Centre universitaire : Abd elhafid boussouf- Mila
Niveau : Mastre 2 fondamentale

Module : Topologie algèbrique N 2

Daoui & Amina

Contenu

Chapitre 1

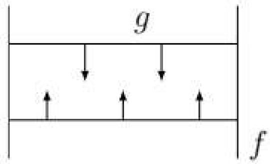
Fonctions homotopiques

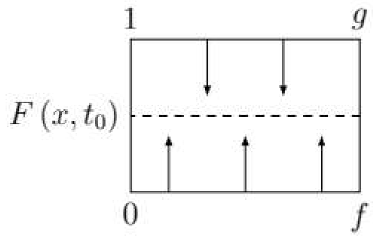
L'homotopie étudier le problème de déformation continue d'application. Elle est apparu pour classifier plus faiblement que l'homotopie les éspaces topologiques :
X e.T et Y e.T trouvé. On constate alors que pour constater intuitivement que X et Y géométriquement se sont pas de même nature ce qui suit :
En x on fixe un point x_0, idem en y on fixe un point y_0 :
Si on considère une ficelle γ qui commence et se termine en x_0, γ' en Y cependent qui commence et se termine en y_0 :
alors on a ce qui suit :
Toute ficelle γ de X qui commence et se termine en x_0 puit être contracter en x_0 tout en restant dans X.
Par contre ils existent des ficelles γ' de Y qui commence et se termine en y_0 qui se pouvent pas ce contracter en y_0 dans Y.

1.1 Homotopie des applications continues

On va étudier les déformations des applications continues. Considérons Top la catégorie des espaces topologiques et des applications continues : X et Y deux objet de Top .

Définition 1.1.1. *Deux morphismes f, $g \in Mor_{Top}(X,Y)$ sont dit homotopes si et seulement si on peut déformer continuement f pour obtenir g ou déformer g pour obtenir f.*
Shéma intuitive :





Définition 1.1.2. *On dire qu'un morphisme $f \in Mor_{Top}(X, Y)$ est homotope à un morphisme $g \in Mor_{Top}(X, Y)$ et notera $f \sim g$ (lie : f homotope à g) si et seulement s'il éxiste une application continue :*

$$F : X \times [0,1] \longrightarrow Y \text{ avec : } \begin{cases} F(x, 0) & = f(x) \\ \\ F(x, 1) & = g(x) \end{cases} \qquad \forall x \in X.$$

Théorème 1.1.1. *La relation " homotope" $\equiv$ relation d'homotopie, est une relation d'equivalence dans $Mor_{Top}(X, Y)$.*

Preuve.

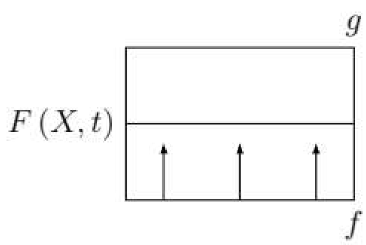
Réfléxivité : Soit $X, Y \in obj_{Top}$ fixé on considère les relations d'homotopie sur $Mor_{Top}(X, Y)$ pour $f \in Mor_{Top}(X, Y)$ considérons :

$$F : X \times [0,1] \longrightarrow Y \quad \text{donné par : } F(X, t) = f(x) \quad \forall t \in [0,1]$$

. F est continue et $F(X, 0) = F(X, 1) = f(x)$ donc $f \sim f$.

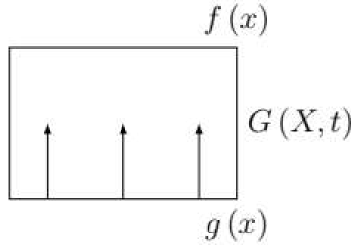
Symétrique : Soit f, $g \in Mor_{Top}(X, Y)$ et supposons :

$$f \sim g \Longleftrightarrow \exists F : X \times [0,1] \longrightarrow Y \text{ continue telle que : } \begin{cases} F(x, 0) & = f(x) \\ \\ F(x, 1) & = g(x) \end{cases}$$



considérons : $G : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ où $G(x, t) = F(x, 1 - t)$ pour $x \in X$; $t \in [0,1]$

G est continue et en plus : $\begin{cases} G(x,0) = F(x,1) & = g(x) \\ G(x,1) = F(x,0) & = f(x) \end{cases}$



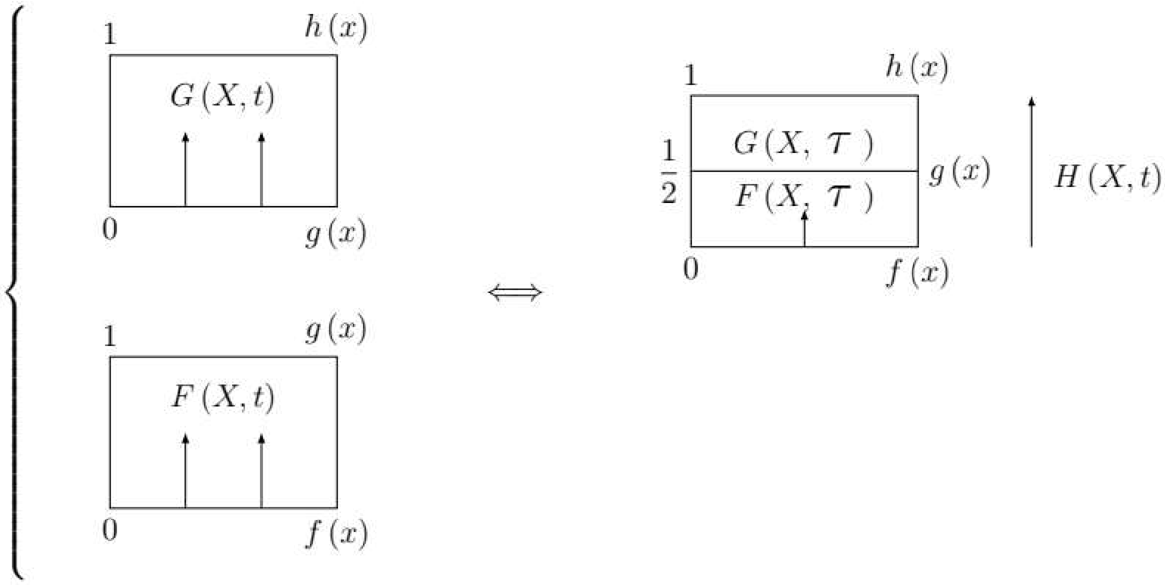
Conséquence 1.1.1. $g \sim f$ *donc l'homotopie est une relation symétrique.*

Transitivité : Soient $f,\ g,\ h \in Mor_{Top}(X,Y)$ et supposons :

$$f \sim g \Longleftrightarrow \exists F : X \times [0,1] \longrightarrow Y \text{ continues avec : } \begin{cases} F(X,0) & = f(x) \\ F(X,1) & = g(x) \end{cases}$$

$$g \sim h \Longleftrightarrow \exists G : X \times [0,1] \longrightarrow Y \text{ continues avec : } \begin{cases} G(X,0) & = g(x) \\ G(X,1) & = h(x) \end{cases}$$

Considérons le shéma :



Conidérons : $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ où $H(X,t) = \begin{cases} F(X,2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(X,2t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

F et G sont continues sur les intervalles $[0, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, 1]$ respectivement de plus si $t = \frac{1}{2}$, $F(X,1) = G(X,0) = g(x)$ par conséquence H est continue de plus :

$$\begin{cases} H(X,0) &= F(X,0) = f(x) \\ \\ H(X,1) &= G(X,1) = h(x) \end{cases}$$

Conséquence 1.1.2. *$f \sim h$ d'ou on déduit que la relation d'homotopie est transitive.*

$\square$

Conclusion 1.1.1. *La relation d'homotopie sur $Mor_{Top}(X,Y)$ est d'equivalence.*

Conséquence 1.1.3. *Pour tout couple d'objets X, Y de Top la relation d'homotopie particiance l'ensemble des morphismes de source X et de but Y en classes appelées classes d'homotopie.*
Ainsi la relation d'homotopie sur $Mor_{Top}(X,Y)$ classe les morphismes qui peuvent se définir continuement l'un sur l'autre.

<u>Notation</u>

- Si $f \in Mor_{Top}(X,Y)$ la classe d'homotopie de f se sont : $\begin{cases} \nearrow [f] \\ \searrow \bar{f} \end{cases}$

- L'ensemble quotient $Mor_{Top}(X,Y)/_\sim$ qui est donc l'ensemble des classes d'homotopies est noté $[X,Y]$

Ainsi $[X,Y] = \{[f]\ f \in Mor_{Top}(X,Y)\}$.

1.1.1 Construction d'une catégorie liée á l'homoptopie

Soit Top est la relation d'homotopie ci dessus définit considérons les classes suivantes :

1) Classe des objets de Top $\equiv$ éspace topologiques.

2) Si X, Y sont deux éspaces topologiques isomorphe, un morphisme de X dans Y sera un élément de $[X,Y]$ autrement dit on considère pour morphisme les classes d'homotopies des morphismes de Top.

Lemme 1.1.1. *La dennée des 2 classes ci dessue détermine une catégorie notée $[Top]$ celle-ci et associée á la relation d'homotopie.*
A fin de prouver que $[Top]$ est une catégorie il faut montre en évidence une loi de composition de morphisme pour chaque objet de $[Top]$

Remarque 1.1.1. *Si X et Y sont deux éspaces topologiques un morphisme de X dans Y dans la classe des morphismes de $[Top]$ est un ensemble de morphisme de Top tous homotopes entres une*

i.e : $Mor_{Top}(X,Y) = [X,Y] = Mor_{Top}(X,Y)/_{\sim}$

i.e : Un morphisme de $[Top]$ est un ensemble d'application continue homotope ente elle !!

Soient X, Y, Z trois éspaces topologiques :

$[f] : X \longrightarrow Y$ *et* $[g] : Y \longrightarrow Z$ *deux flèches données, considérons la relation*

$$[g] \circ [f] : \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd} \quad \text{où} \quad [g] \circ [f] = [g' \circ f'] \quad \text{où} \quad g' \in [g],\ f' \in [f]$$

• *Montrons que cette composition est correctement définie c.á.d qu'elle est indépendante des des choix des morphismes dans les classes d'homotopies.*

A cet effet considérons $y', y'' \in [g]$ *et* $f', f'' \in [f] \Longleftrightarrow f' \sim f''$ *et* $g' \sim g''$ *donc :*

$$F : X \times [0,1] \longrightarrow Y \text{ continue avec : } \begin{cases} F(X,0) & = f'(x) \\ F(X,1) & = f''(x) \end{cases}$$

et $\exists \quad G : Y \times [0,1] \longrightarrow Z$ *continue Considérons :* $H(X,t) : X \times [0,1] \longrightarrow Y \times [0,1] \longrightarrow Z$ *où* $H(x,t) = G(F(x,t),t) \quad \forall x \in X\ \forall t \in [0,1]$.

H *est correctement donnée car* $(x,t) \in X \times [0,1] \Rightarrow (F(x,t),t) \in Y \in [0,1]$ *donc :* $G(F(x,t),t) \in Z$.

Celle- ci est continue est :

$$\begin{cases} H(x,0) = G(F(x,0),0) & = G(f'(x),0) \\ & = g'(f'(x)) \\ & = (g' \circ f')(x) \\ H(x,1) = G(F(x,1),1) & = G(f''(x),1) \\ & = g''(f''(x)) \\ & = (g'' \circ f'')(x) \end{cases}$$

Conclusion 1.1.2. $[g' \circ f'] = [g'' \circ f''] = [g \circ f]$ *par conséquent pour simplifier l'ecriture et la compréhension on pose :* $[g] \circ [f] = [g \circ f]$.

• *Elle est associative* $\Rightarrow \begin{cases} ([g]\circ[f])\circ h = [g\circ f]\circ h & = [(g\circ f)\circ h] \\ & = [g\circ(f\circ h)] \\ & = [g]\circ[f\circ h] \\ & = [g]\circ([f]\circ[h]) \end{cases}$

• *Existance du morphisme identité : Soit X un éspace topologie considérons :*
$[Id_X] : X \longrightarrow X$ *on a* $[Id_X]\circ[f] = [Id_X \circ f] = [f]$ *et* $[g]\circ[Id_X] = [g\circ Id_X] = [g]$.
Jusque'á présent on a comparé les éspaces topologie c.á.d un ensemble X muni d'une géométrie grâce á la notion d'homéomorphisme.

• *Ainsi deux objet X, Y (e.T) de Top sont isomorphe (homéomorphe)*

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \quad f : X \longrightarrow Y & \text{une application continue} \\ \exists \quad g : Y \longrightarrow X & \text{une application continue} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f\circ g & = Id_Y \\ g\circ f & = Id_X \end{cases}$$

Grâce á l'homotopie on va classer différent et plus faiblement.

Définition 1.1.3. *Deux éspaces topologiques X et Y sont dit de même type homotopique où encore homotopes où homotopiquement équivalent ssi ils éxistent :*

$$\begin{cases} f : X \longrightarrow Y \text{ continue (morphisme de Top)} \\ g : Y \longrightarrow X \text{ continue} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f\circ g \sim Id_Y \\ g\circ f \sim Id_X \end{cases}$$

Remarque 1.1.2. *On dit que c'est une classification faible par á rapport á la classification topologique car : homéomorphe $\Rightarrow$ homotope ; " $=$ " $\Rightarrow$ " $\sim$ "*

• *Si* $\begin{cases} f\circ g \sim Id_Y \\ g\circ f \sim Id_X \end{cases}$ *donc* $\begin{cases} [f\circ g] & = [Id_Y] \\ [g\circ f] & = [Id_X] \end{cases}$ *donc* $\begin{cases} [f]\circ[g] & = [Id_Y] \\ [g]\circ[f] & = [Id_X] \end{cases}$

On dit alors que f est l'inverse homotopique de g ou g est l'inverse homotopique de f, on dit également que f et g sont homotopiquement inversible.

Proposition 1.1.1. *La relation d'homotopie dans la classe des éspaces topologiques est une relation d'quivalence qui classe ainsi les éspaces topologique par homotopie.*

1) **Réfléxivité :** Soit X un éspace topologique alors $Id_X : X \longrightarrow X$ est une homotope de X dans X.

2) **Symétrique :** Soit X et Y duex éspaces topologiques homotope $X \sim Y$ c.á.d

$$\left\{\begin{array}{llll} \exists & f : X & \longrightarrow & Y \text{ continue} \\ \\ \exists & g : Y & \longrightarrow & X \text{ continue} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} f \circ g \sim Id_Y \\ \\ g \circ f \sim Id_X \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{llll} \exists & g : Y & \longrightarrow & X \\ \\ \exists & f : X & \longrightarrow & Y \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ll} g \circ f & = Id_X \\ \\ f \circ g & = Id_Y \end{array}\right. \quad \Rightarrow Y \sim X.$$

3) **Transitivité :** Soit X, Y, Z trois objets de la catégorie Top et supposons que $X \sim Y$ et $Y \sim Z$ qui si que X et Y homotopes et Y et Z homotopes donc

$$\left\{\begin{array}{llll} \exists & f : X & \longrightarrow & Y \text{ continue} \\ \\ \exists & g : Y & \longrightarrow & X \text{ continue} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} f \circ g \sim Id_Y \\ \\ g \circ f \sim Id_X \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \exists & \alpha : Y \longrightarrow Z \text{ continue} \\ \\ \exists & \beta : Z \longrightarrow Y \text{ continue} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ll} \alpha \circ \beta & = Id_Z \\ \\ \beta \circ \alpha & = Id_Y \end{array}\right.$$

Considérons :

$$\left\{\begin{array}{ll} \exists & [\alpha] \circ [f] : X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \\ \\ \exists & [g] \circ [\beta] : Z \longrightarrow Y \longrightarrow X \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \text{continue}$$

Considérons leurs composition :

$(\alpha \circ f) \circ (g \circ \beta) : Z \longrightarrow Z.$

$(\alpha \circ f) \circ (g \circ \beta) = \alpha \circ (f \circ g) \circ \beta \sim \alpha \sim Id_Y \circ \beta = \alpha \circ \beta \sim Id_Z.$

d'autre part :

$(g \circ \beta) \circ (\alpha \circ f) : X \longrightarrow X.$

$(g \circ \beta) \circ (\alpha \circ f) = g \circ (\beta \circ \alpha) \circ f \sim g \circ Id_Y \circ f = g \circ f \sim Id_X.$

Conséquence 1.1.4. $X \sim Z$

1.2 Éspace contractile

Définition 1.2.1. *Un éspace topologique X est dit contractile ssi ila a même type d'homotopie qu'un point i.e (singleton) ssi X est homotope á un singleton.*

Remarque 1.2.1. *Si X est un ensemble non reduit á un singleton, topologiquement il ne poura être homéomorphe c.á.d de même type topologique q'un singleton cependant ils peuvent être homotopie c.á.d avoir le même type homotopique.*

Proposition 1.2.1. *Un éspace topologique X est contractile ssi l'application Id_X est homotope á une application constante.*

1) **Condition nécessaire :** Supposons que X soit contractile donc par définition ils éxistent

$$\begin{cases} f : X \longrightarrow \{x_0\} \\ g : \{x_0\} \longrightarrow X \end{cases} \text{telle que} \begin{cases} f \circ g \sim Id_{\{x_0\}} \\ g \circ f \sim Id_X \end{cases}$$

alors :

$$\begin{cases} g \circ f : X \xrightarrow{f} \{x_0\} \xrightarrow{g} X \\ \qquad X \rightarrow x_0 \rightarrow g(x_0) \end{cases}$$

donc $g \circ f$ est une application constante homotope á Id_X i.e :

$Id_X \cong g \circ f = \mathcal{E}_{g(x_0)}$ où $\mathcal{E}_{g(x_0)} : X \longrightarrow X$ par $\mathcal{E}_{g(x_0)} = g(x_0) \quad \forall x \in X$.

2) **Condition suffisante :** Supposons que $Id_X : X \longrightarrow X$ homotope á une application constante $\mathcal{E}_{x_0} : X \longrightarrow X$, considérons les applications :

$$\begin{cases} X \xrightarrow{f} \{x_0\} \\ x \rightarrow x_0 \end{cases} \text{et} \begin{cases} \{x_0\} \xrightarrow{g} X \\ x_0 \rightarrow g(x_0) \end{cases}$$

alors $f \circ g(x) = x_0 = Id_{\{x_0\}}(x)$ c.á.d $f \circ g \backsimeq Id_{\{x_0\}}$

et $g \circ f(x) = g(x_0) = \mathcal{E}_{x_0}(x)$ c.á.d $g \circ f = \mathcal{E}_{x_0} \backsimeq Id_X$.

X et x_0 ont même type d'homotopie $\Rightarrow X$ est contractile.

Proposition 1.2.2. *Un éspace topologique X est contractile ssi toute application continue $f : X \longrightarrow Y$ est homotope á une application constante.*

1) **Condition nécessaire :** Supposons que X eqt contractile et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue arbitrairement donnée, d'aprés la proposition précédente on sait qu'il éxiste une application constante $\mathcal{E}_{x_0} : X \longrightarrow X$ qui est homotope á $Id_X : X \longrightarrow X$ on a ainsi les homotopes suivantes :

$$\begin{cases} f \sim f \\ \\ \quad \text{et} \\ \\ Id_X \sim \mathcal{E}_{X_0} \end{cases} \tag{1.1}$$

donc d'aprés la contrabilité de la comoposition des applications et de la relation d'homotopoie on déduit de (1.1) : $f \circ Id_X \sim f \circ \mathcal{E}_{x_0}$ d'où $f \sim \mathcal{E}_{f(x_0)}$ où $\mathcal{E}_{f(x_0)} : X \longrightarrow Y$ est l'application constante où $\mathcal{E}_{f(x_0)} = f(x_0)$.

2) **Condition suffisante :** Supposons que toute application continue $f : X \longrightarrow Y$, en particulier $Id_X : X \longrightarrow X$ elle sera homotope á une application constante donc X est contractile.

Proposition 1.2.3. *Un éspace topologique X est contractile ssi toute application continue $f : Y \longrightarrow X$ est homotope á une application constante.*

1) **Condition nécessaire :** Idem que précédent :

$$\begin{cases} f \sim f \\ \\ Id_X \sim \mathcal{E}'_{x_0} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} Id_X \circ f \sim \mathcal{E}'_{x_0} \circ f \\ \\ f \sim \mathcal{E}'_{x_0} \end{cases}$$

2) **Condition suffisante :** C'est praie pour tout $f : Y \longrightarrow X$ en particulier pour $Id_X : X \longrightarrow X$.

Conséquence 1.2.1. *Un éspace topologique X est contractile ssi $f, g : Y \longrightarrow X$ deux applications continues alors elles homotopes.*

1) **Condition nécessaire :** On a les homotopes suivantes :

$$\begin{cases} f \sim f \\ Id_X \sim \mathcal{E}_{x_0} \end{cases} \Rightarrow f \cong \mathcal{E}'_{x_0}$$

et

$$\begin{cases} g \sim g \\ Id_X \sim \mathcal{E}_{x_0} \end{cases} \Rightarrow g \cong \mathcal{E}'_{x_0}$$

$$\Rightarrow f \sim g$$

2) <u>**Condition suffisante :**</u> Si pour toutes paires d'applications continues $f, g : Y \longrightarrow X$ celle- ci sont homotopes en particulier, si l'une d'elle est une application constante, ainsi de la proposition précedente on déduit que X est contractile.

1.2.1 Homotopie relative

Soient $X, Y \in obj_{Top}$, et $Mor_{Top}(X, Y)$:

Définition 1.2.2. *On dit que deux morphismes $f, g \in Mor_{Top}(X, Y)$ sont homotopes relativement á $A \subseteq X$ ssi :*

1) $f(a) = g(a) \quad \forall a \in A$

2) Il éxiste : $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ continue, avec :

$$\begin{cases} F(x,0) &= f(x) \\ F(x,1) &= g(x) \\ F(a,t) &= f(a) = g(a) \quad \forall (a,t) \in A \times [0,1] \end{cases}$$

Proposition 1.2.4. *La relation d'homotopie relative est une relation d'equivalence.*

Soient $X, Y \in obj_{Top}$ et $A \subset X$ on considère l'homotopie relative modulo A (par rapport á A).

1) <u>**Réfléxivité :**</u> Soit $f : X \longrightarrow Y$ alors évidament $f(a) = f(a) \quad \forall a \in A$ et

$F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ où $F(X, t) = f(x)$ montre que f est homotope á f modulo A.

2) <u>**Symétrique :**</u> Soient $f, g : X \longrightarrow Y$ où f et homotope á g relativement á A donc :

(1) $f(a) = g(a) \quad \forall a \in A$

(2) $\exists F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ avec : $\begin{cases} F(X,0) & = f(x) \\ F(X,1) & = g(x) \\ F(a,t) & = f(a) \quad \forall (a,t) \in A \times [0,1] \end{cases}$

(3) Considérons $G : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ où $G(x,t) = F(x, 1-t)$ alors :

G est continue et : $\begin{cases} G(X,0) & = F(x,1) = g(x) \\ G(X,1) & = F(x,0) = f(x) \\ G(a,t) & = F(a,1-t) = f(a) = g(a) \end{cases}$

$\Longleftrightarrow g$ est relativement homotope á f modulo A.

3) **Transitivité :** Soient $f,\ g,\ h \in Mor_{Top}(X,Y)$ avec $f(a) = g(a) = h(a) \quad \forall a \in A$ et supposons que :

(1) f relativement homotopie á g modulo A

(2) g relativement homotopie á h modulo A

ils éxistent alors :

(1) $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ continue $\begin{cases} F(X,0) & = f(x) \\ F(X,1) & = g(x) \\ F(a,t) & = f(a) \quad \forall (a,t) \in A \times [0,1] \end{cases}$

(2) $G : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ continue $\begin{cases} G(X,0) & = g(x) \\ G(X,1) & = h(x) \\ G(a,t) & = g(a) \quad \forall (a,t) \in A \times [0,1] \end{cases}$

(3) Considérons : $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ continue

$$H(X,t) = \begin{cases} f(X,2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(X,2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

H est continue ($t = \frac{1}{2}$ on trouve $g(x)$)

$$\begin{cases} H(X,0) & = F(X,1) = f(x) \\ H(X,1) & = G(X,1) = h(x) \\ H(a,t) & = f(a,2t) \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ & = G(a,2t-1) \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \Rightarrow f(a) = g(a) = h(a)$$

ainsi $H(a,t) = f(a) = g(a) = h(a) \quad \forall (a,t) \in A \times [0,1]$ donc f est relativement homotopie á h modilo A.

Conséquence 1.2.2. *La relation d'homotopie relative (modulo A) partitionne $Mor_{Top}(X,Y)$ en classe d'equivalence appeléés classes d'homotopies relatives*
ainsi on a : $g \in [f]$ (homotopie relative modulo A) $\Longleftrightarrow$ f relativement homotopie á g (moduloA) note :$f \sim g$ (mod A).

1.2.2 Retract et déformation

Restruction d'une application

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue donnée et $X_0 \subset X$.

Définition 1.2.3. *On appelle restruction de f á X_0 l'application notée :*
$f/_{X_0}(x_0) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in X_0$ dans ce cas f s'appelle la prololongée de $f/_{X_0}$ sur X. Le problème inverse qui est le problème de l'existance d'une prolongée est un des problèmes important en mathématique celui n'a pas de solution globale jusqu'á ce jour c.á.d qu'un n'a pas de répense d'existance de prolongée pour tous les problème posés.
Le problème d'existance de prolongée s'enonce ainsi :
Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue où $X_0 \subset X$, éxiste-il application continue
$\tilde{f} : X \longrightarrow Y$ telle que : $\tilde{f}/_{X_0} = f$?
Le problème d'existance se ramène á l'existance du diagrame suivant :

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}?"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

$\exists ?\ \ \tilde{f} : X \longrightarrow Y / \tilde{f} \circ i = f$ *où i est l'injection canonique .*

Une classe importante où le problème d'existance de prolongée continue admet une solution (répence) est la classe des relations.

Caractérisation de la classes des retractes dans Top

Définition 1.2.4. *Une partie X_0 d'une e.T. X est appelée un retract de X ssi : il éxiste une application continue $\mathcal{T} : X \longrightarrow X_0$ telle que : $\mathcal{T} \circ i = Id_{X_0}$ où $i_{X_0} : X_0 \longrightarrow X$ est l'injection canonique $\left(i \subset X \right)$*

Définition 1.2.5. ***(définition équivalent)***

X_0 est un retaract de X ssi il éxiste un diagrame commutatif dans Top :

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "Id_{X_0}"'] & X \arrow[dl, "\mathcal{T}\ ?"] \\ X_0 & \end{tikzcd}$$

On constate que le diagrame du retractile ressemble celui l'existance d'une prolongée.

Théorème 1.2.1. *Un sous éspace d'un éspace topologique X est un retract de X ssi toute application continue $f : X_0 \longrightarrow X$ admet une prolongée continue sur X.*

1) <u>**Condition nécessaire :**</u> Supposons que X_0 est un retract de X et sait $f : X_0 \longrightarrow X$ une application continue.

   On sait qu'il éxiste une application continue $\mathcal{T} : X \longrightarrow X_0$ avec $\mathcal{T} \circ i = Id_{X_0}$.

   Considérons alors :

   $$f \circ \mathcal{T} : \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & X_0 \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

   Celle- ci est une application continue et c'est une prolongée de f car : $X_0 \longrightarrow x_0$ alors : $\tilde{f}(X_0) = f \circ \mathcal{T}\ (X_0) = f \circ \mathcal{T} \circ i\ (X_0) = f \circ Id_{X_0}(X_0) = f(X_0)$

2) <u>**Condition suffisante :**</u> Supposons que toute application on admet une prolongée considérons $Id_{X_0} : X_0 \longrightarrow X_0 \subset X$ celle- ci est continue donc elle admet une prolongée $\mathcal{T} : X \longrightarrow X_0$ donc d'après le diagrame de l'existance de prolongée on déduit $\mathcal{T} \circ i = Id_{X_0}$ donc X_0 est une retracte de X.

Remarque 1.2.2. *Si X_0 est un retracte de X alors l'application $\mathcal{T} : X \longrightarrow X_0$ qui vérifie $\mathcal{T} \circ i = Id_{X_0}$ s'appelle retraction.*

Définition 1.2.6. *On dit qu'un s.e.T* X_0 *d'un e.T* X *est un famille retracte de* X *ssi il éxiste une application continue* $\mathcal{T} : X \longrightarrow X_0$ *avec* $\mathcal{T} \circ \imath \sim Id_{X_0}$ *(* $\mathcal{T} \circ i$ *homotope á* Id_{X_0}*)*

Remarque 1.2.3. *Toute retracte est forcement une famille retracte l'egalité implique l'homotopie.*
La notion ci- dessue est une généralisation de la notion de retracte où l'egalité se transforme on homotopie peut on obtenir d'autre concept mathématique par généralisation des notions ci- dessues.
On termine la généralisation en faisant appelle á l'homotopie relative.

Définition 1.2.7. *Un sous éspace topologique* X_0 *d' un éspace topologique* X *est appelés un retracte par déformation de* X *ssi il éxiste une retraction* $\mathcal{T} : X \longrightarrow X_0$ *telle que* $\imath \circ \mathcal{T} \sim Id_X$ *et* $\mathcal{T} \circ \imath \sim Id_{X_0}$ *(mod* X_0*) la propriété :* $\mathcal{T} \circ \imath \sim Id_{X_0}$ *(mod* X_0*) a une sens*

(rappel : $f \sim g$ *(mod* A*))* $\begin{cases} f(a) = g(a) \\ \cdots \end{cases}$ *a en sens car :* $\mathcal{T} \circ \imath\ (x_0) = Id_{X_0}(x_0)$ *,* $\forall x_0 \in X_0$

Homotopie dans $\overset{\bullet}{\widehat{\mathbf{Top}}}$

Soit $\overset{\bullet}{\widehat{\mathrm{Top}}}$ catégories des e.T pointés et des applications continues.

Définition 1.2.8. *Deux morphismes* $f,\ g \in Mor_{Top}[(X, x_0), (Y, y_0)]$ *sont dit homotope : ssi il éxiste une application continue :*

$$F : (X \times [0,1], \{x_0\} \times [0,1]) \longrightarrow (Y, y_0) \quad \textit{telle que :} \begin{cases} F(X, 0) & = f(x) \\ F(X, 1) & = g(x) \\ F(x_0, t) & = y_0 \quad \forall t \in [0,1] \end{cases}$$

cette dernière égalité signifier $F(x_0, [0,1]) = y_0$.

Proposition 1.2.5. *La relation d'homotopie dans* $Mor_{\overset{\bullet}{\widehat{Top}}}[(X, x_0), (Y, y_0)]$ *est une relation d'quivalence elle partitionne* $Mor_{Top}[(X, x_0), (Y, y_0)]$ *en classe d'homotopie notation :*
$Mor_{\overset{\bullet}{\widehat{Top}}}[(X, x_0), (Y, y_0)]/ \sim [(X, x_0), (Y, y_0)]$
On peut penser á l'inverser $\mathcal{T}$ *et* $\imath$ *pour considérer :* $\imath \circ \mathcal{T}$

$$c.\acute{a}.d \ \exists\, r : X \longrightarrow X_0 \ \text{continue telle que :} \ i \circ r \begin{cases} = Id_X & (1) \\ \sim Id_X & (2) \end{cases}$$

si on veut généraliser á partire du (1) *c.à.d*

donc dire a X_0 *est opérateur ssi il éxiste* $r : X \longrightarrow X_0$ *continue avec* $i \circ r = Id_X$.

Ce cas est triviale on effet l'egalité : $i \circ r = Id_X \Rightarrow i$ *bijection* $\Rightarrow i = Id_X \Rightarrow X_0 = X$.

Cette généralisation ne conduit pas á une classe importante particulière d'objets de top.

Cependant la second considération notion mathématique qui est la classe des déformations.

Définition 1.2.9. *On dit qu'un s.e.T* X_0 *d'un éspace topologique* X *est une déformation de* X *ssi il éxiste une application continue* $d : X \longrightarrow X_0$ *telle que* $i \circ d \sim Id_X$.

Généralisation par combinair sur des déffirents notions

Définition 1.2.10. *Un sous éspace topologique* X_0 *d' un e.T* X *est appelé retracte par déformation de* X *ssi il éxiste une retraction* r *telle que :*

$$i \circ r \sim Id_X \Longleftrightarrow \exists\, r : X \longrightarrow X_0 \begin{cases} r \circ i = Id_{X_0} \\ i \circ r \sim Id_X \end{cases}$$

Définition 1.2.11. *Un s.e.T* X_0 *d'un e.T.X est appelé un faible retracte par déformation ssi il éxiste une application continue* $d : X \longrightarrow X_0$ *telle que :*

$$\begin{cases} d \circ i \sim Id_{X_0} \\ \quad et \\ i \circ d \sim Id_X \end{cases}$$