الفصل الثاني:

الفائدة المركبة

1-تعريف الفائدة المركبة:

الفائدة المركبة هي تلك الفائدة التي تُحسب على أساس أصل المبلغ مضاف إليه الفوائد المتولدة عن الفترات السابقة، وهي بهذا تختلف عن الفائدة البسيطة كون هذه الأخيرة تُحسب فقط على أساس أصل المبلغ مهما كان عدد الوحدات الزمنية.

وتُستعمل في الغالب الفائدة المركبة للاقتراض طويل الأجل بينما تُحسب الفائدة البسيطة على الاقتراض قصير الأجل.

مثال توضيحي:

تم إيداع مبلغين من المال قدر كل واحد منهما يساوي **1600**وحدة نقدية ولمدة **3** سنوات لكل منهما وأودع كلاهما بمعدل فائدة سنوي **6%** لكن الأول بفائدة بسيطة والثاني بفائدة مركبة.

جدول الفائدة البسيطة:

المدة (السنة)	المبلغ في بداية المدة	الفائدة	المبلغ المتحصل (الجملة)
1	1600	96=0.06*1600	1696=96+1600
2	1600	96=0.06*1600	1696=96+1600
3	1600	96=0.06*1600	1696=96+1600

جدول الفائدة المركبة:

المدة (السنة)	المبلغ في بداية المدة	الفائدة	المبلغ المتحصل (الجملة)
1	1600	96=0.06*1600	1696=96+1600
2	1696	101.76=0.06*1696	1797.76=101.76+1696
3	1797.76	107.87=0.06*1797.76	1905.63=107.87+1797.76

2-قانون الفائدة المركبة:

لنفترض أن:

C : أصل المبلغ

i : معدل الفائدة

n : المدة بالسنوات

الفترات	رأس المال في بداية الفترة (1)	فائدة الفترة (2)	القيمة المحصلة في نهاية الفترة (الجملة) (2+1)
1	C	Ci	$C+Ci=C(1+i)$
2	$C(1+i)$	$C(1+i)i$	$C(1+i)+C(1+i)i=C(1+i)[1+i]=C(1+i)^2$
3	$C(1+i)^2$	$C(1+i)^2 i$	$C(1+i)^2+C(1+i)^2 i=C(1+i)^2[1+i]=C(1+i)^3$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n-1	$C(1+i)^{n-2}$	$C(1+i)^{n-2} i$	$C(1+i)^{n-2}+C(1+i)^{n-2} i=C(1+i)^{n-2}[1+i]=C(1+i)^{n-1}$
n	$C(1+i)^{n-1}$	$C(1+i)^{n-1} i$	$C(1+i)^{n-1}+C(1+i)^{n-1} i=C(1+i)^{n-1}[1+i]=C(1+i)^n$

نستنتج من الجدول أن القيمة المحصلة للمبلغ C بعد عدد من الوحدات الزمنية n بمعدل فائدة مركبة i لكل وحدة زمنية تُعطى بالعلاقة التالية:

$$\boxed{C_n = C(1+i)^n}$$

وهي تمثل القانون الأساسي للفائدة المركبة.

وقانون الفائدة المركبة يُعطي القيمة المحصلة من عملية القرض أو التوظيف (الجملة) بينما قانون الفائدة البسيطة يمدنا بالفائدة مباشرة. ولحساب الفائدة الناتجة عن قانون الفائدة المركبة فإننا نطرح أصل القرض من القيمة المحصلة له. ومنه:

$$I = C_n - C \Rightarrow I = C(1+i)^n - C \Rightarrow \boxed{I = C[(1+i)^n - 1]}$$

3-طرق حساب الجملة المركبة:

طريقة الحساب البحت: تقوم هذه على الحساب المباشر. ونلاحظ انه باستخدام الحاسبات العلمية تسهل الحسابات ويُختصر الوقت.

طريقة الجداول المالية: إن طريقة الجداول المالية تُعد الأكثر شيوعا واستخداما لما توفره من وقت وتدخره من مجهودات. ولقد اعد الجدول الأول من هذه الجداول على أساس القيمة المحصلة للدينار الواحد بمعدلات فائدة مركبة متغيرة ولمدد مختلفة لكل معدل منها، فإذا ما قاطعنا بين المعدل المعين والفترة المحددة نحصل على الجملة المركبة التي ينتجها دينار واحد موظف بذلك المعدل وتلك المدة. ومن البديهي انه لحساب جملة مركبة لمبلغ معين بنفس المعدل ونفس المدة ما علينا إلا أن نضرب الجملة المركبة للدينار في ذلك المبلغ.

طريقة اللوغارتم: يُمكن استخدام هذه الطريقة لحساب الجملة وخاصة إذا كانت الفترة كسرية أو عدم وجودها في الجداول المالية، وكذالك عدم وجود معدل الفائدة في الجداول المالية.

مثال2-1:

أودع احد الأشخاص مبلغ من المال قدره 3500وحدة نقدية لدى احد البنوك بمعدل فائدة مركب 6% ولمدة 7 سنوات.

المطلوب:

1-احسب جملة المبلغ؟

2-احسب الفائدة المتحصل عليها؟

الحل

C=3500

i=6%

n=7

حساب جملة المبلغ:

طريقة الحساب البحت:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow C_7 = 3500(1+0.06)^7 = 3500(1.503630259)$$

$$\boxed{C_7 = 5262.71 \text{ وحدة نقدية}}$$

طريقة الجداول المالية:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow C_7 = 3500(1+0.06)^7 = 3500(1.50363026)$$

حيث استخرجنا قيمة $(1.06)^7$ من الجدول المالي رقم 1.

$$\boxed{C_7 = 5262.71 \text{ وحدة نقدية}}$$

طريقة اللوغاريتم:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow C_7 = 3500(1+0.06)^7 \Rightarrow C_7 = 3500(1.06)^7$$

$$LogC_7 = Log3500 + 7Log(1.06) \Rightarrow LogC_7 = Log3500 + 7Log(1.06)$$

$$LogC_7 = 3.544068044 + 7(0.025305865) = 3.721209101$$

$$C_7 = 10^{3.721209101} = \boxed{C_7 = 5262.71 \text{ وحدة نقدية}}$$

حساب الفائدة المتحصل عليها:

يتم حساب قيمة الفائدة سواء من خلال طرح أصل المبلغ من الجملة المركبة المتحصل عليها بإحدى الطرق السابقة أو باستخدام قانون حساب الفائدة الناتجة عن قانون الفائدة المركبة. ومنه:

$$I = C_n - C \Rightarrow I = 5262.71 - 3500 = \boxed{1762.71 \text{ وحدة نقدية}}$$

أو:

$$I = C[(1+i)^n - 1] = 3500[(1+0.06)^7 - 1]$$

$$I = 3500[(1.06)^7 - 1] = 3500[1.50363026 - 1] = \boxed{1762.71 \text{ وحدة نقدية}}$$

إيجاد الجملة المركبة فى حالة المدة غير الكاملة (تحتوي شهور و/ أو أيام):

عندما تحتوي المدة أجزاء من السنة (شهور، أيام)، فإن هناك عدة طرق تساعدنا على إيجاد الجملة، نذكر منها اثنتان:

الطريقة الرياضية: وتعتمد على مبادئ الرياضيات المالية وتتمثل في استعمال الجدول المالي رقم 1 لحساب $(1+i)^n$ للسنوات الكاملة بينما تُستعمل الجداول الملحقة المخصصة للشهور أو الأيام للمدة الباقية المرافقة لعدد السنوات الكاملة (الجدول المالي رقم 6). ونجد الجملة كما يلي:

$$C_{n,\frac{m}{12}} = C(1+i)^{n+\frac{m}{12}} \Rightarrow \boxed{C_{n,\frac{m}{12}} = C(1+i)^n (1+i)^{\frac{m}{12}}}$$

وفي حالة الأيام نستبدل $\frac{m}{12}$ ب $\frac{j}{360}$

الطريقة البنكية: حسب هذه الطريقة المستعملة في البنوك عمليا، يتم حساب قيمة الفائدة للفترات أو السنوات الكاملة بعلاقة جملة الفائدة المركبة، أما ما يتعلق بالأيام أو الشهور فتُستعمل علاقة الفائدة البسيطة.

$$\boxed{C_{n,\frac{m}{12}} = C(1+i)^n + C(1+i)^n i \frac{m}{12}}$$

وفي حالة الأيام نستبدل $\frac{m}{12}$ ب $\frac{j}{360}$

مثال2-2:

أودع احد الأشخاص مبلغ من المال قدره 3200وحدة نقدية لدى احد البنوك بمعدل فائدة مركب 7.5% لمدة 3 سنوات و5 أشهر.

المطلوب: احسب الجملة بالطريقة الرياضية وبالطريقة البنكية؟

الحل

$C = 3200$

$i = 7.5\%$

n= 3, m= 5

الطريقة الرياضية:

$$C_{n,\frac{m}{12}} = C(1+i)^n(1+i)^{\frac{m}{12}} = 3200(1.075)^3(1.075)^{\frac{5}{12}}$$

من الجدول المالي رقم 1 نستخرج قيمة $(1.075)^3$ ومن الجدول المالي رقم 6 نستخرج قيمة $(1.075)^{\frac{5}{12}}$، ومنه:

$$C_{3,\frac{5}{12}} = 3200(1.24229688)(1.03059222) \Longrightarrow \boxed{C_{3,\frac{5}{12}} = 4096.95 \text{ وحدة نقدية}}$$

الطريقة البنكية:

$$C_{n,\frac{m}{12}} = C(1+i)^n + C(1+i)^n i\frac{m}{12} \Longrightarrow C_{3,\frac{5}{12}} = 3200(1.075)^3 + 3200(1.075)^3\frac{7.5}{100}\frac{5}{12}$$

من الجدول المالي رقم 1 نستخرج قيمة $(1.075)^3$. ومنه:

$$\boxed{C_{3,\frac{5}{12}} = 4099.58 \text{ وحدة نقدية}}$$

إيجاد الجملة المركبة في حالة المعدل غير مجدول: عندما يكون معدل الفائدة المركب غير موجود في الجدول المالي، فإنه يُمكن إتباع إحدى الطريقتين التاليتين:

الطريقة اللوغاريتمية: وهنا يتم حساب الجملة المركبة كما تناولناها عند التطرق إلى طرق حساب الجملة المركبة.

طريقة الجداول المالية: وهنا يتم الاستعانة بالجداول المالية كما يلي:

ليكن i هو المعدل الغير المجدول: نحدد المعدلين المجدولين الذين يحصران المعدل المجدول وليكن المعدل الأكبر i_1 والمعدل الأصغر i_2 وبطريقة التناسب نكتب :

$$\boxed{(1+i)^n = (1+i_2)^n + \frac{\left((1+i_1)^n - (1+i_2)^n\right) \times (i-i_2)}{(i_1-i_2)}}$$

ثم نقوم بعد ذلك باستخدام $(1+i)^n$ في حساب الجملة.

مثال 3-2

بطريقة الجداول المالية،اوجد جملة مبلغ قدره 2000 وحدة نقدية وُظف لمدة 5 سنوات بمعدل فائدة مركب سنوي 5.8%.

الحل:

$C = 2000$

$i = 5.8\%$

n= 5

من الجدول المالي رقم 1 نجد أن المعدل 5.8% محصور بين المعدلين 5.75% و 6%. ومنه:

$$(1+i)^n = (1+i_2)^n + \frac{\left((1+i_1)^n - (1+i_2)^n\right) \times (i - i_2)}{(i_1 - i_2)}$$

$$(1.058)^5 = (1.0575)^5 + \frac{\left((1.06)^5 - (1.0575)^5\right) \times (0.058 - 0.0575)}{(0.06 - 0.0575)}$$

$$(1.058)^5 = 1.32566022$$

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow C_5 = 2000(1.058)^5 = 2000(1.32566022)$$

$$\boxed{C_5 = 2651.32 \text{ وحدة نقدية}}$$

إيجاد الجملة في حالة المعدل يُحسب على أساس جزء من السنة: إذا كان معدل الفائدة يُحسب على أساس جزء من السنة (سداسي، ثلاثي،...الخ) فإنه في هذه الحالة نقوم بما يلي حسب المثال التالي:

مثال 2-4

اوجد جملة مبلغ قدره 5200وحدة نقدية وُظف لمدة 3 سنوات بمعدل فائدة مركب نصف سنوي2.5%.

الحل:

$$C = 5200$$

$$i = 2.5\%$$

نلاحظ أن معدل الفائدة المركب يُحسب على أساس سداسي وبالتالي فإن عدد المرات التي يُحسب فيها المعدل هو مرتين في السنة وبالتالي 6 مرات في 3 سنوات ومنه: n=6

$$C_n = C(1+i)^n \Longrightarrow C_6 = 5200(1+0.025)^6 = 5200(1.15969342)$$

$$\boxed{C_6 = 6030.41 \text{ وحدة نقدية}}$$

4- عمليات على القانون الأساسي للفائدة المركبة:

1- أصل المبلغ مجهول : انطلاقا من القانون الأساسي للفائدة المركبة، يُمكن إيجاد المبلغ المستثمر في بداية المدة n ويُدعى أيضا بالقيمة الحالية للجملة مع ضرورة معلومية باقي العناصر.

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow C = \frac{C_n}{(1+i)^n} \Rightarrow \boxed{C = C_n(1+i)^{-n}}$$

ويُمكن إيجاد C بطريقة الحساب البحث، الطريقة اللوغاريتمية أو طريقة الجداول المالية وسوف نتناول فقط الطريقة الأخيرة.

من خلال الجدول المالي رقم 2 يُمكن استخراج قيمة $(1+i)^{-n}$ ومن تم إيجاد قيمة أصل المبلغ.

مثال2-4:

أودع احد الأشخاص مبلغا من المال لدى احد البنوك بمعدل فائدة مركب 5.75% ولمدة 8 سنوات ليتحصل في النهاية على جملة قدرها 2450 وحدة نقدية.

المطلوب: ماهو المبلغ الذي أودعه ذلك الشخص؟

الحل

$$C_8 = 2450$$

$$i = 5.75\%$$

$$n = 8$$

$$C = C_n(1+i)^{-n} \Rightarrow C = 2450(1.0575)^{-8} \Rightarrow C = 2450(1.0575)^{-8} \Rightarrow C = 2450(0.63937697)$$

$$\boxed{C = 1566.47 \text{ وحدة نقدية}}$$

2- معدل الفائدة مجهول: لإيجاد معدل الفائدة، مع معلومية باقي العناصر، يمكننا استخدام سواء طريقة الجداول المالية أو الطريقة اللوغاريتمية.

الطريقة اللوغاريتمية: يُمكن إيجاد معدل الفائدة بالطريقة اللوغاريتمية كما يلي:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow LogC_n = LogC + nLog(1+i) \Rightarrow$$

$$Log(1+i) = \frac{LogC_n - LogC}{n} \Rightarrow \boxed{i = 10^{\left(\frac{LogC_n - LogC}{n}\right)} - 1}$$

طريقة الجداول المالية: يُمكن هنا الاستعانة بالجداول المالية لإيجاد معدل الفائدة كما يلي:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow \boxed{(1+i)^n = \frac{C_n}{C}}$$

وبعد ذلك نبحث عن القيمة الناتجة عن تقسيم الجملة على أصل المبلغ أي $\frac{C_n}{C}$ في الجدول المالي رقم 1 في السطر الذي يقابل المدة n (معلومة). والمعدل (العمود) المقابل هو المعدل المطلوب.

مثال2-5:

أودع احد الأشخاص مبلغا من المال لدى احد البنوك قدره 1550وحدة نقدية ولمدة 5 سنوات ليتحصل في النهاية على جملة قدرها 2330.67وحدة نقدية.

المطلوب: اوجد معدل الفائدة المركب الذي وُظف به المبلغ بطريقة الجداول المالية؟

الحل

$$C_5 = 2330.67$$

$$C = 1550$$

$$n = 5$$

$$(1+i)^n = \frac{C_n}{C} \Longrightarrow (1+i)^5 = \frac{2330.67}{1550} = 1.503658065$$

نقوم بالبحث عن القيمة المتحصل عليها في الجدول المالي رقم 1 عند السطر الذي يقابل 5 سنوات ونجد هذه القيمة عند المعدل 8.5%، إذا:

$$\boxed{i = 8.5\%}$$

إيجاد معدل الفائدة في حالة قيمة حاصل $\frac{C_n}{C}$ لا توجد في الجدول المالي : في حالة أن حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ لا توجد في الجدول المالي فإننا نقوم بتطبيق الخطوات التالية:

- نحدد القيمتين في الجدول المالي التي يقع بينهما حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ عند السطر التي تقع فيه المدة المحددة في المعطيات ونرمز للقيمة الكبرى ب x_1 والقيمة الصغرى x_2.

- نحدد معدلي الفائدة الذين يقابلان القيمتين المتحصل عليهما في الخطوة السابقة ونرمز للمعدل الكبير ب i_1 والمعدل الصغير ب i_2؛

ويتم إيجاد معدل الفائدة بالتناسب كما يلي:

$$\boxed{i = \frac{(i_1 - i_2)\times(\frac{C_n}{C} - x_2)}{(x_1 - x_2)} + i_2}$$

مثال2-6:

أقترض احد الأشخاص مبلغا من المال قدره 2000وحدة نقدية لمدة 4 سنوات ليتحصل في النهاية على جملة قدرها 2705.89وحدة نقدية.

المطلوب: اوجد معدل الفائدة المركب؟

الحل

$C = 2000$

$C_5 = 2705.89$

$n = 4$

$$i = \frac{(i_1 - i_2) \times (\frac{C_n}{C} - x_2)}{(x_1 - x_2)} + i_2 \Rightarrow i = \frac{(0.08 - 0.0775) \times (1.352945 - 1.34793551)}{(1.36048896 - 1.34793551)} + 0.0775$$

$$i = 0.07849 = 7.849\% = \boxed{7.85\%}$$

3- المدة مجهولة: لإيجاد مدة إيداع أو مدة الاقتراض، مع معلومية باقي العناصر، يمكننا استخدام سواء طريقة الجداول المالية أو الطريقة اللوغاريتمية.

الطريقة اللوغاريتمية: يُمكن إيجاد المدة بالطريقة اللوغاريتمية كما يلي:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow LogC_n = LogC + nLog(1+i) \Rightarrow \boxed{n = \frac{LogC_n - LogC}{Log(1+i)}}$$

طريقة الجداول المالية: يُمكن هنا الاستعانة بالجداول المالية لإيجاد المدة كما يلي:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow \boxed{(1+i)^n = \frac{C_n}{C}}$$

وبعد ذلك نبحث عن القيمة الناتجة عن تقسيم الجملة على أصل المبلغ أي $\frac{C_n}{C}$ في الجدول المالي رقم 1 في العمود الذي يقابل المعدل وعند الوصول إلى تلك القيمة يُمكن تحديد المدة (عند السطر المقابل).

مثال2-7:

أودع احد الأشخاص مبلغا من المال لدى احد البنوك قدره 100000وحدة نقدية بمعدل فائدة 8% ليتحصل في النهاية على جملة قدرها 199900.463وحدة نقدية.

المطلوب: اوجد المدة التي وُظف بها المبلغ بطريقة الجداول المالية؟

الحل

$$C_n = 199900.463$$

$$C = 100000$$

$$i = 8\%$$

$$(1+i)^n = \frac{C_n}{C} \Longrightarrow (1.08)^n = \frac{199900.463}{100000} = 1.99900463$$

نقوم بالبحث عن القيمة المتحصل عليها في الجدول المالي رقم 1 عند العمود الذي يقابل معدل 8% ونجد هذه القيمة عند n=9 إذا:

$$\boxed{n = 9 \text{ سنوات}}$$

- إذا كانت القيمة التي نبحث عنها لا توجد في الجدول المالي: في هذه الحالة نقوم بما يلي التالي:

يُمكن هنا الاستعانة بالجداول المالية لإيجاد المدة كما يلي:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow \boxed{(1+i)^n = \frac{C_n}{C}}$$

وبعد ذلك نبحث عن القيمة الناتجة عن تقسيم الجملة على أصل المبلغ أي $\frac{C_n}{C}$ في الجدول المالي رقم 1 في العمود الذي يقابل المعدل فنجدها محصورة بين x_1 و x_2 تقابلان n_1 السنة الكبرى و n_2 السنة الصغرى على التوالي و نطبق القانون التالي:

$$\boxed{j = \frac{\left\{\frac{C_n}{C} - X_2\right\} \times 360}{\left(X_1 - X_2\right)}}$$

ومنه تكون المدة هي n_2 القيمة الصغرى مضافا إليها j التي تم حسابها من خلال القانون السابق

مثال2-7:

تم توظيف مبلغ من المال قدره 32000 دج بمعدل فائدة مركب 3,5% لينتج جملة قدرها 48593,95دج

المطلوب: اوجد المدة الذي وُظف بها المبلغ؟

الحل

$$C_n = 48593\cdot 95 \qquad C = 32000 \qquad i = 3\cdot 5\%$$

$$(1+i)^n = \frac{C_n}{C} \Longrightarrow (1.035)^n = \frac{48593\cdot 95}{32000} = 1\cdot 51856094$$

نقوم بالبحث عن القيمة المتحصل عليها في الجدول المالي رقم 1 عند العمود الذي يقابل معدل 3.5% ونجد هذه القيمة محصورة بين $n_1 = 13$ و$n_2 = 12$ و نطبق القانون التالي:

$$\boxed{j = \frac{\left\{\frac{C_n}{C} - X_2\right\} \times 360}{(X_1 - X_2)}} \Longrightarrow \boxed{j = \frac{\{1\cdot 51856094 - 1\cdot 51106866\} \times 360}{(1\cdot 56395606 - 1\cdot 51106866)}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{J = 50\cdot 99 \approx 51 \text{يوم}}$$

ومنه تكون المدة هي 12سنة و 51 يوم

المعدلات المتناسبة و المتكافئة

1- المعدلات المتكافئة

ليكن لدينا رأس مال c