CHAPITRE 1

ANALYSE MATRICIELLE

Qu'est ce qu'une matrice

- Intersection de lignes et colonnes
- Structure de données
- Algèbre

$$A : \{1, .., \mathrm{n}\} \times \{1, .., \mathrm{m}\} \rightarrow \mathbb{K}$$
$$(i, j) \quad \rightarrow \; a_{ij}$$

- $1 \leq i \leq n$
  $1 \leq j \leq m$

$a_{ij} \in \mathbb{K}$ coefficients réels ou complexes

<u>Exemple</u>

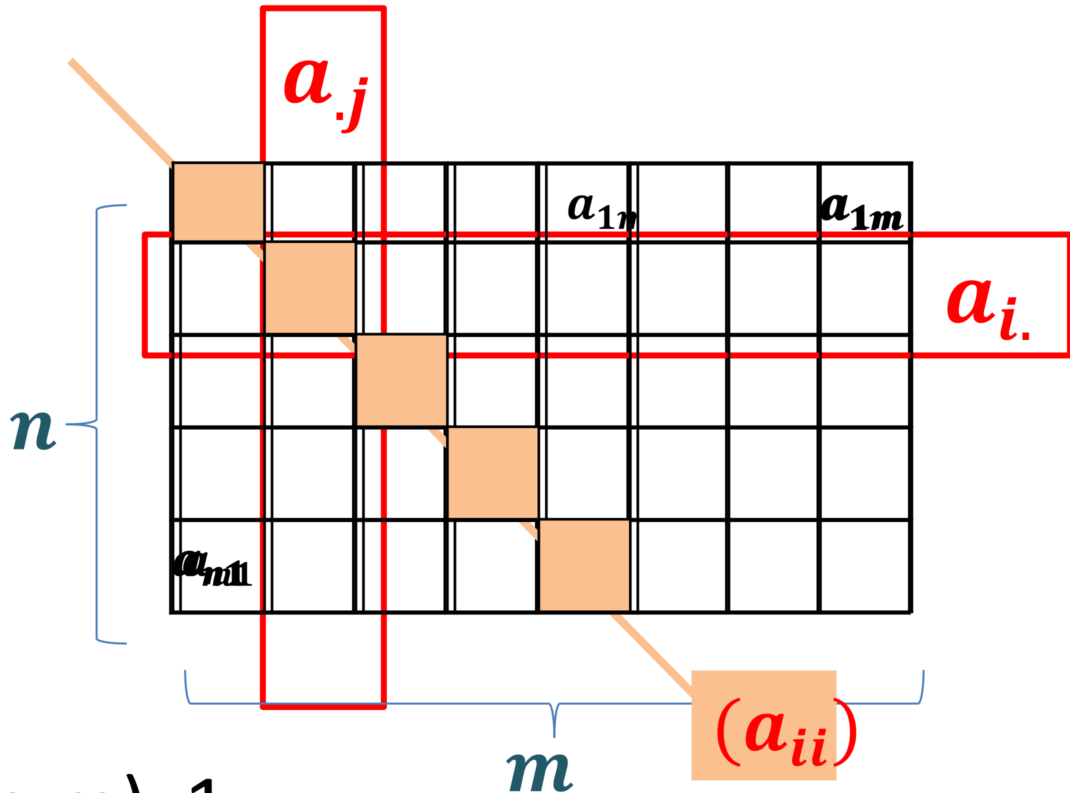
$A = \begin{matrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}$, application A: $\begin{matrix} (1,1) \rightarrow 1 & (2,1) \rightarrow 3 \\ (1,2) \rightarrow 0 & (2,2) \rightarrow 2 \\ (1,3) \rightarrow 5 & (2,3) \rightarrow 1 \end{matrix}$

Notations

- $M_n(K) \quad M_{n,m}(K)$

  $1 \leq i \leq n \quad 1 \leq i \leq n$

  $1 \leq j \leq n \quad 1 \leq j \leq m$



- $(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i.}})$: vecteur 1xm
- $(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{.j}})$: vecteur nx1
- $(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ii}})$: vecteur min(n,m)x1

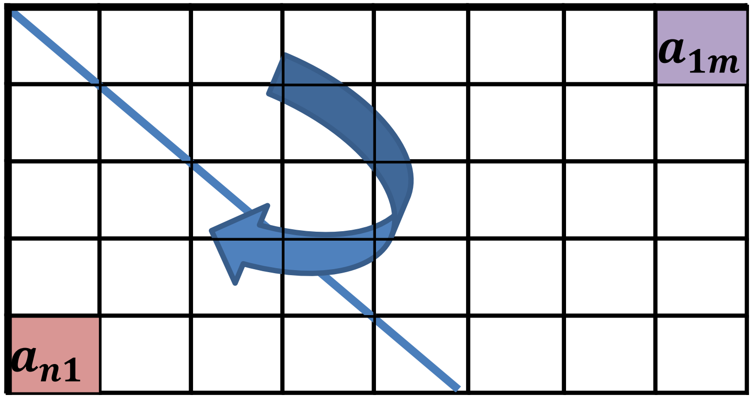
Questions

- Est-ce que cette application définie une matrice?
- A: $(1,1) \to 1 \quad (2,1) \to 2i + 4$
  $(1,2) \to i + 3$
  $(1,3) \to 5 \quad (2,3) \to 1$
- A: $(1,1) \to 0 \quad (2,1) \to -2$
  $(1,2) \to 1 \quad (2,2) \to 0$
  $(1,3) \to -1 \quad (2,3) \to 1$

Notations

- $(A^t)_{ji}$ matrice **transposée** de $(A)_{ij}$

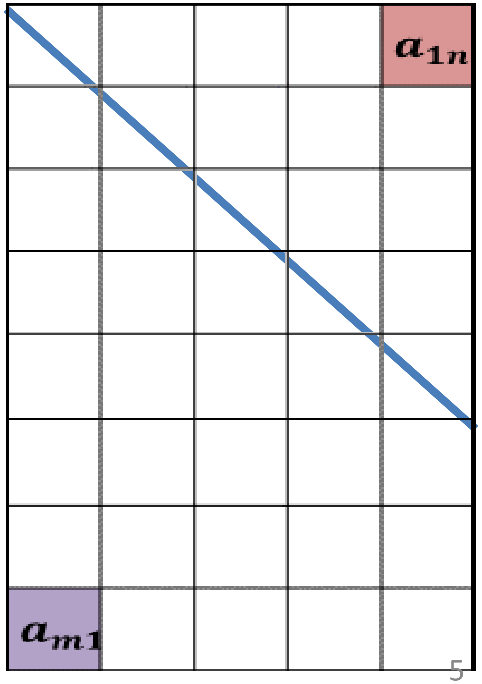
  $(A^t)^t = A$



- $(A^*)_{ji}$ matrice **adjointe** de $(A)_{ij}$

  $(A^*)_{ji} = (\overline{A^t})_{ji}$

  $(A^*)^* = A$



- $M_{1,m}(K)$
- $M_{n,1}(K)$

Notations

Exemple 1 :

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 5\\4 & 7\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\2 & 5 & 7\end{pmatrix}$$

Exemple 2 :

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 5\\4 & 7\end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\2 & 5 & 7\end{pmatrix}$$

Exemple 3 :

$$\begin{pmatrix}1+i & 2-3i\\0 & 5+2i\\4-7i & 7\end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix}1-i & 0 & 4+7i\\2+3i & 5-2i & 7\end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in M_{n,m}(K)$,

$$\forall (i,j) \in \{1,..,\mathrm{n}\} \times \{1,..,\mathrm{m}\}$$

- Egalité $a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow A = B$
- Addition $C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
  - $0_{n,m}$
  - $A + B = B + A$
  - $(A + B)^t = (A)^t + (B)^t$
  - $(A + B)^* = (A)^* + (B)^*$

Opérations sur les matrices

- Multiplication par un scalaire

$$C = \lambda A \iff c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

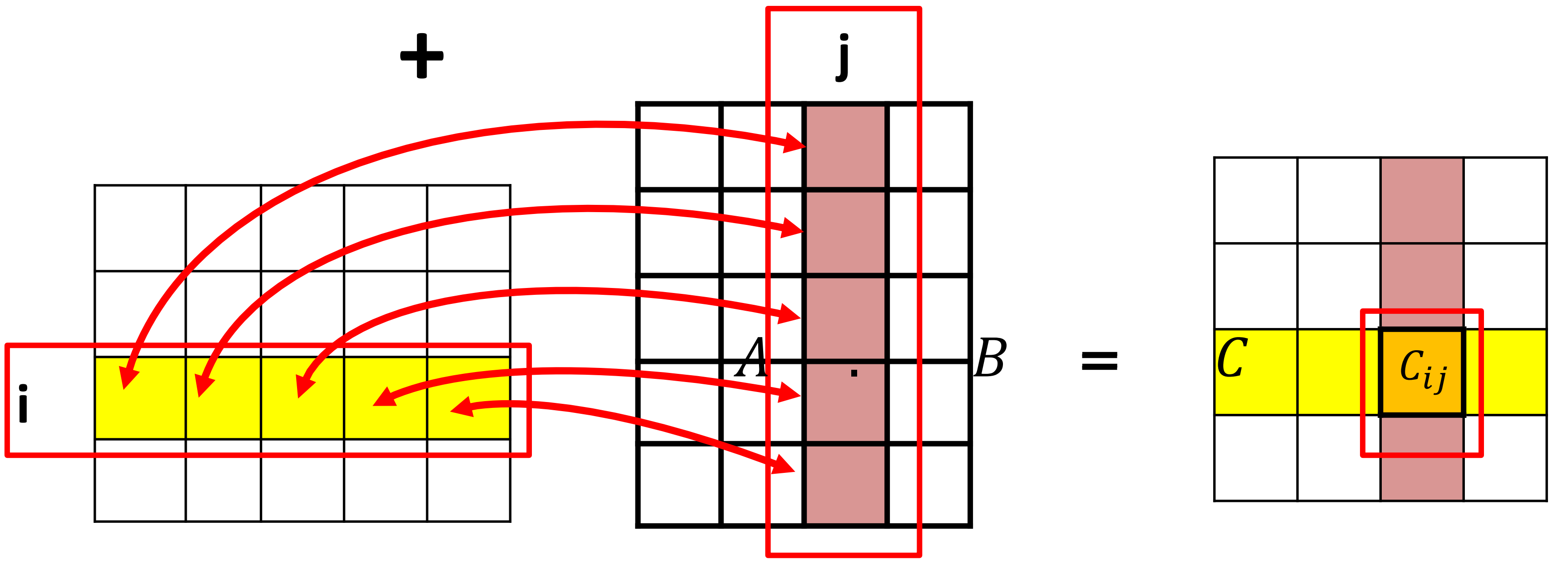
$$(\lambda A)^t = \lambda A^t$$

$$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

Produit de matrices



$A \in M_{n,p}(K)$ $B \in M_{p,m}(K)$ $C \in M_{n,m}(K)$

- $C = A\,B \iff C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$

Produit de matrices

Exemple:

- si A est d'ordre 3 et B de taille 3×2
- $A \times B$ est d'ordre 3×2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 2 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$$

- En MATLAB : >> A*B

Matrice identité

- $I_n = \delta_{ij} = \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}$

- $A\,.\,I = A$

- $A \in M_{n,\boldsymbol{p}}(K),\ I_p \qquad A\,.\,I = A$
- $A \in M_{n,\boldsymbol{p}}(K),\ I_n \qquad I.\,A = A$

Propriétés

- $A + B = B + A$,

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

$$(A+B)^* = A^* + B^*$$

- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A\,.\,B \quad \neq \quad B.\,A$

$$(A \cdot B)^t = A^t \cdot B^t$$

$$(A \cdot B)^* = A^* \cdot B^*$$

- $A\,.\,(B.\,C) = (A\,.\,B).\,C$
- A.(B+C)=A.B+A.C

Propriétés

- $A = 0 \quad$ ou/et $\quad B = 0 \qquad \Rightarrow A\,.\,B = 0$
- $A\,.\,B = 0 \;\not\Rightarrow A = 0 \; ou \; B = 0$

- $A^p = A \cdot A \cdot \; \dots \cdot A \quad p$ fois
- Exemple

$$\mathrm{A} = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix} \qquad A^p = \begin{matrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{matrix}$$

$$A^5 = \begin{matrix} 1 & 0 & 31 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{matrix} \qquad A^0 = I$$

Inverse d'une matrice

Soit $A \in M_n(K)$,

- Existence

  $\exists ?\ A^{-1}$ tq $\quad A \cdot A^{-1} = I_n$

- L'inverse de A est noté A^{-1}
- Si $\exists\ A^{-1}$ alors A est dite <u>non singulière</u> ou <u>inversible</u>

- <u>Propriétés</u>

  $(A^{-1})^{-1} = A$

  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

  $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$

Inverse d'une matrice

Exemples :

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ inversible?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} a = 1 - 2c & c = 0 \\ b = -2d & d = 1/3 \end{matrix}$$

$$A^{-1} = \begin{matrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{matrix}$$

A Non singulière

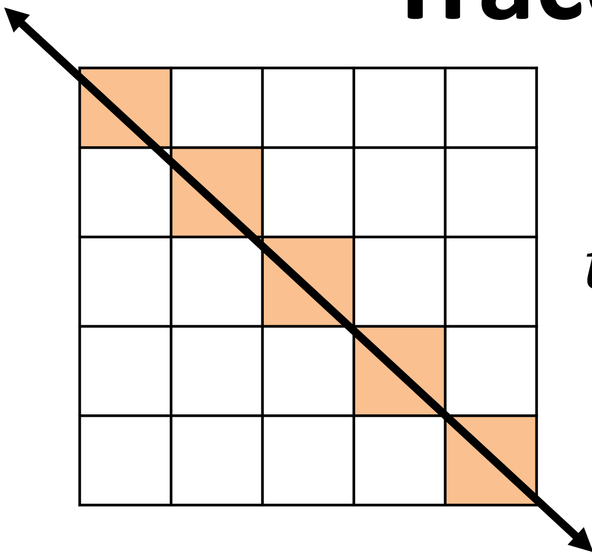
- $A = \begin{matrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{matrix} \quad \nexists\, A^{-1}$

A est singulière,

non inversible

- $I^{-1} = I$
- La matrice nulle n'est jamais inversible

Trace d'une matrice



$$\boldsymbol{tr(A) = \sum a_{ii}}$$

- $tr(\alpha A + B) = \alpha \cdot tr(A) + tr(B)$
- Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, alors
$$tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$$

Déterminant d’une matrice

$$\det : \begin{cases} M_n(K) & \rightarrow & K \\ (A_{\boldsymbol{i,j}}) & \rightarrow & y \end{cases}$$

<u>Exemple :</u>

soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$$

Calcul du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = ??$$

Méthode de SARRUS

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc|cc} a & d & g & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{d} \\ b & e & h & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{e} \\ c & f & i & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{f} \end{array}$$

$$= \boldsymbol{aei} + \boldsymbol{dhc} + \boldsymbol{gbf} - ceg - fha - ibd$$

Calcul du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = ??$$

Méthode de SARRUS

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{matrix} \right.$$

$$= \mathbf{1(-2)(-1) + 2(-3)0 + 3(-1)1}$$
$$\mathbf{- [0(-2)3 + 1(-3)1 + (-1)(-1)2] = 0}$$

Calcul du déterminant

Développement de LAPLACE

Développement du cofacteur

Laplace expansion

Cofactor expansion

Calcul du déterminant

Développement de LAPLACE

$$A = \begin{matrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{matrix}$$

$A \in M_{\boldsymbol{n}}(K)$

(A_{ij}) = Mineur de A d'ordre n-1

$$(A_{12}) = \begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \qquad (A_{22}) = \begin{matrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \qquad (A_{13}) = \begin{matrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{matrix}$$

$$(A_{32}) = \begin{matrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \qquad (A_{42}) = \begin{matrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}$$

$(A_{34}), (A_{31}), (A_{43}), \ldots$

……….

Calcul du déterminant

Développement de LAPLACE

$$A_{ij} = \begin{array}{cccc} a & d & \dots & x \\ b & e & \dots & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & f & \dots & z \\ & \uparrow & & \\ & \boldsymbol{j} & & \end{array}$$

$$A_{ij} = \begin{array}{ccccc} a & d & \dots & x & \\ b & e & \dots & y & \leftarrow \boldsymbol{i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c & f & \dots & z & \end{array}$$

Exemple :

$$A = \begin{array}{c|c|cc} 4 & 0 & 3 & 1 \\ \hline 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

$$(A_{12}) = \begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

$$(A_{22}) = \begin{matrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

$$(A_{32}) = \begin{matrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

$$(A_{42}) = \begin{matrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}$$

$$(A_{11}) = \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{matrix}$$

$$(A_{12}) = \begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

$$(A_{13}) = \begin{matrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{matrix}$$

$$(A_{14}) = \begin{matrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}$$

Calcul du déterminant

Développement de LAPLACE

$A \in M_{\boldsymbol{n}}(K)$

$Cof_{ij} =$ Cofacteur de (A_{ij})

$$= (-1)^{i+j} \,.\left|(A_{ij})\right|$$

$Cof_{12} = (-1)^{1+2} \ |(A_{12})|$

$Cof_{22} = (-1)^{2+2} \ |(A_{22})\ |$

$Cof_{32} = (-1)^{3+2} \ |(A_{32})\ |$

$Cof_{42} = (-1)^{4+2} \ |(A_{42})\ |$

Calcul du déterminant

Développement de LAPLACE

$A \in M_{\boldsymbol{n}}(K)$

$$A = \begin{matrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{matrix}$$

(A_{ij})

$Cof_{ij} = (-1)^{i+j} \,.\left|(A_{ij})\right|$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,.\,Cof_{ij}$$

$$\det A = 0 \cdot Cof_{12} + 2 \cdot Cof_{22} + 3 \cdot Cof_{32} + \ 0 \cdot Cof_{42}$$

$$= 82$$

Exemple :

$$A = \begin{matrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{matrix}$$

$$|(A_{12})| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} +$$
$$(-1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|(A_{22})| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} +$$
$$(-1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|(A_{42})| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \cdots \qquad |(A_{32})| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \ldots$$

$$Cof_{12} = (-1)^{1+2} \ \ |(A_{12})| =$$

$$Cof_{22} = (-1)^{2+2} \ |(A_{22})\ | =$$

$$Cof_{32} = (-1)^{3+2} \ \ |(A_{32})\ | =$$

$$Cof_{42} = (-1)^{4+2} \ \ |(A_{42})\ | = \textit{a calculer}$$

$$\boxed{\det A = 0 \cdot Cof_{12} + 2 \cdot Cof_{22} + 3 \cdot Cof_{32} + \ 0 \cdot Cof_{42} = 82}$$

Calcul du déterminant

Méthode de LAPLACE

Développement sur une ligne

$$A_{ij} = \begin{array}{cccc} a & d & \dots & x \\ b & e & \dots & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & f & \dots & z \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \boldsymbol{i} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, Cof_{ij}$$

Exemple :

Développement sur une ligne

$$\mathrm{A} = \begin{matrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{matrix}$$

$$\det A = a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} + d(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix} + g(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix}$$

$$\det A = a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} + b(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} d & g \\ f & i \end{vmatrix} + c(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix}$$

Propriétés du déterminant

$$\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$$

$$\det\ A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

$$\det\ A^{t} = \det A$$

$$det\ A^{*} = \overline{\det A}$$

$$\det\ I_n = 1$$

Propriétés du déterminant

En posons : $$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} C_1 & \cdots & C_k & \cdots & C_l & \cdots & C_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{21} & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} \end{array}$$

$\underline{det\, A = 0}$ pour 3 cas

1. $A = 0_n$
2. Si $\exists \ 1 \leq k \leq l \leq n$ tel que $C_k = C_l$ ou $L_k = L_l$
3. Si $\exists \ k$ tel que $C_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i C_i$ ou $L_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i L_i$

Propriétés du déterminant

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 0 \text{ car } C_2 = C_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 0 \text{ car } C_3 = C_1 - 2C_2$$

Inverse d'une matrice

Soit $A \in M_n(K)$,

- Existance

  $\exists ?\ A^{-1}$ tq $\quad A \cdot A^{-1} = I_n$

- L'inverse de A est noté A^{-1}
- Si $\exists\ A^{-1}$ alors A est dite <u>non singulière</u> ou <u>inversible</u>

Calcul de l'inverse de A

Soient : $\mathrm{A}, C \in M_n(K)$

$$C = Com(A) = comatrice\ de\ A$$

$$= \left(Cof_{ij}\right)_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$$

$$cof_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^t \qquad \det A \neq 0}$$

Calcul de l'inverse de A

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{matrix}$$

,

$$\det A = 1.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$\Rightarrow \quad A$ Non singulière

$$Cof_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$Cof_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$Cof_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$Cof_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$Cof_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$Cof_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$Cof_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$Cof_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$Cof_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t$$

Calcul de l'inverse

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$\det A = 0 \ \Rightarrow A$ non inversible

$\det B = 0 \ \Rightarrow B$ non inversible

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Matrices particulières

Matrice diagonale

$A \in M_n(K)$

$\forall (i,j)$, tel que $i \neq j, a_{ij} = 0$

2	0	0	0
0	4	0	0
0	0	0	0
0	0	0	7

- Somme $A + B$ est une diagonale
- Produit $A \times B$ est une diagonale
- $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$,
- $\forall i, a_{ii} \neq 0 \Leftrightarrow A$ inversible
- $A^{-1}, i \neq j,\ a_{ij}^{-1} = 0,$

  $i = j,\ a_{ij}^{-1} = \frac{1}{a_{ij}}$

$\frac{1}{a_{11}}$	0	0	0
0	$\frac{1}{a_{22}}$	0	0
0	0	$\ddots$	0
0	0	0	$\frac{1}{a_{nn}}$

Matrice diagonale

- Exemple

2	**0**	**0**	**0**
0	**4**	**0**	**0**
0	**0**	**2**	**0**
0	**0**	**0**	**7**

1/2	**0**	**0**	**0**
0	**1/4**	**0**	**0**
0	**0**	**1/2**	**0**
0	**0**	**0**	**1/7**

Matrices particulières

Matrice triangulaire

Supérieure

$A \in M_n(K)$

$\forall (i, j) |\ i > j, \qquad a_{ij} = 0$

$i > j$

$\mathbf{1 = 1}$	$\mathbf{1 < 2}$	$\mathbf{1 < 3}$
$\mathbf{2 > 1}$	$\mathbf{2 = 2}$	$\mathbf{2 < 3}$
$\mathbf{3 > 1}$	$\mathbf{3 > 2}$	$\mathbf{3 = 3}$

$$\begin{matrix} ? & ? & ? \\ \mathbf{0} & ? & ? \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & ? \end{matrix}$$

Matrices particulières

Matrice triangulaire

Inférieure

$\mathrm{A} \in M_n(K)$

$\forall (i,j) |\ i < j, \qquad a_{ij} = 0$

$i < j$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1 = 1} & \mathbf{1 < 2} & \mathbf{1 < 3} \\ \mathbf{2 > 1} & \mathbf{2 = 2} & \mathbf{2 < 3} \\ \mathbf{3 > 1} & \mathbf{3 > 2} & \mathbf{3 = 3} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} ? & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ ? & ? & \mathbf{0} \\ ? & ? & ? \end{array}$$

Matrices particulières

Matrice triangulaire

Supérieure

$\forall (i,j) |\ i > j, \qquad a_{ij} = 0$

Inférieure

$\forall (i,j) |\ i < j, \qquad a_{ij} = 0$

$$\det A = \prod_{i=1..n} a_{ii}$$

Matrices particulières

- $A \in M_n(K)$
- Matrice a diagonale dominante (≥)
- Matrice a diagonale strictement dominante (>)

par ligne

$\|a_{ii}\| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \|a_{ij}\|$		
	$\|a_{ii}\| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \|a_{ij}\|$	
		$\|a_{ii}\| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \|a_{ij}\|$

par colonne

$\|a_{ii}\| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \|a_{ij}\|$		
	$\|a_{ii}\| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \|a_{ij}\|$	
		$\|a_{ii}\| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \|a_{ij}\|$

Matrices particulières

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A est à diagonale dominante car

$$\begin{array}{lcr} |4| & \geq & |2| + |2| \\ |-5| & \geq & |2| + |2| \\ |6| & \geq & |-1| + |2| \end{array}$$

La matrice B n'est pas à diagonale dominante car

$$|0| < |-1| + |2|$$

Matrice a diagonale (strictement) dominante est toujours inversible

det A $\neq$ 0

Matrices particulières

Matrices semblables

- $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in M_n(K)$
- Deux matrices A, B sont dites **semblables** si elles peuvent être reliées par une transformation de similitude :

$$\exists\ P.\, P^{-1} = I \mid \mathrm{B} = P^{-1} \mathrm{A}\ \mathrm{P}$$

- $\det(A) = \det(B)$
- $\mathrm{trace}(A) = \mathrm{trace}(B)$

Matrices semblables

Les matrices A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et B=$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
sont semblables, car

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{; avec } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$