Université Abdelhafid Boussouf - Mila
Institut des Mathématiques et informatique
Département des Mathématiques

$2024 - 2025$

Master 1 **: MMTD**

Série no 1 **: Gestion des filles d'attente**

Exercice 1. *Soit Y une variable aléatoire suivant une loi uniforme continue sur l'intervalle $[a, b]$, avec $a = 1$ et $b = 4$.*

1. *Trouvez la fonction de densité de probabilité $f_Y(y)$ et la fonction de répartition cumulative $F_Y(y)$.*
2. *Calculez $P(Y > 2.5)$ en utilisant la FRC.*

Exercice 2. *Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On vous donne la densité de probabilité de X :*

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

1. *Trouvez la fonction de répartition cumulative $F_X(x)$ pour $x \geq 0$.*
2. *Calculez la probabilité que X soit comprise entre 1 et 3, c'est-à-dire $P(1 \leq X \leq 3)$, pour $\lambda = 2$.*

Exercice 3. *Utilisant le code Python, répondre aux questions suivantes :*

1. *Générer* 100 *variables aléatoires uniformes entre [0,100].*
2. *Générer* 100 *variables aléatoires exponentielles de $\lambda = 1.5$.*
3. *Tracer les deux histogrammes des données générées.*

Exercice 4. *Dans une station-service, les voitures arrivent suivant un processus de Poisson avec un taux d'arrivée constant de 4 voitures par minute.*

1. *Modélisez les temps inter-arrivées des voitures à la station-service à l'aide d'une loi exponentielle.*
2. *Générer les 5 premiers temps inter-arrivées des voitures en utilisant la loi exponentielle.*
3. *Calculez la probabilité qu'il s'écoule plus de 30 secondes avant l'arrivée de la prochaine voiture.*
4. *Calculez le temps moyen inter-arrivées pour ces voitures.*

Exercice 5. *Un guichet de banque reçoit des clients à un taux moyen de 15 clients par heure. Le temps entre les arrivées suit une distribution exponentielle.*

1. *Modélisez le processus d'arrivée des clients à ce guichet en tant que processus de Poisson.*
2. *Calculez la probabilité qu'aucun client n'arrive dans un intervalle de 10 minutes.*
3. *Déterminez la probabilité qu'au moins 2 clients arrivent dans une période de 5 minutes.*
4. *Quel est le temps moyen entre deux arrivées successives ?*
5. *Si un client est arrivé, quelle est la probabilité qu'il faille attendre plus de 6 minutes avant l'arrivée du prochain client ?*

Solution Exercice 1

1. Trouver la fonction de densité de probabilité et la fonction de répartition cumulative :

   Pour une variable aléatoire Y uniformément répartie sur l'intervalle $[a, b]$, la fonction de densité de probabilité est donnée par :

   $$f_Y(y) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq y \leq b$$

   Donc, pour $a = 1$ et $b = 4$:

   $$f_Y(y) = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}, \quad 1 \leq y \leq 4$$

   La fonction de répartition cumulative $F_Y(y)$ est l'intégrale de la fonction densité de probabilité :

   $$F_Y(y) = \int_1^y \frac{1}{3}\, dt = \frac{y-1}{3}, \quad 1 \leq y \leq 4$$

   Ainsi, la fonction de répartition est :

   $$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \frac{y-1}{3}, & 1 \leq y \leq 4 \\ 1, & y > 4 \end{cases}$$

2. Calculer $P(Y > 2.5)$:

   Pour calculer cette probabilité, nous utilisons la fonction de répartition cumulative $F_Y(y)$:

   $$P(Y > 2.5) = 1 - P(Y \leq 2.5) = 1 - F_Y(2.5) = \frac{1.5}{3} = 0.5.$$

   Donc :

   $$P(Y > 2.5) = 1 - 0.5 = 0.5$$

Solution Exercice 2

1. Trouver la fonction de répartition cumulative :

   La fonction de répartition cumulative est définie par :

   $$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f_X(t)\, dt$$

   Substituons $f_X(t)$ par $\lambda e^{-\lambda t}$:

   $$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

   L'intégrale de $e^{-\lambda t}$ est $-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$, donc :

   $$F_X(x) = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

2. Calculer $P(1 \leq X \leq 3)$ pour $\lambda = 2$:

   La probabilité que X soit comprise entre 1 et 3 est donnée par :

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 3) &= F_X(3) - F_X(1) \\ &= (1 - e^{-6}) - (1 - e^{-2}) = e^{-2} - e^{-6} \\ &\approx 0.1353 - 0.0025 = 0.1328. \end{aligned}$$

   Donc, la probabilité que X soit comprise entre 1 et 3 est environ 13.28%.

Solution Exercice 3

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

λ = 1.5 # taux d'arrivée (lambda)
n = 10000 # nombre d'échantillons

exp = np.random.exponential(1/λ, n)
uniform = np.random.uniform(a, b, n)

plt.hist(uniform, bins=50, density=True, alpha=0.6, color='b', edgecolor='black')
plt.hist(exp, bins=50, density=True, alpha=0.6, color='g', edgecolor='red')
```

Solution Exercice 4

1. Le temps entre les arrivées successives des voitures suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 4$ arrivées par minute. La densité de probabilité de cette loi est donnée par :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} = 4e^{-4t}.$$

2. Pour générer les temps inter-arrivées, on utilise la méthode de la transformation inverse :

$$T = \frac{1}{\lambda} \ln(U),$$

   Où U est un nombre aléatoire uniforme entre 0 et 1.

   L'instruction en python pour générer les 5 inter-arrivées est :

$$temps\_inter\_arrives = numpy.random.exponential(1/4, 5),$$

   On peut avoir le résultat suivant $[0.23, 0.14, 0.41, 0.28, 0.19]$ minutes.

3. La probabilité que le temps inter-arrivée T soit supérieur à 0.5 minutes (30 secondes) :

$$P(T > 0.5) \int_{0.5}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-4 \cdot 0.5} \approx 0.1353.$$

4. Le temps moyen inter-arrivées est donné par :

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} = 15 \, secondes.$$

Solution Exercice 5

1. Modélisation du processus d'arrivée : Le taux d'arrivée est $\lambda = 15$ clients par heure. Le processus des arrivées est modélisé par un processus de Poisson, avec un temps entre deux arrivées successives suivant une distribution exponentielle de paramètre λ. La fonction de densité de probabilité (f.d.p.) pour le temps entre les arrivées est donnée par :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

2. Probabilité qu'aucun client n'arrive dans un intervalle de 10 minutes : La probabilité qu'aucun client n'arrive dans un intervalle de temps t est donnée par :

$$P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

Pour $t = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ heures et $\lambda = 15$, la probabilité est :

$$P(T > \frac{1}{6}) = e^{-15 \times \frac{1}{6}} = e^{-2.5} \approx 0.0821$$

3. Probabilité qu'au moins 2 clients arrivent dans une période de 5 minutes : Le nombre d'arrivées dans un intervalle de 5 minutes suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda' = \lambda \times t = 15 \times \frac{5}{60} = 1.25$. La probabilité que k clients arrivent est donnée par :

$$P(N = k) = \frac{(\lambda' t)^k e^{-\lambda' t}}{k!}$$

La probabilité qu'au moins 2 clients arrivent est :

$$P(N \geq 2) = 1 - P(N = 0) - P(N = 1)$$

$$P(N = 0) = e^{-1.25} \approx 0.2865$$

$$P(N = 1) = \frac{(1.25)^1 e^{-1.25}}{1!} \approx 0.3581$$

Donc,

$$P(N \geq 2) = 1 - 0.2865 - 0.3581 = 0.3554$$

4. Temps moyen entre deux arrivées successives : Le temps moyen entre deux arrivées successives est l'espérance de la distribution exponentielle :

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{15} \approx 0.0667 \text{ heures} = 4 \text{ minutes}$$

5. Probabilité d'attendre plus de 6 minutes avant l'arrivée du prochain client : La probabilité d'attendre plus de t minutes avant la prochaine arrivée est donnée par :

$$P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

Pour $t = \frac{6}{60} = 0.1$ heures et $\lambda = 15$, la probabilité est :

$$P(T > 0.1) = e^{-15 \times 0.1} = e^{-1.5} \approx 0.2231$$