# Gestion des stocks

**A. Bazeniar**

**Enseignant chercheur**
**Centre universitaire Abdelhafid Boussouf**
**Mila, Algérie**

Se reporter à des manuels de base et à certaines livres de spécialités

Septembre 2024

# Chapitre 2

# Modèles déterministe

## Introduction

Les modèles déterministes dans la gestion des stocks sont des modèles où la demande et d'autres variables clés (comme le délai de livraison) sont connues avec certitude. Contrairement aux modèles stochastiques, qui prennent en compte l'incertitude et les probabilités, les modèles déterministes supposent que les paramètres comme la demande et les coûts sont constants et parfaitement prévisibles sur la période considérée. Ces modèles sont souvent utilisés pour simplifier l'analyse et l'optimisation des systèmes de gestion des stocks lorsque l'environnement est stable.

Les modèles déterministes partagent un ensemble d'hypothèses simplificatrices :

1. Demande constante et connue : La demande est supposée constante dans le temps, ce qui signifie qu'il n'y a pas de variabilité ni de fluctuations imprévues.
2. Coûts constants : Les coûts de commande, de possession et de pénurie (s'ils existent) sont tous constants et connus.
3. Pas de fluctuations dans le délai de livraison : Le délai de réapprovisionnement est fixe et connu.
4. Pas de dépréciation : Les articles en stock ne périssent pas et ne subissent pas de perte de valeur.
5. Pas d'incertitude : Aucun paramètre du modèle n'est soumis à des variations imprévisibles, comme les retards de livraison ou les variations de coût.

## 2.1 Modèle de Wilson (EOQ)

Le modèle de Wilson, également connu sous le nom de modèle de la quantité économique de commande (EOQ, pour *Economic Order Quantity*), aide à déterminer la quantité optimale de commande qui minimise le coût total de gestion des stocks. Il a été introduit au début du 20ème siècle.

### 2.1.1 Hypothèses du Modèle EOQ

1. **Demande constante** : La demande $D$ (en unités par an) est constante tout au long de la période.
2. **Coût de commande fixe** : Chaque fois que l'on passe une commande, il y a un coût fixe $S$ (en unités par commande).
3. **Coût de stockage proportionnel** : Le coût de stockage est proportionnel au nombre d'unités détenues en stock, à un taux $H$ (en unités par unité par an).
4. **Les réapprovisionnements sont instantanés** : Les commandes arrivent immédiatement une fois passées.
5. **Aucun stock de sécurité** n'est pris en compte.

**Objectif :** L'objectif est de déterminer la **quantité optimale de commande** $Q^*$ qui minimise le **coût total annuel de gestion des stocks**. Ce coût total est la somme du coût de commande et du coût de stockage.

#### 2.1.1.1 Coût de commande

Le nombre de commandes passées par an est donné par $\frac{D}{Q}$, où $D$ est la demande annuelle et $Q$ est la quantité commandée à chaque fois. Le coût total de commande est donc :

$$\text{Coût de commande} = \frac{S \times D}{Q}.$$

#### 2.1.1.2 Coût de stockage

Le coût de stockage est proportionnel à la quantité moyenne détenue en stock. Comme la quantité de stock varie de $Q$ (lorsqu'une nouvelle commande arrive) à $0$ (juste avant la commande suivante), la quantité moyenne en stock est $\frac{Q}{2}$. Le coût de stockage annuel est donc :

$$\text{Coût de stockage} = \frac{H \times Q}{2}.$$

#### 2.1.1.3 Coût total annuel

Le **coût total annuel** est la somme du coût de commande et du coût de stockage :

$$C(Q) = \frac{S \times D}{Q} + \frac{H \times Q}{2}.$$

#### 2.1.1.4 Ajustement des Quantités

Pour respecter la contrainte d'investissement, nous devons ajuster proportionnellement les quantités $Q_i^*$. Le facteur de réduction est donné par :

$$\text{facteur} = \frac{I_{\text{total autorisé}}}{I_{\text{total actuel}}}.$$

#### 2.1.1.5 Minimisation du coût total

Pour minimiser le coût total, il suffit de dériver cette fonction $C(Q)$ par rapport à $Q$, et d'égaler la dérivée à zéro pour trouver la quantité optimale $Q^*$.

1. Dérivons $C(Q)$ par rapport à $Q$ :

$$\frac{dC(Q)}{dQ} = -\frac{S \times D}{Q^2} + \frac{H}{2}.$$

2. Posons cette dérivée égale à zéro pour trouver le minimum :

$$-\frac{S \times D}{Q^2} + \frac{H}{2} = 0.$$

3. Résolvons pour $Q$ :

$$\frac{S \times D}{Q^2} = \frac{H}{2}.$$

4. En prenant la racine carrée des deux côtés :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times S \times D}{H}}.$$

La formule $Q^* = \sqrt{\frac{2\times S\times D}{H}}$ donne la **quantité optimale de commande** qui minimise le coût total de gestion des stocks. Elle résulte d'un compromis entre le coût de commande (qui diminue avec une augmentation de $Q$) et le coût de stockage (qui augmente avec $Q$).

#### 2.1.1.6 Exemple : Application du modèle EOQ

Une entreprise utilise 10 000 unités d'un produit par an. Chaque commande coûte 50 Dinars à traiter, et le coût de stockage est de 2 Dinars par unité par an. Quelle est la quantité optimale de commande (EOQ) et quel sera le coût total minimum associé à cette quantité optimale de commande ?

**Données :**

— $D = 10000$ unités par an (demande annuelle)
— $S = 50$ Dinars par commande (coût fixe de commande)

— $H = 2$ Dinars par unité par an (coût de stockage)

**Étape 1 : Calcul de la quantité optimale de commande** $Q^*$

La formule pour la quantité optimale de commande est donnée par :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times S \times D}{H}}.$$

Substituons les valeurs :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 50 \times 10000}{2}} = \sqrt{\frac{1000000}{2}} = \sqrt{500000} \approx 707.11$$

Ainsi, la quantité optimale de commande est $Q^* \approx 707$ unités.

**Étape 2 : Calcul du coût total minimum** $C(Q^*)$

Le coût total minimal est donné par la formule :

$$C(Q^*) = \frac{S \times D}{Q^*} + \frac{H \times Q^*}{2}$$

Substituons les valeurs pour calculer chaque composante du coût total :
1. **Coût de commande** :

$$\frac{S \times D}{Q^*} = \frac{50 \times 10000}{707} \approx 707.11 \text{ Dinars par an}$$

2. **Coût de stockage** :

$$\frac{H \times Q^*}{2} = \frac{2 \times 707}{2} = 707 \text{ Dinars par an}$$

Le coût total minimum est donc :

$$C(Q^*) \approx 707.11 + 707 = 1414.11 \text{ Dinars par an}$$

Cet exemple illustre comment le modèle EOQ permet de minimiser les coûts de gestion des stocks en optimisant la quantité commandée à chaque fois.

#### 2.1.1.7 Avantages et Limites du Modèle de Wilson

**Avantages**

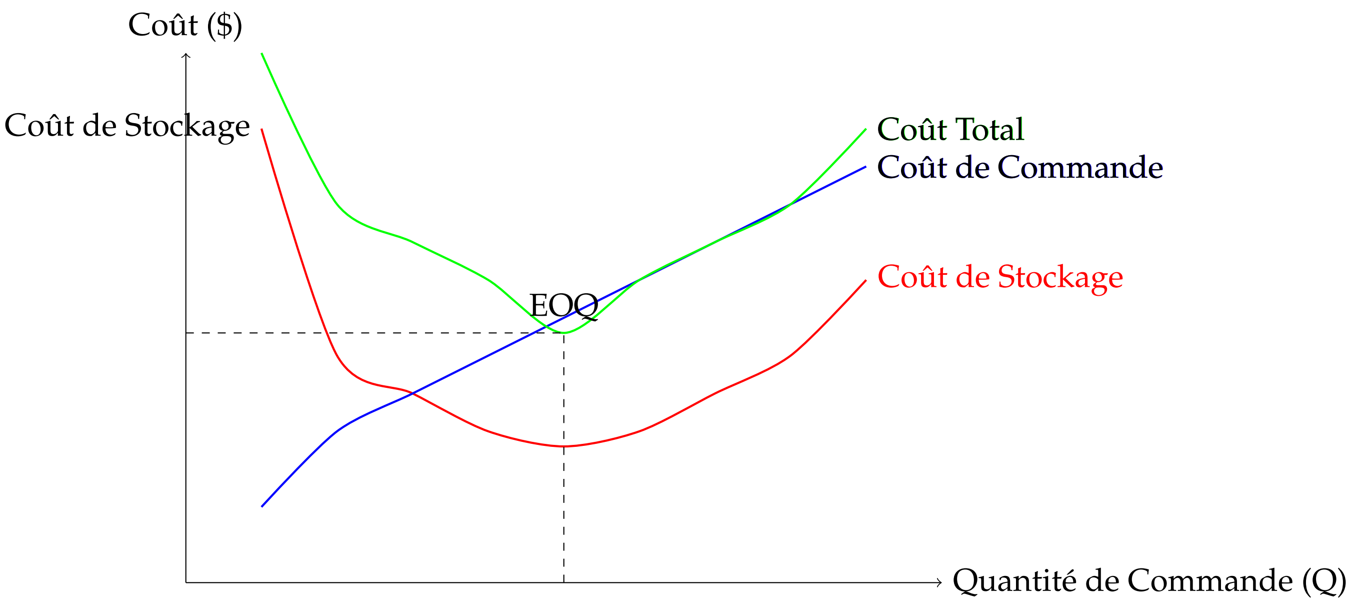
— Simplicité : Facile à comprendre et à appliquer.
— Utilisation généralisée : Applicable à de nombreux types de produits et industries.

**Limites**

- Hypothèses restrictives : La demande constante, les coûts constants et l'absence de pénurie ne sont pas toujours réalistes.
- Ignorance des remises sur quantité : Le modèle ne prend pas en compte les remises offertes pour les achats en grande quantité.
- Pas de variation de la demande : Ne s'adapte pas bien aux situations où la demande est variable ou incertaine.

#### 2.1.1.8 Représentation graphique du modèle de Wilson

Le modèle de Wilson permet de déterminer la quantité optimale de commande (EOQ) qui minimise le coût total annuel de gestion des stocks. La représentation graphique ci-dessous montre les différents coûts associés et la quantité de commande optimale.




- **Coût de Stockage** : Le coût de stockage augmente avec la quantité de commande, car plus de stock doit être maintenu.
- **Coût de Commande** : Le coût de commande diminue avec l'augmentation de la quantité de commande, car moins de commandes sont nécessaires.
- **Coût Total** : La somme des coûts de stockage et de commande. Le point où le coût total est minimal est la Quantité Économique de Commande (EOQ).

## 2.2 Modèle EOQ pour Plusieurs objets avec contraintes sur l'investissement total en stock

Le modèle EOQ classique peut être étendu à plusieurs produits avec une contrainte sur l'investissement total en stock. Dans ce cas, nous cherchons à minimiser le coût total de commande et de stockage pour plusieurs articles tout en respectant une contrainte budgétaire sur l'investissement global en stock.

### 2.2.1 Paramètres du modèle

— $D_i$ : Demande annuelle du produit $i$ (en unités par an).
— $S_i$ : Coût fixe de commande du produit $i$ (en Dinars par commande).
— $H_i$ : Coût de stockage par unité et par an du produit $i$ (en Dinars par unité).
— $C_i$ : Coût unitaire d'achat du produit $i$ (en Dinars par unité).
— $Q_i$ : Quantité commandée pour le produit $i$.
— $I_{total}$ : Investissement total autorisé (en Dinars).
— $n$ : Nombre total de produits.

### 2.2.2 Formulation du coût total pour chaque produit

Le coût total pour le produit $i$ comprend deux composantes :
— **Coût de commande** : $\frac{S_i \times D_i}{Q_i}$.
— **Coût de stockage** : $\frac{H_i \times C_i \times Q_i}{2}$.
Le coût total pour tous les produits est donné par :

$$C(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{S_i \times D_i}{Q_i} + \frac{H_i \times C_i \times Q_i}{2} \right)$$

### 2.2.3 Contrainte d'investissement total

L'investissement total en stock est donné par :

$$I_{total} = \sum_{i=1}^{n} C_i \times \frac{Q_i}{2}$$

Et doit respecter la contrainte :

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \times \frac{Q_i}{2} \leq I_{total}$$

### 2.2.4 Modèle Mathématique

Nous cherchons à minimiser le coût total $C(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ sous la contrainte d'investissement total :

$$\min_{Q_1,Q_2,\ldots,Q_n} \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{S_i \times D_i}{Q_i} + \frac{H_i \times C_i \times Q_i}{2} \right)$$

Sous la contrainte :

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \times \frac{Q_i}{2} \leq I_{total}$$

### 2.2.5 Exemple pratique

Supposons que nous ayons trois produits avec les paramètres suivants :

- Produit 1 : $D_1 = 1000$, $C_1 = 10$, $S_1 = 2$, $H_1 = 0,2$
- Produit 2 : $D_2 = 800$, $C_2 = 15$, $S_2 = 3$, $H_2 = 0,3$
- Produit 3 : $D_3 = 600$, $C_3 = 20$, $S_3 = 4$, $H_3 = 0,4$
- Investissement total autorisé : $I_{total} = 5000$

Le modèle devient alors :

$$\min_{Q_1,Q_2,Q_3} \left( \frac{S_1 \times D_1}{Q_1} + \frac{H_1 \times C_1 \times Q_1}{2} + \frac{S_2 \times D_2}{Q_2} + \frac{H_2 \times C_2 \times Q_2}{2} + \frac{S_3 \times D_3}{Q_3} + \frac{H_3 \times C_3 \times Q_3}{2} \right)$$

Sous la contrainte :

$$C_1 \times \frac{Q_1}{2} + C_2 \times \frac{Q_2}{2} + C_3 \times \frac{Q_3}{2} \leq 5000$$

## 2.3 Modèle EOQ pour plusieurs objets avec contrainte sur la capacité de stockage

Le Modèle de Wilson ou modèle de quantité économique de commande (EOQ) est généralement utilisé pour optimiser le niveau de commande d'un seul produit. Cependant, lorsqu'il s'agit de plusieurs objets avec des contraintes sur la capacité de stockage, il est nécessaire d'adapter le modèle pour gérer ces complexités.

Voici les hypothèses et les contraintes typiques de ce modèle :

- **Demande constante** : Chaque produit a une demande connue et constante sur une période donnée.
- **Coûts constants** : Les coûts de commande et de possession sont constants pour chaque produit.
- **Capacité de stockage limitée** : Il existe une capacité de stockage maximale qui doit être respectée pour l'ensemble des produits.
- **Indépendance des produits** : La demande et les coûts des produits sont considérés comme indépendants les uns des autres, bien que la capacité de stockage soit partagée.

### 2.3.1 Notations :

Soit $n$ le nombre d'objets.

— $D_i$ : Demande annuelle pour le produit $i$ (en unités).
— $S_i$ : Coût de passation d'une commande pour le produit $i$.
— $H_i$ : Coût de possession par unité pour le produit $i$.
— $Q_i$ : Quantité à commander pour le produit $i$.
— $C$ : Capacité de stockage totale disponible (en unités).

### 2.3.2 Coût total :

Le coût total $C_{\text{total}}$ pour le modèle multi-produit avec la quantité économique de commande est donné par la somme des coûts de commande et de possession pour chaque produit :

$$C_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{D_i}{Q_i} S_i + \frac{Q_i}{2} H_i \right)$$

### 2.3.3 Capacité de stockage :

La contrainte sur la capacité de stockage doit être respectée, ce qui signifie que la somme des quantités à stocker pour chaque produit ne doit pas dépasser la capacité totale :

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \leq C$$

### 2.3.4 Quantité économique de commande :

Pour chaque produit $i$, la quantité économique de commande est donnée par :

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2 D_i S_i}{H_i}}$$

### 2.3.5 Approche de Résolution

La résolution du modèle nécessite souvent une méthode d'optimisation qui peut être effectuée par :

#### 2.3.5.1 Méthode de Lagrange

Utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour optimiser le coût total sous la contrainte de capacité de stockage.

L'objectif devient alors :

$$L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{D_i}{Q_i} S_i + \frac{Q_i}{2} H_i \right) + \lambda \left( C - \sum_{i=1}^{n} Q_i \right)$$

où $\lambda$ est le multiplicateur de Lagrange.

#### 2.3.5.2 Programmation linéaire

Formuler le problème sous forme de programmation linéaire où l'objectif est de minimiser le coût total tout en respectant les contraintes de capacité.

#### 2.3.5.3 Heuristiques ou Méthodes de simulation

Dans des cas où la solution analytique devient trop complexe, des méthodes heuristiques ou de simulation peuvent être appliquées.

## 2.4 Modèle de gestion à point de commande

Le modèle de gestion à point de commande est une approche de gestion des stocks où une nouvelle commande est passée lorsqu'un niveau de stock prédéterminé, appelé le **point de commande** (ou seuil de commande), est atteint. Ce modèle est couramment utilisé dans les systèmes à demande continue, où les articles sont consommés à un rythme constant ou aléatoire.

### Notations :

— $D$ : Demande annuelle.
— $d$ : Demande moyenne par jour.
— $L$ : Délai de livraison (nombre de jours).
— $SS$ : Stock de sécurité (Safety Stock).
— $Q$ : Quantité de commande (ou EOQ si on utilise le modèle économique de commande).
— $R$ : Point de commande (Reorder point).

### 2.4.1 Principe du modèle :

Dans un modèle à point de commande, l'entreprise suit son stock de manière continue. Une commande est déclenchée lorsqu'on atteint le niveau du **point de commande** $R$. Ce niveau de stock est déterminé pour s'assurer qu'il y a suffisamment de stock pour couvrir la demande pendant le **délai de livraison** $L$, tout en tenant compte des incertitudes via un **stock de sécurité** $SS$.

Le point de commande est calculé à l'aide de la formule suivante :

$$R = d \times L + SS.$$

### 2.4.2 Demande pendant le délai de livraison :

La demande moyenne par jour $d$ est calculée comme :

$$d = \frac{D}{N}.$$

La demande pendant le délai de livraison est donc :

$$d \times L = \frac{D}{N} \times L$$

Cela représente la quantité de stock nécessaire pendant la période de livraison, sans tenir compte des incertitudes.

### 2.4.3 Exemple simple sans stock de sécurité :

Si la demande annuelle $D$ est de 12 000 unités, le délai de livraison $L$ est de 10 jours, et on suppose que l'année a 360 jours, la demande quotidienne moyenne $d$ serait :

$$d = \frac{12\,000}{360} = 33,33 \text{ unités/jour}$$

Le **point de commande** sans stock de sécurité serait :

$$R = 33,33 \times 10 = 333,3 \text{ unités}$$

Cela signifie qu'une commande serait passée lorsque le niveau de stock atteint 333 unités, car cela correspond à la demande attendue pendant les 10 jours de délai de livraison.

### 2.4.4 Exemple avec stock de sécurité :

Supposons qu'il y ait des fluctuations dans la demande quotidienne avec un écart-type $\sigma_d$ de 5 unités/jour, et que l'entreprise souhaite un niveau de service de 95 % (ce qui correspond à un facteur de sécurité $Z = 1,645$).

Le stock de sécurité est calculé comme :

$$SS = Z \times \sigma_d \times \sqrt{L}.$$

où $\sqrt{L}$ prend en compte la variation pendant le délai de livraison.

Ainsi, pour un délai de livraison de $L = 10$ jours :

$$SS = 1,645 \times 5 \times \sqrt{10} = 1,645 \times 5 \times 3,162 = 25,99 \text{ unités}$$

Le **point de commande** final devient alors :

$$R = d \times L + SS = 333,3 + 25,99 = 359,29 \text{ unités}$$

### 2.4.5 Optimisation : Couplage avec l'EOQ

Le **modèle à point de commande** peut être combiné avec le **modèle de quantité économique de commande** (EOQ) pour minimiser les coûts totaux liés à la gestion des stocks. Dans ce cas, la quantité de commande optimale $Q$ est donnée par la formule de l'EOQ :

$$EOQ = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

où :
- $S$ est le **coût de passation d'une commande**.
- $H$ est le **coût de possession d'une unité de stock par an**.

### 2.4.6 Coûts totaux :

Dans ce modèle, le coût total annuel $C_{\text{total}}$ est la somme des coûts de commande $C_{\text{commande}}$ et des coûts de possession $C_{\text{possession}}$, calculés respectivement comme suit :
- **Coût de commande** :
$$C_{\text{commande}} = \frac{D}{EOQ} \times S$$
- **Coût de possession** :
$$C_{\text{possession}} = \frac{EOQ}{2} \times H + SS \times H$$

  où :
  - $\frac{EOQ}{2}$ représente le stock moyen détenu.
  - $SS \times H$ est le coût de possession lié au stock de sécurité.

## 2.5 Modèle de production en flux (ou Modèle de Wilson-Whitin)

Le **modèle de production en flux** (ou **modèle de Wilson-Whitin**) est un modèle déterministe de gestion des stocks utilisé pour les entreprises qui produisent en flux continu et cherchent à minimiser les coûts liés à la production en lot. Ce modèle est utile pour les entreprises qui fabriquent des produits en lots tout en répondant à une demande continue.

### Hypothèses du modèle

1. La demande est constante et connue, à un taux de $d$ unités par période.

2. La production est réalisée à un taux constant $p$ supérieur à $d$ pour satisfaire la demande et reconstituer le stock.
3. Les coûts de production sont constants.
4. Les coûts de possession des stocks sont constants et proportionnels à la quantité en stock.
5. La production et la demande ont lieu simultanément lorsque la production est en cours.

### Objectif du modèle

Le modèle vise à déterminer la quantité optimale de production $Q$ (ou **lot de production optimal**) qui minimise le **coût total** d'un cycle de production, en équilibrant les coûts de mise en production et les coûts de possession des stocks.

## 2.5.1 Dérivation mathématique du lot de production optimal

### 2.5.1.1 Coût de mise en production

Si on suppose que chaque lancement de production entraîne un coût fixe $S$, et que l'on produit en moyenne $D/Q$ lots par an (où $D$ est la demande annuelle et $Q$ le lot de production), alors le **coût total annuel de mise en production** est :

$$\text{Coût de mise en production} = \frac{D}{Q} \cdot S.$$

### 2.5.1.2 Coût de possession des stocks

Contrairement au modèle EOQ, ici la production et la demande sont simultanées. Pendant le temps de production, le stock augmente jusqu'à atteindre un maximum lorsque le lot est complètement produit, puis il diminue progressivement jusqu'à zéro à la fin du cycle.

— Le **stock maximal** atteint est donné par :

$$Q_{\text{max}} = Q\left(1 - \frac{d}{p}\right),$$

où $\frac{d}{p}$ est la proportion de la demande par rapport à la capacité de production.

— Le **stock moyen** sur le cycle est alors :

$$\text{Stock moyen} = \frac{Q_{\text{max}}}{2} = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{d}{p}\right).$$

— En supposant un coût de possession des stocks $H$ par unité et par an, le **coût total annuel de possession des stocks** est alors :

$$\text{Coût de possession des stocks} = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{d}{p}\right) \cdot H.$$

#### 2.5.1.3 Coût Total du système

En combinant les coûts de mise en production et de possession, le **coût total annuel** du système est donné par :

$$\text{Coût total} = \frac{D}{Q} \cdot S + \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{d}{p}\right) \cdot H.$$

#### 2.5.1.4 Optimisation de la quantité de production $Q$

Pour minimiser le coût total, nous devons trouver la valeur de $Q$ qui minimise cette expression. Pour cela, on prend la dérivée du coût total par rapport à $Q$ et on la pose égale à zéro :

$$\frac{d}{dQ}\left(\frac{D}{Q} \cdot S + \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{d}{p}\right) \cdot H\right) = 0.$$

En développant et en simplifiant, on obtient :

$$-\frac{DS}{Q^2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d}{p}\right) H = 0.$$

En résolvant pour $Q$, nous trouvons le **lot de production optimal** :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H\left(1 - \frac{d}{p}\right)}}.$$

Ce modèle est efficace pour les environnements de production où le taux de production est supérieur au taux de demande et où la production en lots minimise les coûts sans entraîner de ruptures de stock.