Analysis I: Tutorial Exercise Sheet 1

Exercise 01:

Prove that the set of rational numbers forms a field.

برهن أن مجموعة الأعداد الناطقة تشكل حقلا.

Exercise 02:

Rewrite the sets S below using interval notation:

أعد كتابة المجموعات S في الأسفل بالاستعمال ترميز المجالات:

1) $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$
2) $S = \{x \in \mathbb{R} : -x \leq 2\}$
3) $S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 3\}$
4) $S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$
5) $S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2\}$
6) $S = \{x \in \mathbb{R} : -x^3 \geq 3\}$

Exercise 03:

A) Show the following inequalities:

بيّن المتراجحات التالية:

1. $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $\sqrt{x + y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+$.
3. $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}; \forall x, y \in \mathbb{R}^+$.

B) Let $[x]$ be the floor function of x;

- find the following: $[3.6], [\pi], [e], [-5.3], [-0.4], [8]$.

  لتكن $[x]$ دالة الجزء الصحيح لـ x ، أوجد ما يلي: $[3.6], [\pi], [e], [-5.3], [-0.4], [8]$.

- Demonstrate that for all $x, y \in \mathbb{R}$:

  برهن أنه من أجل كل x و y ينتميان إلى $\mathbb{R}$:

  1. $[x + m] = [x] + m$ where $m \in \mathbb{Z}$
  2. $x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$.
  3. $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$.

Exercise 04:

A) Show that:

بيّن أن:

1. The sum of a rational number and an irrational number is an irrational number.

1. مجموع عدد ناطق (نسبوي) و عدد أصم (غير نسبوي) هو عدد أصم (غير نسبوي) .

2. $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

B) Let $a \in [1, \infty[$ simplify x^2 where $x = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.

ليكن $a \in [1, \infty[$ بسط x^2 حيث $x = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.

Exercise 05:

Consider A as a subset of $\mathbb{R}$ equipped with the usual order. Determine, for each of the following sets: the set of upper bounds $Maj(A)$, the set of lower bounds $Min(A)$, the superemum $\sup(A)$, the infimum $\inf(A)$, the smallest element $\min(A)$, and the largest element $\max(A)$.

نعتبر A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ معتمدة الترتيب العادي، عين لكل من المجموعات التالية: مجموعة الحواد العلوية $Maj(A)$ ، مجموعة الحواد السفلية $Min(A)$ ، الحد الأعظمي (الحاد من الأعلى) أي أصغر الحواد العلوية $\sup(A)$ ، الحد الأصغري (الحاد من الأسفل) أي أكبر الحواد السفلية $\inf(A)$ ، العنصر الأصغري $\min(A)$ ، و العنصر الأعظمي $\max(A)$.

1. $A = [-\alpha, \alpha], [-\alpha, \alpha[,]-\alpha, \alpha[$ (where $\alpha > 0$), $E = \mathbb{R}$.
2. $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 2\}, E = \mathbb{R}$.
3. $A = \{1 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\}, E = \mathbb{R}$.

Exercise 06:

Let A be a non-empty and bounded subset of $\mathbb{R}$. We denote $B = \{|x-y|; (x,y) \in A^2\}$.

1. Justify that B is bounded above.
2. We denote $\sup(B)$ as the supremum of the set B, show that $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

لتكن A مجموعة جزئية غير فارغة و محصورة في $\mathbb{R}$. نرمز $B = \{|x-y|; (x,y) \in A^2\}$.

1. علل كون B محصورة (محدودة) من الأعلى.
2. نرمز للحد الأعلى (أصغر الحواد العلوية) للمجموعة B بـ $\sup(B)$. أثبت أن $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercise 07:

In notation, $P_B(R)$ represents the set of bounded subsets of $\mathbb{R}$. Show that for all $A, B \in P_B(\mathbb{R})$.

الرمز $P_B(R)$ يمثل مجموعة المجموعات الجزئية المحصورة في $\mathbb{R}$. برهن أنه من أجل كل A و B ينتميان لـ $P_B(\mathbb{R})$:

1. (a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$,
(b)$\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$,

2. if $A \cap B \neq \emptyset$ then:
   (a)$\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$,
   (b) $\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$,

3. (a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$;
   (b) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ where $A + B = \{x + y/x \in A \; and \; y \in B\}$

4. (a) $\sup(-A) = -\inf A$;
   (b) $\inf(-A) = -\sup A$
   such that $-A = \{-x/x \in A\}$.

Exercise 08:

Using the characterization of the supremum and infimum, show that:

باستعمال مميزة الحد الأعلى (أصغر الحواد العلوية) و الحد الأسفل (أكبر الحواد السفلية)، بين أن:

1. $\sup A = \frac{3}{2}, \inf A = 1 \; for \; A = \{\frac{3n+1}{2n+1}, n \in \mathbb{N}\}$.
2. $\sup B = 2, \; \inf B = 0 \; for \; B = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\}$.
3. $\sup C = 1, \inf C = 0 \; for \; C = \{e^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$.
4. $\sup D = -1, \inf D = -2 \; for \; D = \{\frac{1}{n^2} - 2, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Calculate $\max A$, $\min A$, $\max B$, $\min B$, $\max C$, $\min C$, and $\max D$, $\min D$ if they exist.

أحسب $\max A$ ، $\min A$ ، $\max B$ ، $\min B$ ، $\max C$ ، $\min C$ ، و $\max D$ ، $\min D$ إن وجدوا.