Abdelhafid Boussouf University Center- Mila
Institute of Science and Technology
Module: Analysis 1

Academic Year: 2024/2025
First Year Engineering
Semester 1

Analysis I: Tutorial Exercise Sheet 2

Exercise 01:

For each of the following sequences, give the first five terms:

من أجل كل متتالية من المتتاليات الآتية، أعطي الحدود الخمسة الأولى:

$(a)\left\{\dfrac{2n-1}{3n+2}\right\}$ $\quad (b)\left\{\dfrac{1-(-1)^n}{n^3}\right\}$ $\quad (c)\left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\right\}$ $\quad (d)\left\{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right\}$

Exercise 02:

The general term of a sequence is $u_n=\frac{3n-1}{4n+5}$ where. (1) Give the terms of this sequence in decimal form where, $n=1$, $n=5$, $n=10$, $n=100$, $n=1000$ and $n=100000$. Make a guess of $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. (2) Using the definition of limit to verify the guess in the preceding question.

الحد العام لمتتالية هو $u_n=\frac{3n-1}{4n+5}$. (1) أعطي القيمة العددية للحدود العشرية لما $n=1$ ، $n=5$ ، $n=10$ ، $n=100$ ، $n=1000$ و $n=100000$. خمن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. (2) استعمل تعريف النهاية للتأكد من تخمين النهاية في السؤال السابق.

Exercise 03:

Using the definition of a sequence, show that:

باستعمال تعريف تعريف نهاية متتالية، برهن أن:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n-1}{2n+3}=\dfrac{3}{2}$ $\quad$ (2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n}=0$ $\quad$ (3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2\ln(1+n)}{\ln n}=0$

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n=+\infty$ $\quad$ (5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-5n^2-3}{4n}=-\infty$ $\quad$ (6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(\ln n)=+\infty$

Exercise 04:

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is an increasing sequence; (v_n) is the sequence defined for all $n\in\mathbb{N}^*$ by $v_n=\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$. Demonstrate that the sequence (v_n).

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة؛ (v_n) معرفة من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ بـ $v_n=\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$. برهن أن المتتالية (v_n) متزايدة.

Exercise 05:

1. Prove that if $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ exists, it is unique. (برهن أنه إذا كانت النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ موجودة فإنها وحيدة)
2. Prove that a convergent sequence is bounded. (برهن أن أي متتالية متقاربة تكون محدودة)
3. If $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=A$ and $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=B$, prove that $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=A+B$.

إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=A$ و $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=B$ ، برهن أن $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=A+B$.

4. If $\lim_{n\to\infty} u_n = A$ and $\lim_{n\to\infty} v_n = B$, prove that $\lim_{n\to\infty}(u_n \cdot v_n) = A \cdot B$.

إذا كان $\lim_{n\to\infty} u_n = A$ و $\lim_{n\to\infty} v_n = B \neq 0$ ، برهن أن $\lim_{n\to\infty}(u_n \cdot v_n) = A \cdot B$.

5. If $\lim_{n\to\infty} u_n = A$ and $\lim_{n\to\infty} v_n = B \neq 0$, prove that $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{B}$ and $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{A}{B}$.

إذا كان $\lim_{n\to\infty} u_n = A$ و $\lim_{n\to\infty} v_n = B \neq 0$ ، برهن أن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{B}$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{A}{B}$.

Exercise 06:

Using theorems on limits, find each of the following

باستعمال مبرهنات النهايات، أوجد كلا من مايلي:

$(a)\ \lim_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2-5n}{5n^2+2n-6}$ $\quad (b)\ \lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ $\quad (c)\ \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n}$

$(d)\ \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(2n^3-5)}{3n^3+2n^2+1}$ $\quad (e)\ \lim_{n\to+\infty} \dfrac{e^{2n}-e^n+1}{2e^n+3}$ $\quad (f)\ \lim_{n\to+\infty} n^a e^{-bn}$

Exercise 07:

1. Using the principle of bounding a sequence, demonstrate that the sequence $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges to a limit l, determining it in each case:

   باستعمال مبدأ حصر متتالية (مبرهنة المتتاليات الثلاث) ، بين أن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب نحو نهاية l ، عينها في كل حالة من الحالات التالية:

   $(a)\ U_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^5+k}$ $\quad (b)\ U_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^3+k}}$ $\quad (c)\ U_n = \dfrac{[n^{\frac{1}{3}}]}{n}$, where $n \in \mathbb{N}^*$ and $[.]$ denots the floor function

2. Let $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2+|\cos k|\sqrt{k}}$, demonstrate that $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

   ليكن $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2+|\cos k|\sqrt{k}}$ ، برهن أن $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

Exercise 08:

Consider the sequence $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defined by: $U_0 = 0,\ \ U_{n+1} = \sqrt{U_n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ $U_0 = 0,\ \ U_{n+1} = \sqrt{U_n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Show that $0 \le U_n < 2$ for all $n \in \mathbb{N}$. (بين أن $0 \le U_n < 2$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$)
2. Deduce the monotonicity of $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (استنتج رتابة $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$)
3. Consider the sequence $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defined by $V_n = 2 - U_n$ for all $n \in \mathbb{N}$.

   نعتبر المتتالية $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بـ $V_n = 2 - U_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Determine the sign of $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (عين إشارة $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$)

   (b) Prove that, for every natural number n, $\frac{V_{n+1}}{V_n} \le \frac{1}{2}$.

   برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\frac{V_{n+1}}{V_n} \le \frac{1}{2}$

(c) Using a proof by induction, demonstrate that $V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ for all $n \in \mathbb{N}^*$.
باستعمال البرهان بالتراجع، بين أن $V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) Deduce the limit of the sequence $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, and then the limit of $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
استنتج نهاية المتتالية $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، ثم نهاية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercise 09:

Consider the sequence $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, defined by:(نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، معرفة بـ)

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n e^{-U_n}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Show that $U_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

1. بين أنه $U_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Deduce the monotonicity of $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. استنتج رتابة $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Deduce that $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is convergent, then calculate its limit.

3. استنتج أن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة، ثم أحسب نهايتها.

4. Let $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$, demonstrate that $U_{n+1} = e^{-S_n}$ for all $n \in \mathbb{N}$.
4. ليكن $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ ، برهن أن $U_{n+1} = e^{-S_n}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

5. Conclude that as n approaches infinity, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
5. استخلص أنه لما n تقترب من اللانهاية، $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Exercise 10:

Consider the sequence $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defined by: (نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بـ)

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{7U_n+4}{3U_n+3}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Show that $0 \leq U_n \leq 2$ for all $n \in \mathbb{N}$.

1. بين أن $0 \leq U_n \leq 2$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

2. Study the monotonicity of (U_n) for $n \in \mathbb{N}$.

2. أدرس رتابة (U_n) من أجل $n \in \mathbb{N}$.

3. Deduce that (U_n) is convergent and calculate its limit.

3. استنتج أن (U_n) وأحسب نهايتها.

4. Let $E = \{U_n / n \in \mathbb{N}\}$; determine $\sup E$ and $\inf E$.
4. لتكن $E = \{U_n / n \in \mathbb{N}\}$ ؛ عين $\sup E$ و $\inf E$.

Exercise 11:

Two real sequences $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ and $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are defined as follows:

المتتاليتان حقيقيتان $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ، معرفتان كمايلي:

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n+2V_n}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} V_1 = 12 \\ V_{n+1} = \frac{U_n+3V_n}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Let $W_n = V_n - U_n$ for all $n \in \mathbb{N}^*$. Express the sequence $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ in terms of n and then calculate its limit.

1. لتكن $W_n = V_n - U_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$. عبر عن المتتالية $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ بدلالة $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Show that the sequences $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ and $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are adjacent.

2. بين أن المتتاليتان $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متجاورتان.

Exercise 12:

Using the Cauchy criterion, demonstrate that the sequence $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ is convergent and that the sequence $(V_n)_{n\in\mathbb{N},n\geq 2}$ is divergent.

باستعمال معيار كوشي، بين أن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة و أن المتتالية $(V_n)_{n\in\mathbb{N},n\geq 2}$ متباعدة.

1. $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k)}{2^k}$, for all $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $V_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln(k)}$, for all $n \geq 2$.