.1.II: أسس التحليل التوفيقي (Foundations of combinatorial analysis)

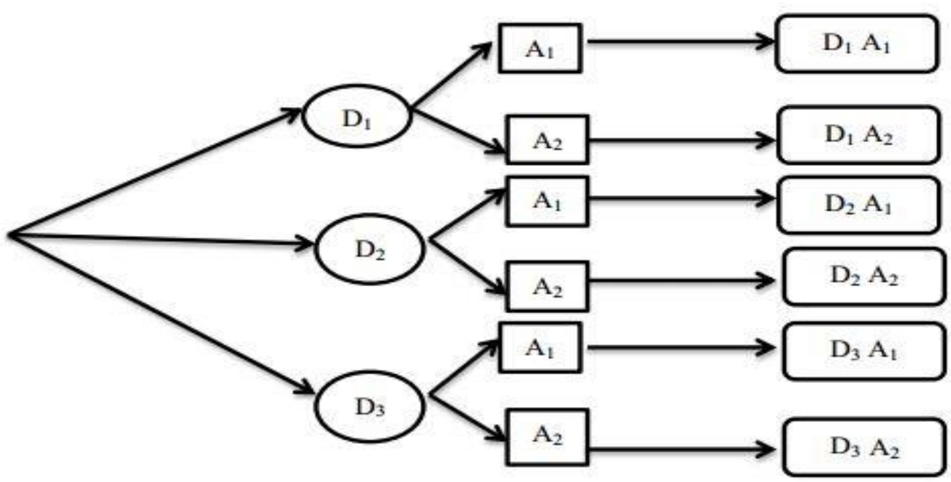
لتكن A_1 و A_2 مجموعتين عدد عناصرهما على الترتيب n_1 و n_2، إذا أردنا تشكيل زوج يحتوي على عنصر من A_1 و عنصر من A_2 فإن عدد الأزواج الممكن تشكيلها هو $n_1 \times n_2$.

بشكل عام إذا كانت لدينا k مجموعة: $A_1; A_2; \dots ;\ A_k$، عدد عناصرها على الترتيب: $n_1; n_2; \dots ; n_k$ ونريد تشكيل المجموعة التالية $\{x_1; x_1; \dots ; x_k\}$ بحيث: $x_1 \in A_1; x_2 \in A_2; \dots ; x_k \in A_k$ ففي هذه الحالة فإن عدد الطرق التي نستطيع بها تشكيل المجموعة السابقة (عدد المجموعات التي يمكن تشكيلها) هو: $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$.

في حالة المجموعات المشكّلة صغيرة يمكن اللجوء إلى طريقة **الشجرة البيانية** من أجل تحديد عدد المجموعات التي يمكن تشكيلها.

مثال 01: من أجل تشكيل لجنة تتكون من شخصين رئيس ونائب له، تقدم ثلاث اشخاص (D_1, D_2, D_3) من أجل الحصول على منصب رئيس لجنة، كما تقدم شخصين (A_1, A_2) من أجل الحصول على منصب نائب.

_ ماهو عدد اللّجان الممكن تشكيلها؟



الحل: من خلال الشجرة البيانية نلاحظ أنه يمكن تشكيل 6 لجان ويوافق **جميع الحالات الممكنة**، وبالتالي فضاء هذه العينة هو:

$$\Omega = \{(D_1, A_1); (D_1, A_2); (D_2, A_1); (D_2, A_2); (D_3, A_1); (D_3, A_2)\}$$

كما يمكن حساب عدد الحالات الممكنة مباشرة من العلاقة السابقة حيث: $n_1 = 3$ و $n_2 = 2$ وبالتالي:

$$n_1 \times n_2 = 3 \times 2 = 6$$

2.1.II: التبديلة (Permutations)

لتكن المجموعة E تحتوي على n عنصر، نريد إعادة تشكيل هذه المجموعة من خلال التبديل بين عناصرها وبالتالي نحصل على عدد محدد من المجموعات المعاد تشكيلها وتسمى هذه العملية **بالتبديلة**. هناك نوعين من التبديلات:

أ_ تبديلات بدون تكرار العناصر:

لتكن المجموعة E تحتوي على n عنصر **مختلف** (تبديلة بدون تكرار)، إذا أردنا إعادة تشكيل هذه المجموعة من خلال التبديل بين عناصرها فإن عدد الطرق الممكنة لذلك هو: $P_n = n!$.

مثال 02: بكم طريقة يمكن ترتيب ثلاث كتب مختلفة؟

الحل: $P_3 = 3! = 6$

يمكن ترتيب الكتب بـ 6 طرق.

مثال 03: بكم طريقة يمكن لـ 9 طلبة الجلوس على 9 كراسي في شكل خط مستقيم؟

الحل: $P_9 = 9! = 362880$

يمكنهم الجلوس بـ: 362880 طريقة.

حالة خاصة: في حالة الجلوس على طويلة مستديرة فإن عدد الطرق هو: $P_{n-1} = (n-1)!$.

$$P_{9-1} = (9-1)! = 40320$$

يمكنهم الجلوس بـ: 40320 طريقة.

ب_ تبديلات مع تكرار العناصر:

لتكن المجموعة E تحتوي على n عنصر حيث يوجد من ضمن عناصر المجموعة E عناصر **متشابهة** (تبديلة مع تكرار)، إذا أردنا إعادة تشكيل هذه المجموعة من خلال التبديل بين عناصرها فإن عدد الطرق الممكنة هو: $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$.

مثال 04: بكم طريقة يمكن إعادة تشكيل كلمة Probability من خلال التبديل بين أحرفها واستعمالها جميعا (لايهم المعنى)؟

الحل: لدينا n=11 ، نلاحظ أن الحرف b تكرر مرتين n_1=2 وكذلك الحرف i تكرر مرتين n_2=2، إذن نحن أمام تبديلة مع التكرار وبالتالي فإن عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها هو: $P_{11}^{2,2} = \frac{11!}{2!\times 2!}$=99799200

3.1.II: الترتيبة (arrangement)

لتكن المجموعة E تحتوي على n عنصر، نريد تشكيل مجموعة جزئية حجمها k حيث $n \geq \mathrm{k} \geq 0$ مع أنّ عامل **الترتيب** يؤثر على شكل المجموعة الجزئية المشكلة وبالتالي نحصل على عدد محدد من المجموعات المعاد تشكيلها وتسمى هذه العملية **بالترتيبة**. هناك نوعين من الترتيبات:

أـ ترتيبة بدون تكرار العناصر (السحب بدون إرجاع):

في هذه الحالة تتم عملية سحب المجموعة الجزئية دون إعادة العناصر المسحوبة أي لن تظهر العناصر المسحوبة سابقا في عملية السحب الموالية (**لا تتكرر**) خلال تشكيل المجموعة الجزئية الواحدة، وعدد المجموعات الجزئية التي يمكن تشكيلها هو A_{n}^{k} حيث:

$$A_{\mathrm{n}}^{k} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال 05:

بكم طريقة يمكن تشكيل عدد مكون من ثلاث أرقام تنتمي إلى مجموعة الأرقام التالية : $\{1,2,3,4\}$، مع استعمال الرقم مرة واحدة فقط.

الحل: عدد الطرق الممكنة هو: $A_{\mathrm{n}}^{k} = A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$

ب_ ترتيبة مع تكرار العناصر (السحب مع الإرجاع):

في هذه الحالة تتم عملية سحب المجموعة الجزئية مع إعادة العناصر المسحوبة أي أن العناصر المسحوبة سابقا يمكن أن تظهر في عملية السحب الموالية (**تتكرر**) خلال تشكيل المجموعة الجزئية الواحدة، وعدد المجموعات الجزئية التي يمكن تشكيلها هو $\breve{A}_{\mathrm{n}}^{k}$ حيث:

$$\breve{A}_{\mathrm{n}}^{k} = n \times n \times n \times \dots \times n = n^k$$

مثال 06:

تريد إحدى شركات الإتصالات في الجزائر تشكيل خطوط هاتفية جديدة، مع العلم أن الخط الهاتفي يتشكل من 10 أرقام

1_ماهو عدد الخطوط الممكن تشكيلها نظريا؟ 2_ إذاكانت هذه الشركة هي شركة موبليس، فماهو عدد الخطوط الممكن تشكيلها؟

الحل: نحن أمام ترتيبة مع تكرار حيث $n = 10$ (0 ,1,2,3,...,9) و k=10 :

1_ عدد الخطوط الممكن تشكيلها نظريا هو: $\breve{A}_{\mathrm{n}}^{k} = \breve{A}_{10}^{10} = 10^{10} = 10000000000$

2_ إذاكانت هذه الشركة هي شركة موبليس معناه بداية الرقم تكون بـ: 06 أي أن الرقم الأول والثاني ثابتين وبالتالي عدد الخطوط الممكن تشكيلها هو: $1 \times 1 \times \breve{A}_{10}^{8} = 10^{8} =$100000000

4.1.II: التوفيقة (Combinaisons)

لتكن E مجموعة تحتوي على n عنصرا و m عدد طبيعي حيث $n \geq k \geq 0$، نسمي كل جزء مسحوب من E ذي k عنصرا مع أنّ عامل **الترتيب لايؤثر** على شكل المجموعة الجزئية المشكلة **بالتوفيقة** ذات k عنصرا من المجموعة E . ونميز نوعين من التوفيقات:

أ_ توفيقة بدون إعادة العناصر (**السحب بدون إرجاع**):

في هذه الحالة تتم عملية سحب المجموعة الجزئية دفعة واحدة أو سحب دون إعادة العنصر أي لن تظهر العناصر المسحوبة سابقا في عملية السحب الموالية (**لا تتكرر**) خلال تشكيل **المجموعة الجزئية الواحدة**، وعدد المجموعات الجزئية التي يمكن سحبها هو C_{n}^{k} حيث:

$$C_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{A}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!} = \frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{k}!\,(\mathrm{n}-\mathrm{k})!}$$

مثال 07:

يحتوي صندوق على 9 كريات متماثلة، منها 3 بيضاء، 2 صفراء و 4 حمراء، نقوم بسحب ثلاث كريات معا (سحب ثلاث كريات دون إرجاع).

ماهو عدد الطرق الممكنة لسحب: _ 3كريات؟ _ 3 كريات حمراء؟ _ كريتين بيضاء و 1حمراء؟ _ 3 كريات من ألوان مختلفة؟

الحل:

_ عدد الطرق الممكنة لسحب 3 كريات هو: $C_{9}^{3} = \frac{\mathrm{A}_{9}^{3}}{3!} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = 84$

_ عدد الطرق الممكنة لسحب 3 كريات حمراء هو: $C_{4}^{3} = \frac{\mathrm{A}_{4}^{3}}{3!} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$

_ عدد الطرق الممكنة لسحب كريتين بيضاء و 1 حمراء هو: $C_{3}^{2} \times C_{4}^{1} = \frac{\mathrm{A}_{3}^{2}}{2!} \times \frac{\mathrm{A}_{4}^{1}}{1!} = \frac{3!}{2!(3-2)!} \times \frac{4!}{1!(4-1)!} = 12$

_ عدد الطرق الممكنة لسحب 3 كريات من ألوان مختلفة هو: $C_{3}^{1} \times C_{2}^{1} \times C_{4}^{1} = 3 \times 2 \times 4 = 24$

ب_ توفيقة مع إعادة العناصر (السحب مع الإرجاع):

في هذه الحالة يتم سحب عناصر المجموعة الجزئية بالإرجاع أي أنه من المحتمل ظهور العناصر المسحوبة سابقا في عملية السحب الموالية (**تتكرر**) خلال تشكيل **المجموعة الجزئية الواحدة**، وعدد المجموعات الجزئية التي يمكن تشكيلها في هذه الحالة هو $\check{C}^{k}_{n+k-1}$ حيث:

$$\check{C}^{k}_{n+k-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

مثال 07:

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة ذات ألوان مختلفة، نقوم بسحب ثلاث كريات من الصندوق مع العلم أن طريقة السحب بالإرجاع.

ماهو عدد الطرق الممكنة لسحب: _ 3كريات؟ _ 5كريات؟

الحل:

_ عدد الطرق الممكنة لسحب 3 كريات هو: $\check{C}^{3}_{10+3-1} = \frac{(10+3-1)!}{3!(10-1)!} = \frac{(12)!}{3!(9)!} = 220$

_ عدد الطرق الممكنة لسحب 5 كريات هو: $\check{C}^{5}_{10+5-1} = \frac{(10+5-1)!}{5!(10-1)!} = \frac{(14)!}{5!(9)!} = 2002$

ملاحظة: بعض خواص C^{n}_{n} :

1_ $C^{0}_{n} = 1$ ،$C^{1}_{n} = n$ ،$C^{n}_{n} = 1$

2_ $C^{m}_{n} = C^{n-m}_{n}$

3_ $C^{m}_{n} = C^{m}_{n-1} + C^{m-1}_{n-1}$

ملخص درس التحليل التوفيقي في شكل مخطط.